Андрей Родин

О бесконечности и числе

(опубликовано в сборнике: Бесконечность в математике, логике и философии М.1997)

В современной математике бесконечность понимается двояко - либо как актуальная бесконечность в духе Кантора, либо как потенциальная бесконечность в духе Коши и Вейерштрасса. Цель настоящей статьи - показать, что оба эти способа понимания бесконечности являются неадектватными и предложить другой способ понимания бесконечности, который представляется приемлемым.

Парадигматическим примером бесконечного в математике является натуральный ряд чисел. Понимая бесконечность потенциально, говорят, что натуральный ряд бесконечен в том смысле, что всякий конечный набор следующих друг за другом натуральных чисел от 1 до N может быть расширен путем добавления к нему следующего за N числа N+1. Другая формулировка: натуральный ряд бесконечен, поскольку не существует наибольшего натурального числа, и для любого данного числа можно указать большее его число. Понимая бесконечность актуально, говорят, что возможность расширять всякий данный набор натуральных чисел есть не определение, а следствие бесконечности натурального ряда, саму же эту бесконечность следует мыслить как актуальную данность всего натурального ряда сразу. Нетрудно видеть, что приведенное выше понятие о потенциальной бесконечности не является самостоятельным и предполагает актуальную бесконечность.

В самом деле, натуральный ряд мыслится здесь как бесконечный процесс порождения новых и новых чисел. При этом весь ход этого процесса предполагается известным заранее, и, в частности, предполагается известным, что процесс никогда не закончится. Знать заранее весь ход процесса порождения чисел - значит мыслить этот бесконечный процесс и все порожденные этим процессом числа как актуально данные. Таким образом, мышление потенциальной бесконечности, как она понимается в классическом анализе, требует мышления актуальной бесконечности. Собственно, представление о процессе здесь оказывается излишним, что и показал Кантор (1).

Этот аргумент Кантор использует для того, чтобы доказать правомочность понятия актуальной бесконечности : если вы принимаете классическое обоснование анализа, то должны принять и теорию множеств, несмотря на кажущуюся сомнительность понятия бесконечного множества. И, повторяем, этот аргумент, на наш взгляд, имеет необходимую силу. Однако, на основе этого аргумента можно не только заключить от несомненности потенциальной бесконечности в классическом анализе к несомненности актуальной бесконечности в теории множеств, но и наоборот - от сомнительности актуальной бесконечности в теории множеств к сомнительности потенциальной бесконечности в классическом анализе. Мы сейчас не будем рассматривать трудности, связанные с понятием актуально бесконечного множества или процесса - они очевидны и хорошо известны. Вместо этого мы попытаемся построить теорию бесконечности, которая в отличие от потенциальной бесконечности из классического анализа никаким образом не сводилась бы к понятию актуальной бесконечности.

Прежде всего заметим, что вещи, которые мы пересчитываем и о которых мы говорим, что их имеется конечное или бесконечное число, заранее должны относится к некоторому роду. Отнесение вещей к одному роду не означает приписывания вещам какого-то качества. Подчеркивая бескачественность вещей, мы можем называть их "элементами некоторого множества" или просто "элементами". Тогда родом будет "элемент". Мы можем, в конце концов, в качестве рода взять саму "вещь", только тогда нужно дополнительно следить, чтобы отличать вещи рода "вещь" от самого этого рода. Пусть родом будет "(геометрическая) точка". Род "точка" это еще не точка как вещь, хотя если нет такой вещи как точка, не существует и такого рода. Чтобы точка стала вещью, мы можем, например, изобразить ее на доске и указать на нее: "эта точка". Однако, если речь идет о математике, то здесь выделение вещей с помощью жестов и слов "этот" и "тот" играет подчиненную роль. Основным в математике является выделение с помощью имен, которые в случае точек обычно представляют собой заглавные латинские буквы: точка A, точка B и так далее. Слова "этот" и "тот" мы будем вслед за Расселом (2) тоже называть именами, как и имена точек "A" и "B". Итак, чтобы была конституирована вещь, необходимы по крайней мере два элемента: ее род и ее имя. Например, "точка A" или "это дерево". Пересчитываемые вещи должны быть отнесены к одному роду, поскольку число вещей есть число "чего-то", а это "что-то" (в частном случае - просто "вещь") и есть род. Вещи, относящиеся к одному роду, вообще говоря, отличаются только своими именами. Они могут отличаться и своими видами, однако, это не является обязательным. Например, точки в общем случае не отличаются по виду, хотя видовое отличие может быть введено, например, как условие принадлежности точки некоторой прямой. Таким образом, вещи пересчитываются по своим именам: сколько имен, столько и вещей.

