Теорема

А. Родин

Согласно Проклу [1] всякая геометрическая теорема имеет следующую структуру, которую мы даем на примере теоремы 1.5 «Начал» Евклида [2]:

1) προτασισ, propositio, предложение:

У равнобедренных треугольников углы при основании равны друг другу, и при продолжении равных отрезков [сторон треугольника] углы под основанием будут равными друг другу.

2) εκθεσισ, expositio, экспозиция, выставление:

Пусть ABC будет равнобедренный треугольник, у которого сторона AB равна стороне AC, а продолжения отрезков AB и AC пусть будут BD и CE.

3) διορισμοσ, determinatio, ограничение:

Говорю, что угол ABC равен углу ACB и угол CBD равен BCE.

4) κατασκευη, constructio, построение:

Пусть на BD будет взята произвольная точка F , от большей AE отнята меньшая AH равная AF, и проведены отрезки FC и HB.

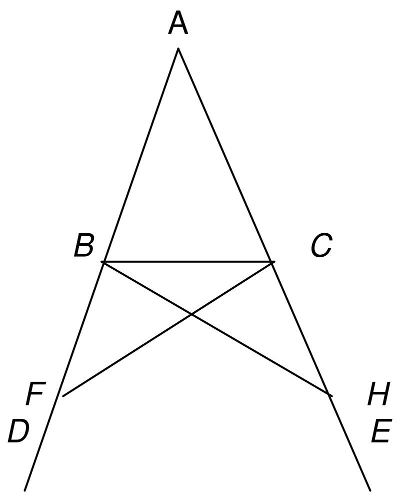


рис.1

5) αποδειξισ, demonstratio, доказательство:

Поскольку теперь 0AF равна AH, а AB равна AC, то вот две FA, AC равны двум HA, AB каждая каждой; и они содержат общий угол FAH; значит, основание FC равно основанию HB и треугольник AFC будет равен треугольнику AHB и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому, а именно, угол ACF углу ABH, а угол AFC углу AHB [1.4] . И поскольку вся AF равна всей AH, и у них AB равна AC, то, значит, и остаток BF равен остатку CH. Но доказано, что и FC равна HB; вот две прямые BF, FC равны двум прямым CH и HB каждая каждой, и угол BFC равен углу CHB, и основание у них общее BC. Значит, и треугольник BFC равен треугольнику CHB, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, равны каждый каждому [1.4]; значит, угол FBC равен углу HCB, а угол BCF углу CBH.

Поскольку теперь доказано, что весь угол ABH равен всему углу ACF, и у них CBH равен BCF, то, следовательно, и остаток ABC равен остатку ACB, и они находятся при основании треугольника ABC. Доказано же, что и угол FBC равен HCB, и оба они под основанием.

6) συμπερασμα, conclusio, заключение:

Таким образом, у равнобедренных треугольников углы при основании (суть) равные друг другу, и при продолжении равных отрезков [сторон треугольника] углы под основанием будут равными друг другу. Что и требовалось показать.

Обратим внимание на то, что такая структура теоремы не является биполярной. В этом отношении она отличается от любых современных интерпретаций, которые при всем их разнообразии, кажется, все сходятся на том, что всякая математическая теорема состоит из утверждения и доказательства этого утверждения. Впрочем, шаг по направлению к современной биполярной структуре теоремы делает уже сам Прокл, когда говорит, что важнейшими элементами из шести являются предложение, доказательство и заключение. Чтобы перейти отсюда к биполярной структуре «утверждение-доказательство», достаточно только перестать отличать заключение от предложения. Но различаются ли предложение и заключение на самом деле?

Заключение текстуально совпадает с предложением, придавая всей теореме форму цикла. Однако, совпадая с предложением текстуально, заключение отличается от предложения по смыслу: предложение это еще голословное утверждение, а заключение это уже доказанная истина. Чем отличается доказанная истина от голословного утверждения? Очевидно, наличием доказательства. Но можно ли сказать, что доказанная истина это утверждение *и* доказательство этого утверждения (как бы ни понимать это доказательство)? Можно ли, вообще, сказать, что доказанная истина отличается от голословного утверждения тем, что к голословному утверждению что-то *добавляется*? Если бы это было так, то теорема имела бы форму линии, а не цикла: мы начинали бы с предложения (утверждения), затем добавляли бы к ней какую-то цепочку рассуждений и называли все вместе теоремой или доказанным утверждением:

утверждение	доказательство

рис.2

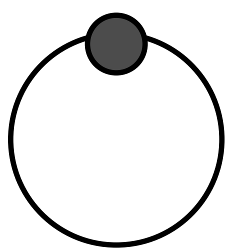
Но на самом деле, доказывая утверждение, мы сначала отправляемся от доказываемого утверждения, а чтобы закончить доказательство, мы должны к этому утверждению *вернуться*. В противном случае мы не можем сказать, что именно *первоначально данное* утверждение доказано; тогда мы просто перейдем от исходного пункта рассуждения к другому, забыв откуда мы вышли. Таким же образом нельзя свести доказательство утверждения к дедуктивному *выводу* этого утверждения из принятых без доказательства аксиом:

известное	вывод	новое утверждение

рис.3

Процедура вывода утверждения из аксиом будет доказательством этого утверждения только в том случае, если это утверждение с самого начала и на протяжении всего вывода имеется в виду как конечная цель; сам вывод в этом случае оказывается возвратом к доказываемому утверждению как к цели доказательства[1]. Таким образом, теорема всегда предполагает возврат к исходному предложению. Если мы, однако, изобразим этот возврат так:

утверждение



доказательство

рис.4

то все равно получится, что доказывая утверждение, мы нечто к нему *прибавляем* - пусть и не линейный, а циклический добавок. Но вернуться,

[1] Кажется, что возврата здесь можно избежать, полагая, что предварительное знание доказываемого утверждения имеет эвристический характер, тогда как вывод этого утверждения из аксиом относится к полученному знанию. Однако как раз в готовом знании всякое доказательство исходно является доказательством какого-то утверждения,

значит обнаружить *то же* ***еще раз***, а не просто остаться при том же и/или что-то добавить к тому же. Можно попробовать изобразить «то же еще раз» так:

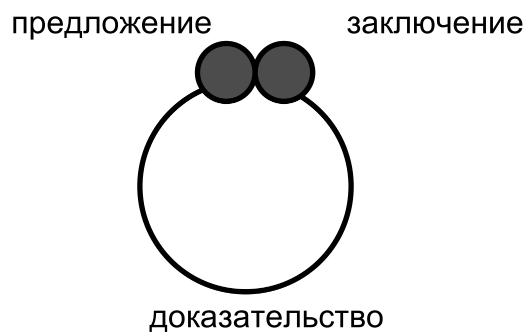


рис.5

Последняя картинка точнее отражает не только смысл теоремы, но и форму ее записи: и там один и тот же текст утверждения графически повторяется дважды (предложение и заключение). Отсюда видно, что наша способность многократно *повторять* один и тот же текст (в частности, одно и то же слово) это не только способность в разных ситуациях указывать на один и тот же смысл, но также способность *различать* разные смыслы одного и того же текста, находящегося в разных ситуациях, то есть в разных контекстах. Так, повторяя одно и то же утверждение в начале и в конце теоремы, мы отличаем доказанную истину от голословного утверждения.

