Вторая книга «Начал» Евклида и «геометрическая алгебра древних» [1]

А. В. Родин

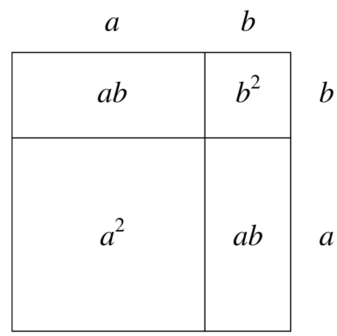
«Геометрическая алгебра» состоит, как известно, в следующем:[2]

1) алгебраические переменные понимаются как отрезки;

2) сумма двух или нескольких алгебраических переменных понимается как отрезок, составленный из отрезков-слагаемых;

3) произведение двух переменных a и b понимается как прямоугольник, смежные стороны которого представляют собой отрезки, соответствующие a и b. Произведение трёх переменных a, b и c — это уже прямоугольный параллелепипед, три измерения которого суть отрезки, соответствующие a, b и c. Произведение более чем трёх переменных в геометрической алгебре не существует.

Начиная с ал-Хорезми и вплоть до Декарта геометрическая алгебра используется для того, чтобы свести предложения алгебры к предложениям геометрии и таким образом свести вопрос об основании алгебры к старому вопросу об основании геометрии. (Идею обоснования алгебры, независимого от обоснования геометрии, впервые выдвигает Декарт.) В конце XIX века геометрическую алгебру начинают применять в историко-математических исследованиях для того, чтобы переводить некоторые античные геометрические теоремы на алгебраический язык, и тогда же появляется сам термин (П. Таннери). В качестве примера приведём популярное до сих пор и не требующее специальных пояснений предложение II.4 «Начал» (рис. 1).



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Рис. 1

Понятие геометрической алгебры уже не раз подвергалось серьёзной критике.[3] Действительно, хотя тот факт, что всю вторую книгу «Начал» можно перевести на язык алгебры, весьма впечатляюще говорит об историческом единстве математики от эпохи Евклида до наших дней, всё же нет никаких оснований считать, что именно такой перевод передаёт суть теории Евклида.[4]

В том, что алгебра является адекватным средством для понимания теории Евклида, заставляет усомниться резкий контраст между систематической формой изложения Евклида и той явной беспорядочностью, с которой автор «доказывает алгебраические формулы». Так вспомогательные предложения II.5 и II.6 (II.5 используется при доказательстве финального II.14, а II.6 — при доказательстве II.11) с алгебраической точки зрения оказываются вершиной того, что достиг Евклид во второй книге — геометрическая алгебра усматривает в этих предложениях решение частных случаев квадратного уравнения. Неясным остаётся при алгебраической трактовке

[1] Впервые опубликовано: *Философские науки*, 1995, №1, стр. 99–112.

[2] См. например, Г. Г. Цейтен, *История математики в древности и в средние века*. М., 193II.

[3] См., например, Р. Рашед. Идея алгебры по ал-Хорезми // *Мухаммад ибн ал-Хорезми: к 1200-летию со дня рождения*. М. 1983; S. Unguru. On the need to rewrite the history of Greek mathematics // *Archive for History of Exact sciences*, **15**, 1975, p. 67-114.

[4] Здесь и далее, говоря о теории Евклида, мы имеем в виду содержание первых двух книг «Начал».

смысл второй книги как целого. Совершенно загадочными представляются предложения II.2 и II.3. В самом деле, с алгебраической точки зрения II.1 даёт закон дистрибутивности

$$a(b + c + ...) = ab + ac + ... ,$$

а II.2 и II.3 выражают частные случаи этого закона:

$$\text{если } a = b + c, \text{ то } ab + ac = a^2; \qquad (\text{II}.2)$$

$$(a + b)a = a^2 + ab. \qquad (\text{II}.3)$$

Зачем Евклиду понадобилось частные случаи предложения II.1 выделять в виде двух отдельных предложений II.2 и II.3 и ещё раз их доказывать? Неужели логика вдруг отказала здесь автору «Начал»? В этой связи возникает дилемма: следует или считать, что в тексте Евклида имеет место бессмыслица (и, например, вслед за Д. Д. Мордухай-Болтовским [5] принять *ad hoc* гипотезу о лакуне между II.3 и II.4), или, исходя из презумпции осмысленности текста, пытаться понять этот текст не через геометрическую алгебру, а как-либо иначе.