Сколько может быть имен? Не имен как вещей, а имен вещей одного рода в данном пересчете?

Во-первых, очевидно, что это число не может быть актуально бесконечным. Говоря об актуально бесконечном числе вещей, например, актуально бесконечном числе точек на отрезке, не имеют в виду, что все эти вещи могут быть зараз названы - поскольку любой алфавит конечен и длина любого выражения конечна. Говоря об актуально бесконечном числе вещей, всегда имееют в виду неназванные вещи.

Во-вторых, число имен не может быть и потененциально бесконечным - в том смысле, в каком говорят о потенциальной бесконечности натурального ряда. Действительно, число имен всегда ограничено техническими возможностями. С применением компьютеров, которые многократно увеличивают возможности обычного письма, это становится особенно заметным. Кроме того, дело упирается в психо-физиологические возможности человека различать и запоминать имена. (Впрочем, наверное, правильнее не рассматривать технические и психофизиологические возможности человека отдельно друг от друга.) Нельзя абсолютно достоверно указать наибольшее возможное число имен. Любые оценки такого рода остаются эмпирическими и могут быть опрокинуты новыми достижениями техники или новыми результатами в науке. Однако означает ли это, что имен может быть сколь угодно много? Очевидно, что нет. Точно так же нельзя абсолютно достоверно установить верхний предел человеческой жизни, однако это отнюдь не означает, что жизнь человека может продолжаться сколь угодно долго. Более того, несмотря на отсутствие четко установленной верхней границы человеческой жизни, мы уверенно говорим, что человек смертен. Никто не имеет достоверного знания о том, когда он умрет, но никто не сомневается, что когда-нибудь это случится. Наибольшее число имен является неопределенным, но не потенциально бесконечным в обычном смысле.

Итак, оценки верхней границы числа имен пересчитываемых вещей, то есть верхней границы числа самих этих вещей, являются эмпирическими. Однако, наше собственное рассуждение не является эмпирическим: мы не беремся оценивать реальные и потенциальные возможности человека и компьютера по различению имен, ограничивать возможное число имен числом элементарных частиц во Вселенной и т.д. Это дело специалистов. Не можем мы, конечно, и противопоставить эмпирическому подходу какой-то абсолютный подход, который позволил бы ответить на те же вопросы не приблизительно и гипотетически, а точно и наверняка. То, что мы можем сделать вне рамок эмпирии - это показать необходимость самой эмпирии, а именно, показать, что вопрос о наибольшем числе различаемых имен необходимо является эмпирическим и, следовательно, ответ на него - неопределенным.

Однако о потенциально бесконечном числе вещей говорят, не предполагая потенциальную бесконечность имен вещей. Рассмотрим еще раз рассуждение о потенциальной бесконечности натурального ряда, которое мы уже упоминали в начале статьи. Пусть имеется набор последовательных натуральных чисел от 1 до N. Тогда всегда можно построить еще одно натуральное число N+1. Сколько чисел поименовано в данном рассуждении? Три числа: 1, N, N+1. Однако данное рассуждение подразумевает не только три выделенные числа, но и все числа, большие 1 и меньшие N. Таким образом, говорят ли о бесконечности как об актуальной или потенциальной, подразумевают неименованные вещи. Процедура конечного пересчета, напротив, предполагает, что каждая пересчитываемая вещь выделена своим собственным именем: не различая вещи по именам, мы никогда не сможем сказать, сколько имеется вещей. В частности, в качестве имен вещей при пересчете удобно сразу использовать числовые обозначения. Можно сказать, что само слово "вещь" понимается различно в зависимости от того, идет ли речь о конечном или бесконечном числе вещей. В случае конечного числа вещей, предполагается, что каждая вещь имеет свое имя, в случае бесконечного числа вещей предполагается, что есть вещи без имен. Таким образом, чтобы разобраться в вопросе о бесконечном и в вопросе о соотношении бесконечного и конечного, нужно разобраться в отношении вещи и имени вещи.