Если сравнить крайние элементы теоремы (предложение и заключение) со всеми ее внутренними элементами (экспозиция, определение, построение и

тогда как «доказательство неизвестно чего», то есть попытки получить из ранее известного доказательство), то можно заметить, что только в предложении и заключении речь идет об *общем*, например, в предложении 1.5 - о равнобедренном треугольнике вообще, тогда как в остальных элементах теоремы речь идет о таких индивидах, как, например, треугольник ABC. Переход от общностей к индивидам осуществляется во втором и третьем по счету элементах теоремы - *экспозиции* и *определении задачи*. С чисто формальной точки зрения индивидуация состоит лишь в том, что к нарицательному имени, обозначающему общее понятие, приписывается имя собственное, указывающее на индивид, например, к нарицательному имени «треугольник» приписывается собственное имя «ABC». В этом отношении индивид оказывается производным от общего понятия. Но с другой стороны, математическое понятие содержательно, то есть имеет смысл только тогда, когда под этим понятием мыслятся индивиды. Мы не можем мыслить треугольник вообще, не мысля индивидуальных треугольников. Говоря словами Канта [3], мыслить треугольник вообще, значит мыслить индивидуальные треугольники по общей схеме. Это значит, что невозможно ни помыслить индивидуальный треугольник без треугольника вообще, ни, наоборот, треугольник вообще без индивидуального треугольника. Треугольник ABC и треугольник вообще это одно и то же понятие, взятое один раз in concreto, а другой раз in abstracto[2].

какие-нибудь следствия, возможны только на эвристическом уровне.

[2] Кант в [4] уточняет количественную характеристику математических суждений, вводя особый тип *плюративных* суждений (judicia plurativa), подразумевающих, что «в данном воззрении содержится многое однородное». В примечании к этому месту Кант говорит: «когда я отправляюсь от единства (в отдельных суждениях) и перехожу ко всеобщности, то я еще не могу примешивать никакого отношения к

Индивид относится к своему общему понятию как к *своему закону*, причем, вообще говоря, двояко: подчиняясь своему закону и полагая свой закон. В обществе (социуме) между законом и индивидом всегда остаются пространства подготовки закона, принятия закона, толкования закона, применения закона, исполнения и нарушения закона. Поэтому в отношении всякого индивида в обществе всегда стоит вопрос: каковы его (ее) отношения с законом? В математике ничего этого нет. Математический индивид «идеально законопослушен», это идеальный гражданин платоновского государства. Можно вообразить сколько угодно индивидуальных треугольников, *ничем* не отличающихся друг от друга. Все эти треугольники в точности соответствуют своему общему понятию. Нет никакой разницы между тем, каким каждый треугольник должен быть и тем, какой он в действительности есть: ведь мы говорим не о более и менее удачных чертежах, а о «самих» математических треугольниках. Такое *непосредственное* соответствие закону, непосредственная связь общего и индивидуального делает проблематичным само различие между ними, проблематизирует само отношение «закон-индивид» (а не какой-то частный казус этого отношения, как это случается в обществе). Имеет ли смысл говорить об индивидуальном треугольнике и его общем понятии, когда это понятие никак не может быть дано без построения индивидуального треугольника, а индивидуальный треугольник, конечно, не может быть построен без своего общего понятия? Чтобы ответить на этот вопрос,

---

всеобщности; я мыслю только множественность *без* всеобщности, а не исключение из последней». Делез в [5] называет эту «множественность без вернемся к анализу теоремы и проследим дальнейшую судьбу индивида в теореме.

Экспозиция отличается от ограничения тем, что в экспозиции индивидуируется условие предложения (утверждения) теоремы, а в определении задачи индивидуируется вывод. Другими словами, логическая дистинкция по схеме гипотетического суждения «если ... , то ...» здесь проводится не для общих понятий, а для выделяемых тут же индивидов. Для этого есть основания. Как легко заметить, выделение индивидов при экспозиции отличается от выделения индивидов при ограничении условиями именованиями. При экспозиции имя выделяемому индивиду дается произвольно, при определении задачи имена конструируются из имен, введенных при экспозиции. Поэтому можно сказать, что и индивиды, выделяемые при определении задачи являются вторичными индивидами, а именно элементами индивидов, выделяемых при экспозиции. Первичные индивиды кроме экспозиции выделяются только при построении, когда именование вновь оказывается произвольным. Поэтому различение экспозиции и определения задачи оказывается богаче различения условия и заключения гипотетического суждения.

Двигаясь от предложения через экспозицию к определению задачи, мы переходим от общих понятий к индивидам. Но заключение теоремы вновь выражено общими понятиями. Значит должно существовать и обратное движение - от индивидов к общим понятиям. Нетрудно видеть, что такое обратное движение осуществляется при доказательстве. Здесь нужно

всеобщности» математическим термином «многообразие».