В этой статье предлагается трактовка второй книги «Начал», основанная на предположении о том, что главной целью теории Евклида является нахождение способа построения (в смысле аксиом и постулатов «Начал») квадрата, равновеликого произвольному данному многоугольнику. Такая задача действительно решается Евклидом в II.14, однако наше предположение о том, что её решение является целью всей теории, безусловно требует обоснования. В этой связи прежде всего заметим, что при предлагаемом прочтении достигается гораздо более точное соответствие между формой и содержанием текста Евклида, нежели при алгебраической трактовке: II.14 — последнее предложение второй книги; в I.45 решается промежуточная задача построения прямоугольника, равновеликого произвольному данному многоугольнику; I.46, I.47 непосредственно используются в II.14 и, таким образом, итог первой книги подготавливает решение главной задачи второй книги (последнее предложение первой книги I.48 является обратным к I.47). Впрочем, если нас интересует не просто культурная морфология, а математика, аргумент соответствия формы текста его содержанию не нужно считать решающим: мы предпочтём осмысленную трактовку трактовке, представляющейся нам бессмысленной или искусственной даже в том случае, когда последняя будет гораздо лучше соответствовать форме текста, а всю вину за несоответствие формы и содержания мы переложим в этом случае на автора текста (как это и делается при алгебраической трактовке Евклида). Итак, чтобы спасти предлагаемую трактовку, нужно показать её осмысленность. Не является ли искусственной задача построения квадрата, равновеликого данному многоугольнику? Мы, конечно, легко можем понять эту задачу в качестве школьного упражнения или в качестве некоторой вспомогательной задачи, но в качестве главной цели большой теории такая задача представляется на первый взгляд совершенно бессмысленной. Мы постараемся показать осмысленность этой задачи именно в качестве главной цели теории; и для этого нам придётся в первую очередь осмыслить античное понятие теории. [6]

Обратимся прежде всего к евклидовому понятию равенства . Мы сразу обнаруживаем, что евклидово «равенство», определяемое списком «аксиом», соответствует нашей «равновеликости», а не «конгруэнтности». Этот хорошо известный факт нужно понимать в сле-

---

[5] Комментарий к «Началам» Евклида в кн.: Евклид, *Начала*. М., 1950. Т. 1.

[6] Максимум, на что может претендовать трактовка Евклида посредством геометрической алгебры — это установление того факта, что Евклид знал кое-что из того, что знаем мы сегодня.

дующем точном смысле: интерпретируя евклидово «равенство» как равновеликость, мы нигде не приходим к противоречию, однако эквивалентность евклидова «равенства» и современной «равновеликости» отсюда, ясное дело, не следует. Если в современной школьной геометрии многоугольники определяются с точностью до конгруэнтности или подобия, то есть ряд конгруэнтных или подобных многоугольников понимается как ряд экземпляров «одного и того же» многоугольника, то в теории ЕВКЛИДА экземплярами одного и того же многоугольника являются

- все равновеликие многоугольники;
- все подобные многоугольники.

Теперь, после того как ЕВКЛИД докажет, что каждый многоугольник равновелик некоторому квадрату (II.14), окажется, что все многоугольники являются экземплярами одного и того же «пра-многоугольника».[7]

Итак, главные вопросы, на которые нам нужно ответить, таковы:

1. Какой смысл имеет у ЕВКЛИДА отождествление многоугольников и каков характер этого отождествления?

2. В чём смысл особой роли квадрата в теории ЕВКЛИДА и какова в точности эта роль?