Как мы уже сказали, вещь выделяется из своего рода своим собственным именем. Однако мы говорим, что род и имя только называют вещь, но не сами есть эта вещь. Это накладывает следующее важное условие на именование вещи: именование вещи должно быть произвольным. Имея в качестве вещей "точку А" и "точку В", мы должны подразумевать, что те же самые точки могли бы быть названы и иначе, в частности, точке А могло бы быть присвоено имя "В", а точке В - имя "А". Этим имя отделяется от именуемой вещи: та же самая вещь могла бы быть названа иначе. О "той же самой вещи" здесь говорится как о вещи без имени. Но что такое вещь без имени? В нашем примере можно было бы указать на точку, нарисованную на доске: "эта точка". Но "эта точка" - это не точка без имени, а точка именованная по другим правилам, чем это принято в геометрии. Имена "этот" и "тот" являются такими же произвольными, как "А" и "В". Именование точек с помощью букв можно назвать математическим, а с помощью слов "этот" и "тот" и сопровождающих жестов - эмпирическим. Точка, названная по правилам эмпирического именования не является скорее "самой точкой" (неименованной точкой), чем точка, названная по правилам математического именования. Поэтому эмпирическая редукция не решает проблему неименованной вещи.

Всякая наличная вещь выделена своим именем. Неименованная вещь мыслится не как наличная, а через возможность переименования. Эту возможность можно понимать как возможность изменить имя наличной вещи: мы можем сказать, что точка А будет в дальнейшем иметь имя "В", а точка В - имя "А". Однако процедура переименования не является обязательной для рассуждения о вещах. Обязательно же мыслится упущенная в прошлом возможность назвать вещь именно этим, а не другим именем. Без мышления этой возможности мы не различали бы имя вещи и саму вещь. Отсюда следует, что никакой дискурс о вещах не может иметь менее двух собственных имен: кроме имени данной вещи всегда должно мыслится еще хотя бы одно другое имя, которым могла бы быть названа данная вещь. Минимальное возможное число имен содержит эмпирический дискурс, в котором имеется только два имени - "тот" и "этот". Но с другой стороны, список собственных имен, используемый в данном дискурсе должен быть ограниченным. Этому служат соглашения вроде того, что точки следует называть заглавными латинскими буквами. Если вещь имеет уникальное имя, то это имя начинает мыслится как атрибут именно этой вещи, что делает невозможной мысль о переименовании и значит - о "самой вещи", то есть вещи без имени (3).

Легко видеть, что говоря, о возможности назвать вещь иначе в прошлом, мы не имеем здесь в виду такое прошлое, которое становится наличным и настоящим посредством рассказа об истории вещи. Историю вещи могут составлять действительные переименования вещи: "сначала вещь носила имя "A", а затем получила имя "B"". Однако, говоря о вещи до именования, мы имеем в виду такое прошлое, которое не может быть редуцировано к наличному настоящему посредством истории, поскольку свое "до" именования имеет всякая наличная вещь, в том числе и такая, которая является наличной в истории. Поэтому прошлое "до" именования абсолютно, а не относительно: оно не раньше чего-то одного и позже чего-то другого. И только это абсолютное "до" вещи позволяет говорить о вещи без имени, то есть о вещи как о чем-то отличном от своего имени.

Выше мы отвергли попытку отождествить вещь, названную по правилам эмпирического дискурса, с вещью без имени. Однако привлечение эмпирического дискурса было лишь неудачным способом указания на следующий очевидный факт: мы сначала видим точку, а затем ее называем, мы сначала видим человека, а затем узнаем его имя, сначала видим дерево, а затем называем его "этим" или "тем". Привлечение эмпирического дискурса скрывало то обстоятельство, что "сначала" здесь является абсолютным и не редуцируемым к наличности. Поскольку эмпирический дискурс содержит только два имени, можно сказать, что он является простейшим дискурсом о вещах. Не зная личного имени человека, мы называем его "этим человеком". Но эта простота эмпирического дискурса не должна позволить нам путать то, что мы видим сначала и то, что мы затем называем "этим человеком".