выделить два момента, один из которых относится непосредственно к доказательству, а другой к переходу от доказательства к заключению. В самом доказательстве переход от индивидов к общим понятиям происходит по правилу совершенного силлогизма - индивиды подводятся под общие понятия, составляющие предложения (заключения) ранее доказанных теорем и аксиомы. Например, обнаруживая равенство соответствующих элементов треугольников AFC и AHB в теореме 1.5, мы применяем теорему 1.4 и заключаем о равенстве самих этих треугольников. Этот шаг аналогичен экспозиции в том отношении, что здесь от общих формулировок переходят к утверждениям об индивидах, однако при доказательстве, в отличие от экспозиции, индивиды уже поименованы заранее, и задача состоит в том, чтобы применить к ним некоторые *новые* общие понятия. Следующий, заключительный шаг должен состоять в том, чтобы вообще вывести из игры индивиды и получить в качестве заключения теоремы новую связь общих понятий - с одной стороны, понятий, относящихся к условию доказываемой теоремы, и, с другой стороны, понятий, относящихся к аксиомам и ранее доказанным теоремам. Таким образом получается то, что называется дедуктивной цепочкой: из одних общих утверждений выводятся другие. Но на каком основании можно сделать этот последний шаг, каким образом, то, что доказано про индивидуальный треугольник ABC, оказывается доказанным для любого треугольника соответствующего вида вообще?

На первый взгляд здесь делается логически недопустимое - переход от индивидуального суждения к общему. На это формально легко ответить, что правилам силлогистики подчиняется только *доказательство*, тогда как в данном случае речь идет о заключении (точнее, о переходе от доказательства к заключению)[3]. Но это, конечно, не будет ответом по существу. Ответ по существу состоит в том, что силлогистика вообще неприменима к заключениям указанного типа. Не всякое истинное утверждение о *Сократе* останется истинным, если в нем заменить Сократа общим понятием *человека*, например, Сократ может быть курнос, а человек вообще нет. Однако всякое утверждение о равнобедренном треугольнике АВС верно для равнобедренного треугольника вообще, поскольку мы предположили, что АВС - это *произвольный* равнобедренный треугольник. Согласно закона исключенного третьего, на вопрос «курнос ли Сократ (в такое-то время и в таком-то месте)?» необходимо ответить «да» или «нет». Сократ или курнос, или нет, третьего не дано. В то же время на вопрос «является ли равнобедренный треугольник АВС прямоугольным?» мы вправе ответить: «АВС *может* быть и может не быть прямоугольным». Таким образом, общее понятие «равнобедренный треугольник» и индивид «АВС» оказываются взаимозаменимыми.

Соотношение общего и индивидуального, формально сохраняемое в

---

[3] Аристотель в [6] различает два понятия - **доказывать** (αποδεικνυμι) и **показывать** (δεικνυμι). Первое является производным от второго и может рассматриваться как частный случай второго. Силлогистика относится только к **доказательству**, но не ко всякому **показыванию**. Теорема в целом представляет собой некоторое показывание, а доказательство является только одним из элементов теоремы. Евклид пишет в конце теоремы «что и требовалось показать» (οπερ εδει δειξαι), а не «что и требовалось доказать», как это стали читать в латинском переводе (quod erat demonsrandum).

геометрии, совсем стирается в арифметике. Число 5, это индивид или общее понятие? Чем отличается общее понятие числа 5 от индивидуальных пятерок? Если в геометрии индивиды отличаются от общих понятий хотя бы наличием собственного имени, то в арифметике никакого различия между ними нет. Трудно заставить себя думать, что выписывая натуральные числа:

1, 2, 3, 4, 5,...

мы имеем дело с одними объектами (общими), а выписывая квадраты натуральных чисел:

1•1, 2•2, 3•3, 4•4, 5•5,...

- с другими (индивидуальными). Или что, если один раз написать 5+5, а другой 5•2 мы тоже будем имеем дело с разными пятерками. Логика общего и индивидуального здесь просто перестает работать. Пятерка оказывается одновременно индивидом без имени, то есть простой единичностью, и единым универсальным «неписанным законом», поскольку у пяти нет никакого общего определения. Оказывается, что логика общего и индивидуального нарушается не из-за неточности, а наоборот, из-за совершенной точности понятий: в обществе, где понятие in concreto отличается от того же понятия in abstracto, эта логика работает, а в арифметике, где конкретное и абстрактное число совпадают - нет.

Когда мы переходим от повтора геометрических точек (A,B,C,....) к повтору единиц (1, 1, 1 ...), мы перестаем различать повторяющиеся индивиды по именам. И в случае повторяющейся единицы мы уже не можем наверняка сказать, когда мы имеем дело с разными единицами, а когда с одной и той же. Индивид здесь исчезает, но не исчезает повтор. Говоря словами Делеза [5], повтор интериоризируется, становится внутренним. Повтор перестает быть повтором того же самого и становится повтором повтора. Повтор перестает быть экстенсивным, разворачивающим серию повторяемых тождеств вовне и становится интенсивным, сосредотачивающим единичность. Экстенсивный повтор того же самого предполагает общее понятие как «общее место» и подставляемые в него, замещающие друг друга индивиды. Например, повторяя точку, мы предполагаем общее понятие точки как общее место и подставляем в него индивидуальные точки A, B ... . Сосредотачивающаяся в интенсивном повторе единичность, например, всякое число, напротив, уникальна и незаменима. Одну пятерку нельзя заменить на другую не потому, что пятерка единственна и «другой» пятерки нет, но потому, что нет такого общего места, где одна пятерка могла бы встать «вместо» другой.

Итак, цикл теоремы - повтор общего утверждения теоремы в предложении и заключении - внутри теоремы проходит через индивиды. Говоря об общем и индивидуальном выше мы имели в виду только математические объекты, например, общее понятие треугольника и индивидуальный треугольник

ABC. Однако то же самое остается в силе и для мыслящего математического субъекта. Действительно, утверждение теоремы (предложение и заключение) принадлежит общему субъекту науки, научному сообществу в целом. *Всем известно*, что углы при основании равнобедренного треугольника равны. Это общее знание. С другой стороны, каждый, кто занимался математикой знает, что доказывать теорему нужно самостоятельно, только своим индивидуальным усилием понимания- даже в том случае, когда речь идет всего лишь о воспроизведении доказательства из учебника, а не о получении нового математического результата. Чтобы сдать экзамен по математике, необходимо проводить доказательства «самостоятельно»: механического воспроизведения текста учебника недостаточно. В чем состоит критерий такой самостоятельности? Поскольку речь идет не о большей или меньшей оригинальности новых математических результатов, а о простой учебной ситуации, на этот вопрос оказывается несложно ответить. Так же как и в случае с математическими объектами, критерием индивидуальности субъектов оказываются собственные имена. Учитель считает, что ученик проводит математическое доказательство самостоятельно, если он пользуется собственными обозначениями, самостоятельно дает имена рассматриваемым объектам. Вообще говоря, можно представить себе ученика, который, механически заучив доказательство из учебника и ничего в нем не поняв, затем выбирает произвольные обозначения и так же механически, без всякого понимания проводит подстановку, например, там где в учебнике написано А, он подставляет М, и так далее. Такую ситуацию несложно смоделировать на компьютере. Однако оказывается, что в отличие от компьютера человеку обычно бывает очень трудно и даже невозможно действовать таким образом, а гораздо проще бывает «понять смысл» теоремы так, чтобы рассуждать, не пользуясь подстановками. Разумеется, только если «понят смысл» цель обучения геометрии может считаться достигнутой. И тем не менее, можно сказать, что, критерием самостоятельного индивидуального понимания теоремы, то есть понимания в собственном смысле слова, является способность индивида подставлять произвольные имена в фиксированную общую схему. Как и в случае с математическими объектами, это следует понимать так, что индивидуальный субъект появляется вместе с этой способностью, а не предшествует ей.