1. С точки зрения ПЛАТОНА понять нечто теоретически означает понять его как «единое и тождественное», «как таковое», то есть через собственное определение. В самом деле, трудно спорить с тем, что построить теорию означает связать некую множественность в единство, объяснить множество явлений на основе немногих принципов, связанных воедино. Однако если бы мы захотели создать «теорию всего», просто объявив это всё «единым и тождественным», мы бы сразу потеряли всякую содержательность, всякую возможность верифицировать и фальсифицировать своё знание и вообще должны были бы отказаться от разума в пользу чисто мистической способности «единения». Иначе говоря, такое «тождество всего» было бы самой пустой абстракцией. Значит, искомая связь объектов теории, объединяющая многообразие этих объектов в нечто единое, не есть тождество — пожалуй в этом и состоит современная точка зрения, исходя из которой делать отождествление объектов целью теории (как у ЕВКЛИДА) совершенно бессмысленно. Вопрос, однако, состоит в том, как понимать тождественность. В современной математике тождественность объектов есть результат нейтральной (бессодержательной, бессмысленной самой по себе) процедуры их номинального отождествления — другое дело, что потом можно спросить, было ли то или иное отождествление оправданным, то есть явилось ли оно эффективным средством исследования или ненужным «умножением сущностей». Именно поэтому здесь можно говорить о такой связи объектов воедино, которая не является их тождеством. Если же понимать тождественность в смысле радикальной оппозиции тождественного и иного — а именно такое употребление,

[7] Есть ли евклидов способ доказательства «равенства» двух многоугольников посредством доказательства «равенства» каждого из них одному и тому же квадрату лишь удобный технический приём? Есть ли квадрат лишь «канонический представитель класса равновеликих многоугольников»? Представляется интересным рассмотреть в контексте этой статьи весьма актуальную на наш взгляд для современной математики проблему «канонических представителей» или шире — проблему соотношения между «высокими» (высокой степени абстракции) алгебраическими понятиями и простыми геометрическими (реже арифметическими) примерами, являющимися частными случаями этих понятий, но такими частными случаями, которые бывает часто удобно, а на практике иногда и необходимо удерживать при работе с этими понятиями. Ср., например, алгебраическое определение топологического пространства и воображаемые сферы с ручками и дырками, с которыми реально работает каждый математик, в том числе и самый крайний приверженец чисто алгебраических методов.

насколько можно судить, принято в античной научной литературе — то говорить о такой связи воедино, которая не есть тождество, просто не придётся. Единственное, что останется сказать, имея в виду упомянутый выше элейский парадокс тождественности, это то, что эта связь, являясь тождеством, в то же время парадоксальным образом остается не-тождеством, что эта связь провоцирует не только тождественность, но и инаковость объектов теории по отношению друг к другу. Сравнивая понимание тождественности в античной и современной математике, можно сказать, что античный способ понимания этого термина обнажает те логические трудности, которые при современном понимании термина определённо выводятся за пределы математики в логику и философию. Трудно сказать, что предпочтительнее: с одной стороны, математикам часто бывает весьма полезно отвлекаться от вопросов общего характера и сосредотачиваться на собственной проблематике (впрочем, мы видим, что это с успехом делает и ЕВКЛИД), с другой стороны, забывая о проблемах собственных оснований, о проблемах теоретического знания как такового, математика рискует потерять именно свою теоретическую природу, свою прозрачность для самой себя (впрочем, современная математическая терминология отнюдь не мешает ставить вопросы оснований, как показывает плодотворный опыт дискуссий начала XX века).

Итак, евклидово отождествление многоугольников есть попытка построения теории многоугольников, то есть попытка «схватывания» всех многоугольников зараз. Чтобы «схватить» многоугольники, ЕВКЛИД не помещает их в особый мир, управляемый единой системой принципов, как это делается в современной математике (ср. «евклидово пространство»), а отождествляет все многоугольники с одним особым многоугольником, именно квадратом. Таким образом, мы переходим ко второму вопросу.