Что же мы имеем сначала - до того, как мы называем то, что мы имеем? Очевидно, что сначала мы действительно должны что-то иметь, чтобы говорить о называемой вещи как о существующей. Ведь можно сказать "этот человек" и не указать ни на какого человека, можно сказать "точка A" и не назвать никакой точки. Можно вести рассказ о выдуманных вещах, как это делает литература, а можно о действительных, как это делает история. То, что мы имеем сначала было неверным назвать "вещью без имени" или "самой вещью", поскольку о вещи без имени мы уже говорим после того, как эта вещь поименована, адресуясь к тому, что мы имеем сначала. Впрочем, все, что мы говорим, мы говорим уже после именования, и мы заранее должны отказаться от попытки вывести то, что имеется до именования в наличность настоящего. Но "вещь без имени" и "сама вещь" кажутся чем-то наличным и создают иллюзию того, что именование является неким событием в истории вещи. Поэтому мы будем называть то, что имеется (или не имеется) до именования вещи, следом этой вещи, имея в виду, что след есть не нечто наличное, а лишь указание на абсолютное прошлое вещи. Возвращаясь к примеру с "точкой", заметим, что здесь след точки не нужно отождествлять с чертежом точки. Чертеж точки - это эмпирическая вещь. Точка - математическая вещь. Каждая из этих вещей имеет или не имеет следа. Попытка отождествить след математической точки с чертежом - та же самая попытка редукции следа к эмпирической вещи, которую мы уже отвергли выше.

Итак, мы уже выделили в структуре вещи три элемента: род, имя и след. Род и имя в совокупности составляют название вещи. Чем отличаются друг от друга род и имя? Ответ на этот вопрос менее очевиден, чем кажется. Кажется, что род - общее имя для многих вещей, а поскольку под именем мы здесь имеем в виду собственное имя, оно принадлежит только одной вещи. Однако это утверждение неверно во второй части - собственное имя не принадлежит только одной вещи, и выше мы говорили, почему это обстоятельство является существенным. Существует не только много разных точек - A, B и т.д., но существует и много вещей разного рода, которые в математике обозначают символами "A" и "B". Таким образом, одно имя так же как и один род относится сразу ко многим вещам. К одной и той же вещи и только к ней относится ее полное название - ее имя и род. Отличие имени от рода состоит в другом. Имя точки произвольно: можно назвать ее именем "A", а можно - именем "B". В отличие от имени, род мы не выбираем: всякая точка принадлежит роду "точка", а всякая прямая - роду "прямая". Конечно, говоря теоретически, ничего не изменится, если мы всегда будем называть точки "прямыми", а прямые - "точками". Однако в отличие от ситуации с именем, такое переназывание рода не мыслится необходимо при употреблении рода. Оно даже в каком-то смысле нежелательно, поскольку, называя род, мы апеллируем к уже установленному. Кажется, что можно опровергнуть наше утверждение об установленности рода, указав на принятую в математике практику определять объекты и давать им произвольные названия: будем называть то-то и то-то так-то. Как говорит Гильберт (4), точки можно называть хотя бы кружками, лишь бы операции с ними удовлетворяли соответствуюющим аксиомам. Однако в данном случае речь идет не о родах, а о видах, которые выделяются из рода по наличию у вещей рода соответствующих свойств. Это очевидно в случае родо-видовых определений. При этом исходный род не определяется (не устанавливается), а берется как установленный. Что касается аксиоматического подхода, где роль определения выполняет набор аксиом - например, говорится, что точка, как бы ее не называть, есть такая вещь, которая ведет себя в соответствии с данными аксиомами - то, очевидно, установленным родом здесь является сама "вещь", а аксиомы задают свойства соответствующего вида вещей, например, такого вида вещей как точки.