Обозначения, которые делает всякий ученик или учитель, воспроизводящий доказательство теоремы, дают образец для научной конвенции (условности) вообще. Обозначение это минимальная конвенция, минимальный произвольный акт теоретизирующего субъекта. Теоретизируя, субъект также делает произвольные предположения, дает произвольные определения. Это характеризует более высокий уровень теоретизирования - уже уровень ученого, а не ученика. Однако суть дела остается той же - произвол в рамках общего правила (закона). В случае предположений и определений общим правилом может оставаться, как у Гильберта [7], только непротиворечивость. Двойной характер индивида -

как подчиняющегося закону и полагающего закон - становится здесь очевидным. Минимальное правило, полагаемое именованием, состоит в том, что именованный объект сохраняет свое имя на протяжении всего рассуждения, и что это имя на протяжении этого рассуждения не используется для обозначения других объектов. Это правило подчиняется общей схеме рассуждения, свойственной данной теореме, которое воспроизводится данным индивидом. В свою очередь, общая схема данной теоремы подчинена аксиоматике той теории, в которой она доказывается, например, теорема 1.5 «Начал» подчинена соответствующим аксиомам, постулатам и определениям. Наконец, можно говорить о том, что данный набор аксиом является только одним из ряда логически возможных, в частности, что кроме евклидовой возможны различные неевклидовы геометрии. Впрочем, на этом уровне ясность теряется и представление о всеобщей логике как о законе высшего порядка, который сам уже не подчиняется никакому более высокому закону, оказывается проблематичным.

Если теперь снова сравнить соотношение индивида и закона в математике и обществе, мы снова увидим, что математическая точность и строгость парадоксальным образом проблематизирует соотношение индивида и закона, тогда как в обществе всякий раз проблематично применение этих понятий, но не сами понятия как таковые. Говоря: «пусть треугольник называется ABC», или: «будем называть треугольником то-то и то-то», я договариваюсь со своими слушателями, заключаю с ними договор, конвенцию. Аналогичным образом, в обществе два индивида могут заключить некоторый договор, например, договор купли-продажи. В обоих случаях законность договора обеспечивается законом более высокого уровня: конвенция, чтобы стать правилом, сама должна быть заключена по некоторым правилам. Между этими двумя ситуациями есть, однако, существенное различие. Чтобы заключить договор купли-продажи, необходимо согласие обеих сторон, совпадение их намерений. Согласование интересов договаривающихся сторон составляет главную проблему любого общественного договора, поэтому любой общественный договор является результатом борьбы сторон и взаимных компромиссов. Ничего этого нет в математике. Теоретизирующий индивид волен делать любые предположения, согласующиеся с правилами (давать обозначения и определения, выставлять постулаты и аксиомы), не спрашивая разрешения собеседников и не ища их поддержки. Правила таковы, что всякий собеседник обязан согласиться с тем, что предлагает всякий индивид, лишь бы это предположение соответствовало правилу, согласно которому вообще делаются предположения. Математика запрещает на заявление «пусть треугольник называется ABC» возразить: «пусть треугольник лучше называется DEF». Впрочем, в случае собственных имен, различие между математикой и обществом минимально: собственное имя ребенку дает если и не один человек, то все же ограниченный круг людей. В случае определений терминов различие более значительное: мы не можем в обществе употреблять слова в том смысле, в каком нам нравится, мы вынуждены говорить на языке других, если хотим быть понятыми; в математике же мы вправе давать определения произвольно, а сообщество обязано немедленно с ними согласиться, если они только не противоречивы и «имеют смысл». На заявление «будем называть треугольником то-то и то-то» в рамках математического рассуждения нельзя возразить: «нет, давайте будем называть треугольником другое» или «нет, давайте это называть не треугольником, а как-нибудь иначе». Разумеется, и в математике некоторые обозначения и определения являются привычными, а другие непривычными, некоторые удачными, а другие неудачными, однако, это, строго говоря, не имеет отношения к математической теории. Идея конвенции в математике не предполагает никакого согласования, но требует только, с одной стороны, произвола, а с другой стороны, следования правилу. В обществе произвол и следование правилу (закону) противопоставлены и медиированы частной конвенцией: всякий индивид способен на произвольные действия, общий закон ограничивает произвольные действия индивидов, в результате согласования произвольных действий индивидов в рамках общего закона между индивидами заключаются частные конвенции (договора). В математике общий закон, индивидуальный произвол и конвенция совпадают, остается только иерархия законов (произволов-конвенций). Достаточно произвольным образом предположить, что любые две точки можно соединить отрезком, чтобы это стало общим правилом. Можно возразить, что это не произвольное предположение, но что оно в известном смысле непосредственно истинно, поскольку мы умеем пользоваться линейкой. Однако, если это утверждение останется только «непосредственно истинным» и не будет одновременно произвольным предположением, оно не будет иметь отношения к математике. Можно также возразить, что не всякое произвольное предположение в математике имеет шансы на успех, не всякое определение и не всякий постулат являются эффективными и ведут к построению богатых и интересных теорий. Однако те из них, которые оказались удачными, не перестают при этом быть произвольными. В этой произвольности есть, конечно, элемент розыгрыша - предположения принимаются *как будто* случайно, а получаемые результаты как будто оказываются неожиданными, тогда как, на самом деле, предположения делались уже с прицелом на результат. Однако в теории демонстрация истинных намерений есть свидетельство слабости, неокончательности результата. Евклид дает свои аксиомы и постулаты в самом начале своей книги, когда еще совершенно неясно зачем они могут понадобиться. Говоря словами Аристотеля, они «первые» только «по природе», а не «для нас». Для нас они вполне произвольны.