2. Квадрат в теории ЕВКЛИДА — это эйдос (произвольного) многоугольника. Эйдос вещи, согласно Платону, — это «истинный вид» этой вещи, её совершенное состояние или «прообраз», существующий отдельно (абсолютно) от всего наносного и случайного (инакового) в ней. Переходя от вещей к их эйдосам, мы, так сказать, уменьшаем множественность и инаковость и приближаемся к тождественности и единству. Действуя таким образом, мы, вообще говоря, должны будем прийти к некоему «эйдосу всего», который тут же потеряет свое определение как эйдоса, однако эту философскую трудность мы оставляем за пределами настоящего обсуждения.[8]

Говоря о теоретизировании с помощью эйдосов, нужно вспомнить упомянутую выше античную доминанту понимания вещи через её собственное определение. Когда мы рассматриваем все многоугольники погруженными в «евклидово пространство», многоугольники оказываются связанными воедино законами этого пространства, однако никакого прояснения собственно многоугольников, никакого «утверждения в себе» многоугольников как таковых при этом не происходит: многоугольники оказываются просто материалом, на котором реализуются законы евклидова пространства, и этот материал, как мы теперь знаем, может быть безболезненно заменен другим материалом — либо наборами чисел (координат), либо «столами, стульями и пивными кружками» и их комбинациями (у ГИЛЬБЕРТА), либо уже совсем

[8] Если строго следовать ПЛАТОНУ, эйдос вещи нельзя считать геометрическим предметом. Геометрические предметы находятся в некотором промежуточном месте между чувственно воспринимаемыми вещами и эйдосами и содержат особого рода материю (чистую протяженность), тогда как эйдосы совсем «бесплотны» (*Государство* 510b–511). Однако эйдетическая структура универсума, как мы видим у ЕВКЛИДА, воспроизводится в геометрическом мире. Это, конечно, не удивительно — один и тот же подход используется как в теории универсума в целом, так и в более специальной теории геометрического мира (то есть в геометрии). Таким образом, называя квадрат «эйдосом многоугольника», мы имеем в виду специальный «геометрический эйдос».

абстрактными «элементами множества», на котором определена соответствующая структура. Конечно и «истинный вид» многоугольника (квадрат) весьма разнится с тем непосредственным впечатлением от (произвольного) многоугольника, которое мы получаем, делая первую попытку подняться от чувственного зрения к «умному зрению», то есть к теории. (Только чувственным взором многоугольник как математический предмет разглядеть вообще невозможно.) Однако этот «истинный вид», несмотря на всю свою абстрактность (точнее, абсолютность), по замыслу эйдологии не может перестать быть многоугольником и стать неким абстрактным принципом. Напротив, рассматривая многоугольник теоретически в его истинном виде, мы впервые только и узнаём, что такое настоящий многоугольник. Любой многоугольник есть постольку многоугольник, поскольку он причастен квадрату, поскольку сквозь несовершенство, кривизну, неправильность многоугольника логически просматривается правильный квадрат. Отсюда ясно, почему Евклид использует для квадрата термин τετραγονον (собственно «четырехугольник»). [9]

Отношение тождества между вещью (многоугольником) и её эйдосом (квадратом) не есть симметричное отношение. Тождество вещи и её эйдоса есть несимметричное отношение образа и прообраза. Именно, образ (вещь) есть то же, что есть прообраз (эйдос), однако в отличие от прообраза, образ причастен не только бытию (прообраза), но и небытию, от которого он избавляется в процессе своего становления, в большей степени уподобляясь своему прообразу и становясь, тем самым, в большей степени собой, то есть в меньшей степени образом и в большей — самим прообразом. В этой связи интересно сравнить аксиому I «Начал»:

$$\begin{array}{c} b = a \\ c = a \\ \hline b = c \end{array} \tag{1}$$

и современную формулировку аксиомы транзитивности равенства чисел

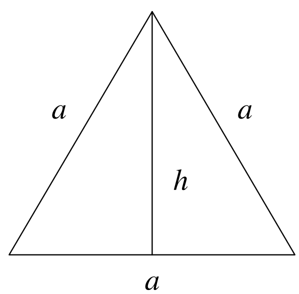
$$\begin{array}{c} b = a \\ a = c \\ \hline b = c \end{array} \tag{2}$$