Итак, имена всегда устанавливаются, а роды всегда берутся как уже установленные. Что касается свойств, и, в частности, таких свойств, по которым могут выделяться виды (будем называть их специфическими свойствами), то они располагаются по данной шкале между родами и именами. Специфические свойства, как мы уже сказали, устанавливаются, однако не так произвольно, как имена. То, что среди треугольников выделяют равносторонние треугольники, не является таким же произвольным актом, как когда точку называют именем "А". В аксиоматическом подходе делается шаг к тому, чтобы приблизить установление специфических свойств к установлению имен в смысле их произвольности. Однако и в этом случае возникают свои ограничения на допустимость системы аксиом (важнейшее из них - непротиворечивость). Промежуточное положение специфического свойства между родом и именем проявляется и в том, что специфическое свойство всегда сопоставляется и с родом в целом и отдельно с вещами этого рода. Сопоставляя специфическое свойство равнобедренности с каждым именованным треугольником, говорят, что данный треугольник ABC является или не является равнобедренным (5). С другой стороны, сопоставляя специфическое свойство равнобедренности с родом "треугольник" (6), образуют вид "равнобедренный треугольник". Итак, специфические свойства соотносятся одновременно с родом и "именнованным родом", то есть названием отдельной вещи. Есть, однако, еще два вида свойств, одни из которых тяготеют к роду, а другие - к имени. К роду тяготеют необходимые свойства, например, свойство треугольников иметь сумму внутренних углов, равную двум прямым углам. В принципе можно отнести это свойство и ко всякому именованному треугольнику ABC, однако, нет никакого смысла задавать вопрос о сумме внутренних углов треугольника ABC, тогда как ответ известен для всего рода. Сумма внутренних углов треугольника ABC равна двум прямым не потому, что этот треугольник есть именно данный треугольник ABC, а потому, что он вообще треугольник. (Вопрос же о том, является ли данный треугольник ABC равнобедренным, осмысленен.) Случайные свойства, наоборот, тяготеют к имени и являются почти такими же произвольными, как имя. Например, свойство треугольника ABC быть вписанным в данную окружность O. Случайные свойства относятся только к отдельным вещам и в отличие от специфических свойств не соотносятся с родами. Заметим, что математика (как и другие науки) выстраивает рассмотренные нами три вида свойств иерархически: установление необходимых свойств вещей считается главной научной целью, установление специфических свойств вещей и построение на их основе классификаций вещей - вспомогательной научной целью, а рассмотрение случайных свойств вещей - сугубо вспомогательным моментом научной деятельности, которого следует по возможности избегать. Разговор о смысле и причинах такого иерархического соподчинения разных видов свойств в науке выходит за рамки настоящей статьи.

Вернемся теперь к введенному нами понятию следа вещи. Что такое след вещи? На этот вопрос в строгом смысле нельзя ответить - в строгом смысле нельзя - поскольку, всякий ответ на такой вопрос предполагает наличность того, о чем этот вопрос задают, а след, как мы говорили, относится к нередуцируемому прошлому, к неналичному. Ответить на вопрос "что такое?" означает определить, а когда нет ответа на этот вопрос, имеет место неопределенность. Поэтому след есть неопределенность, причем абсолютная неопределенность - в том смысле, что она нигде и никогда не может быть определена. Можно сказать и так: след вещи есть то, чем была вещь, до того, как она определилась как именно такая и именно эта вещь. Рассуждая таким образом, Платон называет след "вместилищем", неким бескачественным тестом, из которого слеплены все вещи. В дальнейшем и по сю пору это тесто называют "материей". Здесь только важно иметь в виду, что говоря о вещи "до ее определения", мы имеем в виду абсолютное, а не относительное "до", и поэтому все сказанное метафорически о том, как вещь лепится из теста, нельзя здесь понимать как рассказ об истории вещи. Заметим, что образ изготовления вещи, о котором мы здесь говорим, напрямую заимствован из техники и ремесла. В этой связи возникает важный вопрос о связи научной и технической парадигмы: как определение и идентификация вещи в научном дискурсе соотносится с процессом технического изготовления и использования вещи? Этот вопрос, однако, мы тоже оставляем за пределами настоящего исследования.