Совпадение закона, конвенции и произвола снова, как и в случае математических объектов, проблематизирует для всякого математического субъекта соотношение общего и индивидуального. Когда индивидуальный произвол оказывается частной конвенцией и всеобщим законом, становится неясным где же здесь общее, где частное и где индивидуальное. Таким образом, проблема соотношения общего, частного и индивидуального в теореме, оказывается проблемой общей, частной и индивидуальной идентификации самого математика.

Выше мы говорили об идентичности математического объекта и теоретизирующего субъекта. Однако, своей идентичностью обладает и сама теорема. Какого рода идентичность, мы имеем в виду, когда говорим о воспроизведении в учебной ситуации «той же» теоремы различными индивидами. Очевидно, об идентичности общей схемы. Очевидно, теорема останется «той же» именно в качестве общей схемы рассуждения, если в ней только поменять обозначения. Однако, о «той же» теореме говорят и в более широком смысле, а именно, говорят о «той же» теореме, выраженной на разных математических языках, например, на языках синтетической и аналитической геометрии. Однако в этом случае не всегда легко четко отличить «новый результат» от старого результата, переведенного на новый язык. Более того, оказывается, что именно пересказывание старых результатов на новый лад может быть подлинной революцией в математике (как, например, это было с эрлангенской программой в геометрии), тогда как получение совершенно нового результата в какой-нибудь специальной области может оставаться малозначительным математическим событием. По-видимому, мы здесь снова сталкиваемся с ситуацией «внутреннего повтора», когда есть повтор, но нет повторяемого тождества. Найти новые основания для математики в целом, радикально обновить математику, значит повторить всю математику заново. Такой повтор, оказывается творческим и революционным. Всякий новый результат, который развивает известное ранее, является эволюционным шагом в науке, всякий революционный шаг в развитии науки это повторение старого «на новый лад»[4]. Разумеется, воспроизведение теоремы из учебника с собственными обозначениями нельзя назвать математическим творчеством - поскольку здесь, очевидно, повторяется «та же» теорема. Однако, в отношении самой ситуации повтора такое воспроизведение оказывается ближе настоящему математическому творчеству, чем самостоятельное решение учеником какой-нибудь математической головоломки.

Различие между общим и индивидуальным, проблематизированное уже при экспозиции и в доказательстве, окончательно стирается в центральном элементе теоремы - построении. В построении мы имеем дело уже не с фигурами, а с *кон*фигурацией. Конфигурация это не индивид и не общее понятие, а сложная смесь, сплетение индивидов, где уже непонятно где кончается один индивид и начинается другой. И, заметим, это происходит не из-за стирания границ, а потому, что границ оказывается слишком много: одни и те же границы начинают относиться к разным индивидам, одни индивиды становятся частями других. Такая «потеря себя» всякой индивидуальной и общей фигурой служит только тому, чтобы эта фигура обрела себя вновь, причем, на этот раз в своей полноте, а именно, чтобы обнаружились ранее скрытые ее собственные свойства, например, свойство равнобедренного треугольника иметь равные углы при основании. Таким образом, теория это не просто открытие того, что было скрытым, не

[4] Ср. буквальное значение слова «революция» (лат. revolutio) - круговорот.

просто узрение ранее невидимого, не добавление известного к неизвестному, а рискованное переопределение, потеря и обретение себя вновь. Построение не является восполнением *формы* исходной фигуры: очевидно, что исходный равнобедренный треугольник ABC на рис.1, является более «законченной формой», чем полученная в результате построения сложная конфигурация DFBACHE, представляющая собой сложную смесь треугольников FAC, HBA, FBC и HBC, в которой ABC растворяется без остатка. Чтобы теорема о равнобедренном треугольнике была доказана, недостаточно просто отбросить ширму, скрывающую истинное положение дел - должно что-то произойти с самим треугольником. Значит, теорема по меньшей мере не просто открывает, а раскрывает свойства треугольника, разворачивает то, что изначально свернуто, латентно. Но и такая интерпретация обнаружит свою недостаточность, если принять во внимание, что событие открытия (или раскрытия) свойств треугольника не просто затрагивает треугольник, но затрагивает его радикально, разлагая и собирая его вновь. Поэтому нужно усилить последнюю интерпретацию и сравнить теорему не только с прорастанием семени, а с полным растительным циклом, в котором прежде чем семя прорастет и принесет новый плод, должен созреть и разложиться старый плод, несущий в себе это семя.

В этом отношении теорема отличается от *проблемы*, то есть того, что сегодня обычно называют «задачей на построение», когда на основе «данной» фигуры или конфигурации требуется построить новую (см., например, предложение 1.1 «Начал», где на данном отрезке требуется построить равносторонний треугольник). Структура проблемы практически не отличается от рассматриваемой структуры теоремы (сам Прокл иллюстрирует эту структуру на предложении 1.1 «Начал»). Единственная разница состоит в том, что в случае проблемы *заключение* уже не является буквальным повтором *предложения*. Они отличаются: (1) по модальности, поскольку в предложении проблемы *требуется* нечто построить, а в заключении *констатируется*, что требуемое построение произведено (и доказано, что проведенное построение действительно дает требуемое) и (2) по признаку абстрактности/конкретности, поскольку в предложении проблемы требуется построить *некоторую* фигуру или конфигурацию нужного вида - и в этом отношении предложение проблемы аналогично общему предложению теоремы - тогда как в заключении проблемы (в отличие от заключения теоремы) констатируется факт построения конкретного индивида, например, треугольника ABC. Таким образом, проблема, или, говоря более современным языком, *решение* проблемы состоит в том, что в построении *данная* фигура или конфигурация разворачивается (разрешается) в новую, иную фигуру или конфигурацию, а не возвращается к себе как в теореме. Формально структура проблемы остается разомкнутой и в том отношении, что заключение проблемы остается на уровне индивидуального и не переходит обратно к общему, как в случае теоремы. То, что выше было сказано по поводу математического открытия и воспроизведения «одной и той же» теоремы, по-видимому, применимо и к воспроизведению одной и той же фигуры внутри теоремы - от предложения к заключению. Хотя проблемы, на первый взгляд, дают больше нового, чем теоремы - поскольку в проблемах строятся новые фигуры, а в теоремах только выясняются новые свойства уже известных фигур - новизна открываемого в теоремах *радикальнее* именно потому, что здесь новое не добавляется к старому, а, скорее, переобосновывает старое. Хотя можно сказать, что доказав равенство углов при основании равнобедренного треугольника мы только добавили новый теоретический факт к тому, что уже было известно о равнобедренном треугольнике ранее, на самом деле, целью теории вовсе не является накопление фактов. Доказав обратную теорему («Начала» 1.6), мы уже можем *переопределить* равнобедренный треугольник, как *треугольник, имеющий два равных угла*; мы уже знаем, что эти два определения эквивалентны. Впрочем, и в проблемах геометрические объекты, как мы уже говорили, не рождаются на пустом месте. Они актуализируются, а, значит, тоже повторяются. Действительно, когда в предложении проблемы требуется построить некоторый объект, например, равносторонний треугольник, он должен быть заранее определен. В противном случае требование, заключенное в предложении проблемы, было бы бессмысленным или неопределенным. Проблему отличает от теоремы то, что в случае проблемы повтор устроен так, что объект имеет разный статус «до» и «после» повтора: до построения объект задан как возможный, а после построения как действительный. Это позволяет вообще избегать понятие повтора и представлять ситуацию в эволюционных терминах, как если бы один тот же объект находился в разных последовательных *состояниях* - сначала в возможном, а затем в действительном. В случае теоремы повтор становится неизбежным. Из этого, однако, не следует, как это полагает Прокл, что только в проблемах построение играет решающую роль, а в теоремах главную роль играют доказательства. Аристотель говорит:

> Фигуры также раскрываются действием (ενεργεια), их раскрывают рассекая. Если бы уже рассекли, фигуры были бы ясными, однако пока [не рассекли] это остается в возможности. Почему сумма углов треугольника равна двум прямым? Потому что углы вокруг одной точки [вместе] равны двум прямым. Если вдоль стороны проведена линия, это сразу ясно видно.
>
> (Ευρισκεται δε και τα διαγραμματα ενεργεια, διαιρουντεσ γαρ ευρισκουσιν ει δ ην διηρημενα, φανερα αν ην ν̄υν δэ ενυπαρχει δυναμει. δια τι δυο ορθαι το τριγον ον; οτι αι περι μιαν στιγμην γωνιαι ισαι δυο ορθαισ. ει ουν ανηκτο η παρα την πλευραν, ιδοντι αν ην ευθυσ δηλον δια τι. (Met. 1051a) [8]. Глагол διαιρεω здесь указывает просто на проведение линий, но одновременно он имеет значение всякого "разбора" и "деления", в том числе – у Аристотеля – логического деления рода на виды.)

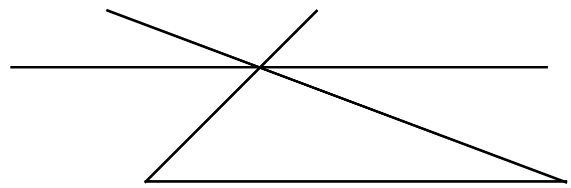


Рис.6

Действительно, именно в построении происходит переопределение фигуры, ее возвращение в себя. В доказательстве и последующем заключении только фиксируются результаты того, что уже произошло в построении.

Однако метафора растительного цикла - созревание, разложение плода, прорастание семени и новое созревание - также оказывается недостаточной, поскольку переопределение фигуры в теореме не сводится к ее разложению на базисные элементы и последующей обратной сборке, то есть только к анализу и синтезу. Конфигурация DFBACHE на рис. 1 состоит не только из элементов треугольника ABC. При доказательстве теоремы нам приходится рассматривать не только элементы треугольника ABC, но и другие, так называемые «вспомогательные» фигуры (треугольники FAC, HBA, FBC и HBC). Таким образом, треугольник ABC заново обретает себя не только из своих же собственных элементов, но из взаимодействий с другими фигурами, из конфигурации, чреватой множеством возможных фигур, актуализируемых в определенном порядке по ходу доказательства. Если продолжать использовать биологические метафоры, то лучшей оказывается метафора полового размножения животных, при котором индивид, чтобы обрести себя в своем потомстве должен вступить в отношения с другим индивидом. Впрочем, поскольку в теореме речь идет ближайшим образом не о переопределении, а только об «установлении свойств» данных объектов и поскольку построение берется в статусе «вспомогательного», в половом размножении этому соответствует ситуация доминирования одного из родителей, когда этот родитель использует другого в качестве средства для своего воспроизведения. Если теперь попытаться найти в геометрии соответствие равноправной ситуации, в котором *оба* родителя воспроизводят себя в потомстве, то этому будет соответствовать переопределение не каждой отдельной фигуры, а всей геометрии в целом. Это будет, конечно, творчеством новых понятий, но не путем последовательной актуализации возможного как это делается в обычных проблемах, а путем переопределения *системы* старых понятий в систему новых, то есть путем радикального повтора всей теории.

Более точным для теоремы, однако, оказывается сравнение с обществом (которое мы уже использовали выше, говоря об индивиде и законе), где самоопределение индивида также осуществляется через общение с другими индивидами и общественную ситуацию в целом. Речь в данном случае не идет просто о том, что все определения - и в геометрии, и в обществе - соотносительны друг с другом. Понятно, что определяя треугольник, мы соотносим его с другими фигурами, а определяя, например, права и обязанности наемного работника в трудовом законодательстве, мы соотносим их с правами и обязанностями работодателя. Речь идет о том, что так же как в обществе индивид общественно самоопределяется своими поступками по отношению к другим индивидам, математический индивид самоопределяется в событии построения. Как и общественный поступок, построение в теореме имеет характер перешагивания через себя, трансценденции. Это так же верно для теоретизирующих субъектов, как и для объектов теории. Утверждение (предложение и заключение) теоремы, как мы уже сказали, принадлежит сообществу в целом как всеобщее знание, именование объектов теории (экспозиция) и доказательство утверждения для именованных объектов принадлежат индивидуальному субъекту как индивидуальное (собственное) знание. Построению же в теореме соответствует, собственно, интерсубъективное *понимание,* которое является эффектом коммуникации между индивидами, перешагиванием каждым индивидуальным субъектом собственных границ во взаимном общении. Когда Платон [9] говорит о понимании как припоминании того, что душа видела до рождения, это означает, что понять - значит не просто добавить новое знание к уже имеющемуся, но повторить собственное рождение, переделать собственную идентичность, перешагнуть через себя, переродиться. Аристотель (см. цитированный отрывок) хорошо знает то, что историки математики часто считают прерогативой древних индусов: достаточно посмотреть на нужный чертеж, чтобы теорема стала понятной. Правила силлогистики, соотносящие общее, частное и индивидуальное в суждениях останутся без применения, если не будет предварительного интерсубъективного понимания.