Мы видим, что (1) и (2) эквивалентны только в том случае, если отношение «=» симметрично. Если правильно наше предположение о том, что евклидово «равенство» в общем случае несимметрично, то не следует отождествлять (1) и (2), как это делается при алгебраической трактовке Евклида, поскольку в (1) речь идёт не о переносе отношения на любой член бесконечного ряда, как в (2), а об установлении отношения «равенства» между объектами, соотнесёнными с одним и тем же эйдосом.

Итак, ясно, почему эйдосом произвольного многоугольника в теории Евклида является правильный многоугольник, — но почему именно правильный четырехугольник (квадрат)? Исходя из некоторых метафизических соображений, казалось бы, было предпочтительнее видеть в роли эйдоса многоугольника не квадрат, а правильный треугольник. С правильного треугольника начинает и Евклид: построение правильного треугольника — это первое предложение «Начал». Действительно, так же как любое число (в античном смысле слова, то есть

[9] Нам представляются совершенно неправильными исторические объяснения этого факта, согласно которому греки-де сначала познакомились с правильными многоугольниками и только позже «додумались» до неправильных (см. Мордухай-Болтовской, цит. соч.).

натуральное число, большее единицы) «изнутри» состоит из единиц, а «извне» объединяется единицей, которая делает это число не просто рыхлым набором единиц, а именно числом как целостностью (тройкой, пятёркой и т. д.), — так и любой многоугольник может быть, с одной стороны, разбит на треугольники, с другой же стороны целостность этого многоугольника задавалась бы «тем же» треугольником как эйдосом, если бы мы смогли построить соответствующую теорию.[10] Эйдетическую теорию многоугольников оказывается возможным построить, рассматривая в качестве эйдоса произвольного многоугольника квадрат, а не правильный треугольник. В самом деле, попробуем построить эйдетическую теорию многоугольников, рассматривая в качестве эйдоса многоугольника правильный треугольник. Для этого нам первым делом нужно научиться строить правильный треугольник, равновеликий произвольному данному многоугольнику. Обычный способ решения этой задачи задействует всю мощь «квадратной» теории и поэтому не может быть использован. Ведь здесь дело сводится к построению удвоенной стороны квадрата утроенной площади (рис. 2). А это построение выполняется с помощью теоремы Пифагора.



$$S = \frac{ah}{2}, \quad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

откуда

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad a = 2\sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{3}}$$

Рис. 2

Попытка же построить чисто «треугольную» теорию сразу наталкивается на принципиальные трудности. Прежде всего заметим, что «прикладывание» треугольников друг к другу всегда остаётся алгебраически незамкнутым, тогда как «прикладывание» прямоугольников одинаковой ширины алгебраически замкнуто: прикладывая прямоугольники указанного вида друг к другу равными сторонами, получаем всегда прямоугольник того же вида; чтобы при прикладывании треугольника к треугольнику получился снова треугольник, необходимо соблюдение условий, которые изменяются при переходе от одной пары прикладываемых треугольников к другой (предложение II.1, рис. 3).

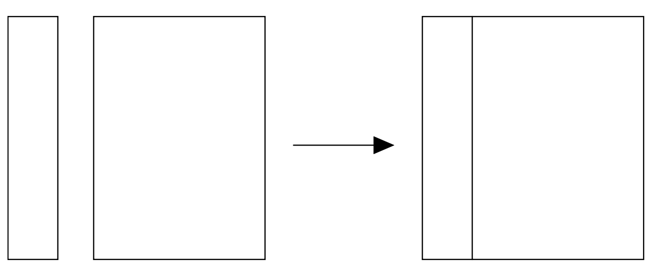
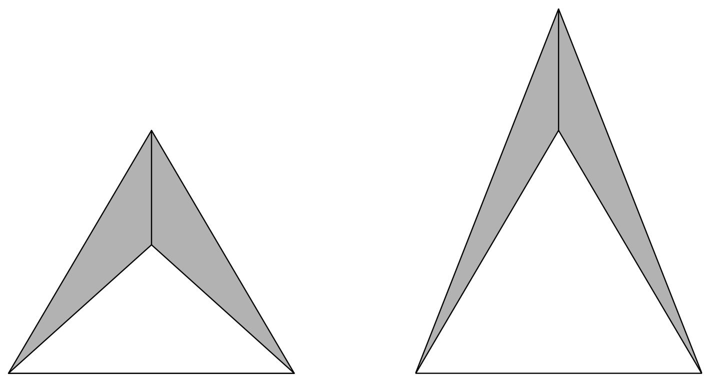