Сейчас нам важно фиксировать смысл следа вещи как неопределенности. Неопределенность - это чисто отрицательное понятие, всякую определенность которого следует искать только в противоположном ему понятии определенности. Как определяется вещь? Своим родом и своим именем. Имея вещь, мы должны, во-первых, выяснить какого рода эта вещь. Но установив только род без имени (помыслим пока такую, невозможную на самом деле, как мы покажем чуть ниже, процедуру) мы будем иметь не вещь, а вещи в неопределенном числе, например, "точки". Чтобы иметь точки как вещи, нужно их поименовать, и тогда мы будем иметь, например, вещи "точка А" и "точка В". На самом деле, конечно, неверно, что мы сначала определяем некоторую совокупность как "точки", а потом даем точкам имена. Прежде всего потому, что нет никакой такой совокупности с историей ее определения за два шага. Просто вещь определяется совокупно своим родом и своим именем. Рождение вещи неотделимо от ее именования. Точно так же как одно только имя не указывает на вещь, один только род тоже не указывает на вещь. Тем не менее, ситуация с родом кажется понятнее: род определяет вещь как вещь такого-то рода; называя род, мы апеллируем к установленному, и наш собеседник должен нас понять. Что определяет навязываемое нашим собственным произволом имя, кажется непонятным. Можно ответить, что имя определяет вещь как именно эту вещь, однако таким образом мы только снова сводим дело к эмпирическому дискурсу, заменяя общее понятие имени частным случаем эмпирического имени. Заметим что "определительный" вопрос "что это такое?" уже предполагает, что вещь, о которой спрашивают, имеет эмпирическое имя "это". Исходя из этого, можно было бы перевернуть описанную выше ситуацию и сказать, что сначала дается (эмпирическое) имя, а затем с помощью вопроса "что это такое?" устанавливается род. Однако это тоже, очевидно, неверно, поскольку с помощью одного только имени "это" нельзя ни на что указать. Можно указать на "это дерево" или "эту точку", однако просто "это" не указывает ни на какую вещь. Поэтому род не есть ответ на вопрос "что это такое?". Ответ на вопрос "что это такое?" - это всегда вид, а не род. Роды не имеют определения , поскольку дать определение значит нечто установить, а роды уже установлены. Так в геометрии не дают определения "точке" и "прямой" или, по крайней мере, "вещи" (у Гильберта). Сразу заметим, что имя тоже не имеет определения как и род, хотя, по видимости, совсем по другой причине - имя случайно и произвольно. Это, в соответствии с рассуждением о следе, означает связь рода и имени с неопределенностью. Однако между неопределенностью следа и неопределенностью рода и имени есть все же существенная разница: хотя мы не можем дать "этому дереву" или "точке А" определений, мы все же говорим, что и "это дерево" и "точка А" есть нечто определенное. Определенное без определения. Отсюда ясно, что определенность о которой здесь идет речь, есть нечто первичное по отношению к вопросу "что это такое?" и, соответственно, по отношению к определению. Заметим, что для этой первичной определенности имя и род играют одинаковую роль: просто "это" не является определенным нечто так же как и просто "дерево". Таким образом, эта первичная определенность не является скорее заранее установленной, чем сейчас устанавливаемой, скорее необходимой, чем произвольной, скорее природной, чем искусственной. Отсюда же следует, что след вещи является неопределенным не только в том смысле, что он не может быть определен, но и в том смысле, что он не может быть определенно назван и предъявлен. "Это дерево" тоже не имеет определения, однако оно может быть названо и предъявлено. След не может быть назван и предъявлен. Поэтому, повторяем, нужно различать чертеж геометрической фигуры и ее след. Поскольку след не может быть назван, нужно иметь в виду, что "след" - такая же метафора как "материя" или "тесто". Метафора не является ни заранее установленной как род, ни произвольно устанавливаемой как имя, ни тем, что совмещает установленность и устанавливаемость как свойство. Метафора вообще не стоит на месте - ни заранее, ни теперь. (Греческое слово "μεταφορα" означает "перемещение".) Поэтому метафора это не название: назвать можно вещь, нечто, а метафора переиначивает всякую вещь, делает ее другой вещью. Метафоричность следа является абсолютной так же как его неопределенность. Поэтому след вещи есть метафора вещи. "След" так же как и "материя" - метафора, а не термин.

Различая род и имя, мы различаем генерическую (родовую) и нумерическую (именную) определенность вещи. Почему именную определенность мы называем нумерической, то есть относящейся к числу? Такова традиция (7), смысл которой является для нашего вопроса чрезвычайно существенным. Попробуем в ней разобраться.