Итак, в средоточии теоремы, за кругом общих понятий и за кругом индивидов, лежит событие построения, которое является своим для всякого индивида:

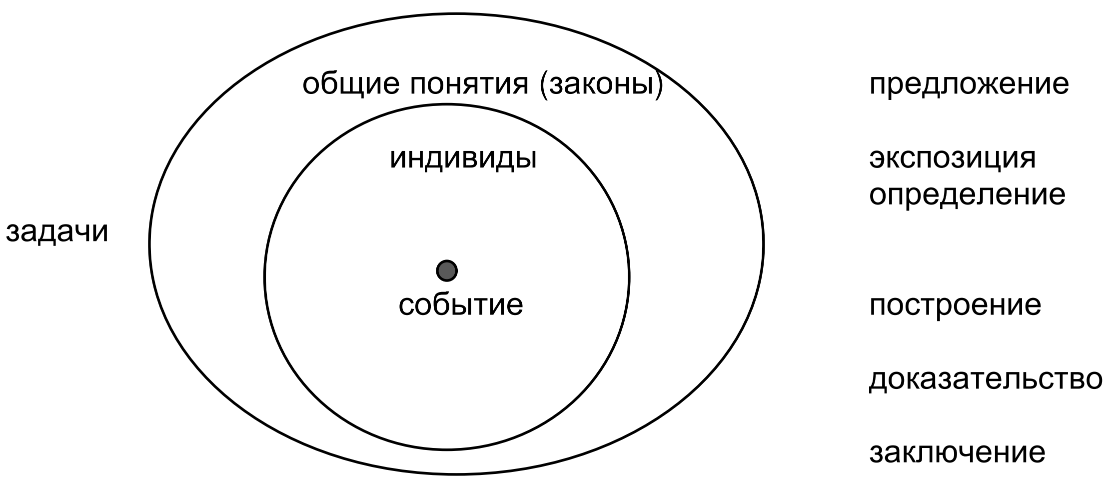


Рис.7

Если соотнести общее, индивидуальное и событийное в теореме, то видно, что общее утверждение теоремы повторяется механически (как то же самое) в предложении и заключении, индивидуальные математические объекты и индивидуальные математизирующие субъекты воспроизводятся, добавляя себе через доказательства новые свойства (знания о новых свойствах) к уже имеющимся, тогда как событие построения-понимания оказывается «неподвижным двигателем» теоремы, связывающим ее воедино. Эту неподвижность события нужно отличить от неподвижности общего закона. Общее утверждение теоремы как всякий общий закон тоже остается в некотором смысле неподвижным - в любое время, в любом месте и для любого человека углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой. Неподвижность общего осуществляется всегда через повтор тождества - утверждение теоремы истинно всегда и везде в том именно смысле, что оно остается тем же самым независимо от того, кто, где, когда и при каких обстоятельствах его воспроизводит. Даже если предположить, что общий закон существует некоторым образом независимо от своих воспроизведений (часто такое мнение приписывают Платону), это не будет иметь никакого значения, поскольку закон проявляет себя, работает, приобретает значение только в индивидуальных случаях. Поскольку, таким образом, понятие общего закона предполагает его повторение отдельно для каждого индивида, закон, строго говоря, не остается неподвижным, а «вращается», движется по кругу, воспроизводит одно и то же. Закон подобен метроному или маятнику в часах, отсчитывающему всегда одни и те же временные интервалы: никто не назовет ни метроном, ни маятник неподвижным, даже если они отсчитывают всегда одни и те же интервалы. Заметим, что говоря о неподвижности события построения-понимания мы вовсе не имели в виду, что это событие в каком-то смысле «остается всегда тем же». Мы только констатировали, что в структуре теоремы общий закон механически повторяется, индивиды меняют там свои свойства (добавляют к старым новые), а событие там просто *одно* - оно не повторяется и не меняется как *то же*.

Конечно, то, что событие построения-понимания остается неподвижным на уровне структуры теоремы еще недостаточно, чтобы говорить о неподвижности события в более сильном смысле. Ведь структура сама является общим законом - законом, по которому строятся теоремы. Поэтому структура предполагает, что теоремы сами воспроизводятся. Значит ли это, что вместе со всякой теоремой воспроизводится и ее событие построения-понимания? Обычно о воспроизведении построения говорят, пользуясь понятием *метода*, которое не играло большой роли в античной математике и философии, но зато приобрело фундаментальное значение в новое время. Содержание построения в теореме 1.5 «Начал» легко интерпретировать таким образом, что здесь имеется, во-первых, *общий метод* того, как надо действовать и, во-вторых, индивидуальное действие по этому методу со своими собственными обозначениями. Легко видеть, что таким образом в рамках одного только построения воспроизводится вся структура отношений между общим и индивидуальным, присущая теореме в целом. В этом отношении кажется не таким уж важным, что делать предметом математики - или общие понятия чисел и фигур с их индивидуальными воплощениями, как это делали античные математики, или общие методы (алгоритмы) с их индивидуальными реализациями, как это делали математики нового времени и во многом продолжают делать современные математики. В том, чтобы видеть в геометрическом построении общий метод и его индивидуальную реализацию, не только нет ошибки, но это даже совершенно необходимо, если мы хотим анализировать теорему более глубоко, чем нам это позволяет античная структуризация теоремы. Но значит ли это, что событие построения-понимания теоремы может быть сведено к соотношениям общего (метода) и индивидуального (действия)? Очевидно, что нет, поскольку помимо того, что индивид, следуя общему методу, действует правильным образом, эти действия должны возыметь должный эффект, на каждом шаге действия по алгоритму должно *происходить* то, что требуется, а не что-то другое. Можно как будто возразить, что действие по методу или алгоритму, в отличие, например, от действия по привычке есть именно такой способ действовать, при котором успех заведомо гарантирован. Однако это как раз не является возражением. Ведь мы не называем событием то, что присуще индивидуальному действию - его индивидуальный успех или неуспех. Как раз то обстоятельство, что при условии действия по методу успех гарантирован, заставляет говорить о неподвижном событии построения-понимания, как о том, что гарантирует этот успех. Ведь успех метода построения и последующего доказательства теоремы гарантирован вовсе не в том отношении, что всякий без труда может проделать все необходимые выкладки и получить нужный результат. Никакая математическая ошибка ничего не говорит о применимости или неприменимости метода. Успех метода гарантирован в том же отношении, в каком гарантирована истинность общего утверждения теоремы. Как и общее утверждение метод повторяется как тот же самый во всех своих индивидуальных реализациях. Сила метода это сила закона. И как всякий закон метод сам обосновывается и подтверждается в каждом индивидуальном действии по этому методу. Однако, как и в случае с общим утверждением, для того чтобы метод имел эффект, необходимо не только пройти весь путь от первого до последнего шага, но и вернуться назад, убедиться, что построено то, что должно быть построено. А для этого, как мы уже подробно показывали выше, нужна не просто деятельность индивида, но его столкновение с другими индивидами, его переопределение, перерождение, смерть и новое рождение. Таким образом, все сказанное о событии построения-понимания применительно к структуре отдельной теоремы оказывается верным в целом.