Рис. 3

[10] Последнее замечание существенно: речь идёт о содержательной математической теории, а не о прокламации метафизических *a priori*.

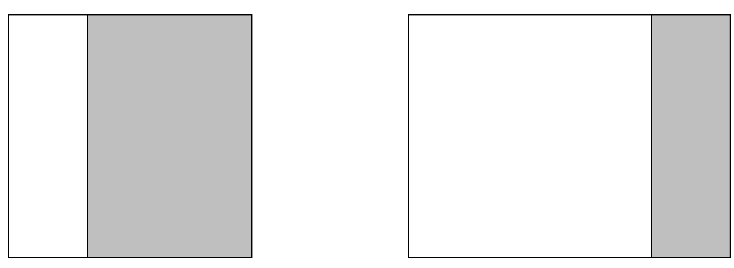
Далее, предположим, что в «треугольной» теории равнобедренный треугольник играет ту же роль посредника между исходным многоугольником и его эйдосом, которую в «квадратной» теории Евклида играет прямоугольник. Как тогда перейти от равнобедренного треугольника к правильному? Попытаемся ответить на этот вопрос, не заботясь пока о равновеликости. Чтобы из равнобедренного треугольника получить правильный треугольник, нужно либо добавить к нему (рис. 4, *а*), либо отнять (рис. 4, *б*) от него два конгруэнтных треугольника общего вида.



а) *б*)

Рис. 4

Неудачно здесь то, что «поднявшись по эйдетической лестнице» до полуправильного равнобедренного треугольника, (это можно сделать чисто «треугольными» средствами) мы вынуждены вновь иметь дело с треугольниками общего вида, попадая тем самым в порочный круг. А как обстоит дело с четырехугольниками у Евклида? Чтобы получить квадрат из «полуправильного» прямоугольника, следует либо добавить к нему (рис. 5, *а*), либо отнять от него (рис. 5, *б*) прямоугольник такой же ширины (ср. предложения II.2, II.3).



а) *б*)

Рис. 5

Таким образом, «поднявшись» до полуправильного прямоугольника (I.45), можно искать способ «подняться» до правильного квадрата уже без всяких отступлений, и Евклид находит этот способ (II.5, II.14).

Теперь мы, как представляется, поняли настоящий смысл предложений II.1–II.3: Евклид обнаруживает замечательное «числовое» свойство прямоугольников (II.1) и их связь с квадратом (II.2, II.3). И хотя предложения II.1–II.3 формально не используются в доказательствах последующих предложений, однако именно эти три предложения мотивируют всю дальнейшую теорию, указывая на то, что именно квадрат, а не треугольник или пятиугольник способен быть (и значит в рамках математической теории таковым является) эйдосом каждого многоугольника.