Итак, событие построения-понимания не остается всегда тем же самым как общий закон и не меняется как индивид. Как тогда охарактеризовать его временной статус? Делез, как мы уже говорили, использует для этого понятие «сосредоточенного повтора», как если бы событие всегда повторяло свой собственный повтор, оказываясь всякий раз радикально новым. С другой стороны, этот статус можно охарактеризовать как неподвижность (в отличие от линейного движения изменения и циклического вращения тождества). Тогда соотношение событийного, индивидуального и общего в теореме можно также описать с помощью триады «остановка (μονη) - выход (προοδοσ), - возврат (επιστροφη)», которую Прокл использует в ряде других случаев для разъяснения текста Евклида. Когда Прокл применяет эту схему к определению круга, получается следующая картинка:

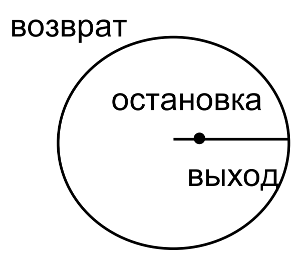


Рис.8

Движению по кругу здесь соответствует повтор одного и того же общего закона в предложении и заключении теоремы, движению по радиусу от периферии к центру и обратно - изменение (рост) индивидов от экспозиции к завершению доказательства, то есть приобретение ими новых свойств и знаний о них, а остановке в центре круга - неподвижное событие рождения, смерти и перерождения индивидов. Ближайшим для всякого мыслящего индивида в этой тройке является именно индивидуальный аспект. Собственный индивидуальный рост проблематичен; событие в индивидуальном аспекте это «выход из себя» (ср. греч. προβαλλω). (В этом смысле можно сказать вместе с Проклом, что проблема предшествует теореме.) Общее как движение по кругу тождественного, с другой стороны, отличает теорию. Получается, что не только геометрические фигуры, но и сама теория строится «циркулем и линейкой» - линейным трансцендирующим ростом индивида и круговым движением закона. Этот рисунок мысли, очевидно, необходимо имеет место там, где связка «общее - индивидуальное» остается решающей, в частности, в области права. С другой стороны, там, где логика общего и индивидуального перестает работать (например, в арифметике), мыслить только «циркулем и линейкой» становится невозможно. С древности известны задачи, легко формулируемые, но не разрешимые в рамках геометрии циркуля и линейки: это, например, задача о разделении данного угла на три равные части (трисекция угла). Поэтому геометрия циркуля и линейки является хотя и принципиально важным, но все же частным разделом математики. Это наводит на мысль о том, что помимо математических существуют и политические задачи, которые могут быть поставлены, но не могут быть решены в рамках категорий общего и индивидуального т.е. «циркулем и линейкой». К ним, по-видимому, относятся многочисленные проблемы, касающиеся различных *групп* людей - этнических, экономических, социальных и культурных. Кажется заманчивым свести все такие проблемы к проблемам индивидов и законов. Однако это скорее всего невозможно. Законность и индивидуальность, круг и прямая линия могут нравиться или не нравиться, но дело состоит не в общих, индивидуальных или групповых пристрастиях, а в адекватности событиям. Впрочем, вопрос о том, существуют ли в принципе альтернативы «циркулю и линейке» в мышлении, остается открытым. С одной стороны, можно указать на тот факт, что математика в новое время разработала множество методов, не сводимых к античному методу циркуля и линейки. В этом отношении новая математика, как будто, нашла такие альтернативы. С другой стороны, можно говорить о том, что новая математика по сравнению с античной просто предпочла линейку циркулю, поскольку само понятие общего метода - фундаментальное понятие математики нового времени - это уже не «круговой», а «линейный» закон, закон движения, разлагающий всякое движение на бесконечно малые прямолинейные движения. Конечно, при ближайшем рассмотрении мы и в структуре метода обнаруживаем круг, поскольку как и всякий общий закон, метод воспроизводится в своих индивидуальных реализациях, однако этот круг остается скрытым, поскольку метод заранее ориентирован на линейное движение индивидов.

В этом отношении можно сказать, что новое время только акцентировало один из моментов античной теории и, таким образом, наоборот, сузило границы теоретического мышления. Скорее всего, однако, что мы еще просто по-настоящему не поняли революционных идей новой математики и по инерции мышления перекраиваем их всякий раз на евклидовский лад. Чтобы сделать действительно новый шаг нашем в мышлении, нужно, очевидно, вернуться уже не к Евклиду и Проклу, а дальше - к истокам самой математики.

Литература:

1.Proclus de Licee Les Commentaires sur .... Euclide Bruges 1948

2.Евклид Начала т.1 (Книги 1-6) М.1950

3.Кант Критика чистого разума // Соб. соч. в 8-ми т. т.3 М.1994

4.Кант Критика способности суждения// Соб. соч. в 8-ми т. т.5 М.1994

5.Deleuze Differance et Repetition Paris 1993

6.Aristotelis Analytica Priora et Posteriora Oxford 1964

7.Гильберт Основания геометрии М. 1948

8.Aristotle The Methaphysics London 1975 (Loeb Classical Library)

9.Платон Менон // Соч. в 3-х т. т.1 М.1968