Посмотрим теперь, что представляют собой в нашей интерпретации другие предложения второй книги. В предложениях II.2 и II.3, как мы только что сказали, речь идёт об «исправлении» прямоугольника, не сохраняющем равенства — в II.2 получается квадрат больший данного прямоугольника, а в II.3 — меньший данного прямоугольника. Чтобы решить задачу «исправления» прямоугольника с учётом равенства, необходимо, исправив прямоугольник «по форме» (как в II.2 или II.3), исправить полученный квадрат ещё и по величине. Таким образом, перед Евклидом встаёт задача выяснения того, каким образом квадрат может быть увеличен или уменьшен (с тем, чтобы он остался при этом квадратом). Именно эта задача решается в следующем предложении II.4, где устанавливается, какие фигуры необходимо приложить к квадрату, чтобы получить больший квадрат, или отнять — чтобы получить меньший: два прямоугольника и ещё один квадрат.[11]

В предложении II.5 устанавливается, насколько квадрат превышает прямоугольник того же периметра. Эта разность тем больше, чем больше разность сторон прямоугольника, то есть чем сильнее прямоугольник отличается от квадрата. Попытка построить квадрат, равный данному прямоугольнику, взяв квадрат такого же периметра, представляется весьма естественной, однако она не приводит к успеху. Величина совершаемой при этом ошибки и определяется в II.5, причём искомая разность между прямоугольником и квадратом также даётся в этом предложении в виде квадрата. Таким образом, если квадрат составляется в I.47 из двух меньших квадратов, в II.4 — из двух прямоугольников и одного квадрата, то в II.5 — из одного прямоугольника и одного квадрата. Обратим внимание на формулировку условия предложения II.5, которая при алгебраической интерпретации выглядит как только странный способ выражаться: «Если прямая линия (отрезок) рассечена на равные и неравные (части)...» Рассечение линии на равные части позволяет Евклиду строить «равный себе» квадрат, на неравные части — «неравный себе» прямоугольник («разносторонник»). Отрезок между сечениями есть отклонение от правильности. Согласно II.5, построенный на этом отрезке квадрат есть отклонение «неравного» прямоугольника от «равного» квадрата. С другой стороны, II.5 можно рассматривать как решение той же задачи, что и II.4 (об увеличении или уменьшении квадрата) с помощью только одного прямоугольника. Заметим, что именно это предложение вместе с I.47 позволяет в конце концов в II.14 построить квадрат, равный данному прямоугольнику.

Предложение II.6 — ещё одно, в котором прямоугольник вместе с некоторым квадратом приравнивается другому квадрату. Различие в условии II.5 и II.6 состоит в том, что если в II.5 делению «на равные» противопоставлялось деление на «неравные», то в II.6 отклонение от

[11] При алгебраической интерпретации, как мы уже говорили, предложение II.4 трактуется как формула для квадрата двучлена.

деления «на равные» достигается за счёт того, что к исходному отрезку приставляется «по прямой» ещё один отрезок. При этом, если в II.5 установилось насколько квадрат из «равных» частей данного отрезка больше прямоугольника из «неравных» частей того же отрезка, то в II.6 устанавливается насколько квадрат из «равных» меньше квадрата, сторона которого есть половина исходного отрезка вместе с приложенным отрезком. Таким образом, если в II.4 вопрос об уменьшении или увеличении квадрата решается непосредственно с помощью двух равных прямоугольников и квадрата, то в II.5–II.6 этот же вопрос решается более опосредованным образом, но зато с помощью только одного прямоугольника.

Предложение II.4, как мы сказали, можно использовать как для увеличения, так и для уменьшения данного квадрата, однако если связать используемые при этом прямоугольники с данным квадратом таким же образом, как прямоугольники связаны с квадратом в предложениях II.2–II.3, а именно потребовать, чтобы одна из сторон каждого из этих прямоугольников была равна стороне квадрата, то II.4 можно будет использовать только для увеличения данного квадрата. Рассматривая уменьшение квадрата с тем же условием на используемые прямоугольники, мы приходим к предложению II.7. Чтобы увеличить данный квадрат, нужно, согласно II.4, приложить к этому квадрату два прямоугольника, удовлетворяющих указанному условию, и ещё один квадрат. Чтобы уменьшить данный квадрат, нужно, согласно II.7, отнять от него два прямоугольника, удовлетворяющих указанному условию, добавив к нему предварительно ещё один квадрат. Условие, которые мы здесь накладываем на прямоугольники, ни в какой мере не является произвольным и связано с «аддитивным» свойством прямоугольников, о котором идёт речь в предложениях I.45 и II.1. При алгебраической интерпретации предложение II.7 трактуется как формула для «квадрата разности».

Предложение II.8 также является развитием II.4: здесь из рассмотрения исключается лишний квадрат, который в II.4 вместе с прямоугольниками дополнял меньший квадрат до большего. II.8 получается из II.4 разделением одной из данных частей исходного отрезка пополам; при этом оказывается возможным фигурирующий в II.4 вспомогательный квадрат выразить через получившиеся два дополнительных прямоугольника. Квадрат уменьшается или увеличивается только с помощью прямоугольников, причём более непосредственным образом, чем в II.5–II.6: чертёж для II.8 подобен чертежу для II.4 и так же, как в случае II.7, имеет только одно «наложение».

Предложения II.9 и II.10 имеют те же условия, что и II.5 и II.6 соответственно, но отличаются тем, что в них говорится только о соотношениях квадратов (прямоугольники участвуют только в доказательствах, но не в утверждениях этих предложений). В этом отношении смысл предложений II.9–II.10 близок к смыслу «теоремы Пифагора» I.47: в II.9, так же как в I.47, квадрат составляется из двух других квадратов; в II.10 имеет место более сложное равенство между квадратами. При стандартной интерпретации, когда I.47 трактуется чисто геометрически, а II.1–II.10 чисто алгебраически, остаётся непонятным, зачем ЕВКЛИД использует для доказательства предложений II.9 и II.10 «чужеродное» I.47, тогда как эти предложения могут быть доказаны теми же средствами «геометрической алгебры», что и предыдущие предложения II.1–II.8. В рамках нашей интерпретации связь предложения I.47 со второй книгой перестаёт быть чисто формальной: предложения II.9–II.10 также как и II.12–II.13 суть развития I.47. Необходимость утверждений о равенствах квадратов и прямоугольника (с сохранением равенства) очевидна: предложения II.5–II.6 показывают, в каком случае прямоугольник отличается от квадрата на другой квадрат; если теперь уметь находить квадрат, равный сумме или разности двух квадратов, то можно будет построить квадрат, равный данному прямоугольнику. На самом деле в II.14 для этого будут достаточными II.5 и I.47, однако Евклид приводит и параллельные аналогичные разработки.

Наконец, в предложении II.11 Евклид приравнивает прямоугольник к квадрату, однако здесь речь идёт не об общем решении этой задачи, как в II.14, а о нахождении некоторого специального случая, когда прямоугольник равен квадрату. Таким образом, в предложении II.11 впервые решается задача «исправления» прямоугольника, хотя и не в общем виде. Как замечали исследователи, сечение отрезка, которое находится в предложении II.11, тождественно «делению отрезка в среднем и крайнем отношении» («золотому сечению»), которое Евклид находит в предложении VI.30. Однако было бы неправильно говорить, что оба эти предложения решают одну и ту же задачу. На самостоятельный смысл II.11 мы только что указали; эквивалентность сечений, отыскиваемых в II.11 и в VI.30, Евклид мог бы сразу доказать посредством VI.17, однако он этого не делает — по всей видимости факт указанного совпадения сам по себе не имеет для Евклида теоретического значения.

Предложения II.12–II.13 суть аналоги «теоремы Пифагора» I.47 для случаев тупоугольного и остроугольного треугольников. Как мы уже говорили, I.47 тематически примыкает ко второй книге, и поэтому неудивительно, что именно здесь мы находим II.12–II.13, тем более что в них используется II.4. Формально в II.12–II.13, так же как и во всех остальных предложениях второй книги, устанавливаются равенства между квадратами и прямоугольниками.

Наконец, в II.14 решается основная задача второй книги — строится квадрат, равный данному многоугольнику. Для этого Евклид с помощью II.5 и I.47 «исправляет» прямоугольник, то есть строит квадрат, равный данному прямоугольнику, и пользуется предложением I.45, позволяющим построить прямоугольник, равный данному многоугольнику.