Мы привыкли различать вещи по их свойствам. Однако различие свойств является вторичным по отношению к генерическому и нумерическому различию, поскольку свойства вещей вторичны по отношению к самим вещам, а род и имя входят в структуру самой вещи. Генерическое различие вещей не есть различие их свойств, поскольку роды не определяются через свойства. Генерическое различие вещей необходимо, то есть никакой род не может быть единственным, поскольку так же как функция каждого имени состоит в том, чтобы отличаться от всякого другого имени, функция рода состоит в том, чтобы отличаться от всякого другого рода. В этом отношении роды и имена идентичны. Род не может быть родом, если он не отличается от другого рода. Когда все вещи объединяют в один род "вещей", то другим родом оказываются, например, свойства вещей. Вещи и их свойства отличаются друг от друга не своими свойствами. Это пример генерического различия, нередуцируемого к различию свойств. В других случаях такая редукция может быть произведена вместе с редукцией родов к видам (ср. прим. 6). То, что нумерическое различие, то есть различие по именам не есть различие по свойствам, еще более очевидно. Точка A не обязана отличаться от точки B какими либо свойствами, чтобы вообще от нее отличаться. (Хотя отличие случайных свойств в этом случае может иметь место - например, точка A может лежать на некоторой прямой, а точка B нет.) Так же как и род имя не может быть единственным. Поэтому никакая вещь не является единственной возможной в своем роде.

Начнем сначала. Называя род, мы определяем вещь генерически. И это не значит, что мы приписываем вещи какие-либо свойства. Но называя только род вещи, мы еще не называем вещи. Назвав род "точка", мы имеем не вещь точку, а точки в неопределенном числе. Чтобы определить число точек, нужно их перечислить, то есть назвать по именам. Только дав точкам имена, например, " A" и "B" или "первая" и "вторая", мы можем сказать, что мы имеем две вещи: точку A и точку B или первую и вторую точку. Перечислить вещи это то же самое, что назвать их по именам. Этим и объясняется традиционное название "нумерическое различие" по отношению к различию по именам. Вспомним теперь, что когда в математике говорят о бесконечности, например, о бесконечном числе точек на отрезке, всегда имеют в виду неименованные вещи, хотя и называют их род. Вслед за различением рода и имени, генерической и нумерической определенности вещи мы можем также различить генерическую и нумерическую неопределенность (генерический и нумерический след) вещи. Нумерическая неопределенность (нумерический след) вещей данного рода, и есть правильно понятое выражение "бесконечное число вещей данного рода", например "бесконечное число точек данного отрезка" (8). Заметим, что для того чтобы говорить о бесконечном числе вещей данного рода, нужны сами вещи этого рода, то есть именованные вещи, которые можно перечислить. Например, чтобы говорить о бесконечном числе точек отрезка, необходимо перечислить несколько точек этого отрезка.

Однако перечислить вещи это не то же самое, что определить их число. В случае, когда в качестве имен используются порядковые числительные, эти две процедуры становятся трудноразличимыми, однако и в этом случае различие между ними состоит в том, что число не является произвольным именем. Называя вещи "первой" и "второй" мы сохраняем произвольность именования и предполагаем, что вторая вещь могла быть названа "первой" и наоборот. Но в выражении "две вещи" "два" уже не является произвольным именем. "Две вещи" нельзя переименовать в "три вещи". "Два" в выражении "две вещи" сопоставляется с именем, поскольку предполагает возможность перечисления вещей по именам. Но, с другой стороны, оно соотносится с родом, скажем, в выражении "две точки". Таким образом, "два" так же как и любое другое число является видом. При этом число является, по всей видимости, простейшим видом, поскольку свойство вещей "быть в данном числе", коренится в именовании этих вещей, то есть в самих этих вещах.

О числах как видах мы читаем в последних главах "Метафизики" (9), где они отличаются от "математических чисел". Кажется, что это различение относится только к тонкостям дискуссии вокруг так называемого "неписанного учения Платона". На самом деле, оно имеет совершенно прозрачный смысл и может быть прямо продемонстрировано на материале античной арифметики. Евклид (10) изображает числа с помощью смежных геометрических отрезков. Впрочем, мы должны критически воспринять принятую платоническую терминологию и не говорить наобум, что геометрический чертеж изображает "истинный" геометрический предмет, а такой геометрический предмет как отрезок изображает число. Подробный анализ платоновской теории изображения ("подражания") выходит за рамки этой статьи, но сказанного выше о геометрическом чертеже уже достаточно для того, чтобы воздержаться от необдуманного следования платонической "изобразительной" терминологии. Мы должны просто констатировать у Евклида следы вещей при разговоре о числах. И нам на самом деле не нужно фиксировать здесь такую геометрическую вещь как отрезок, так же как при разговоре об отрезке нам не нужно фиксировать такую эмпирическую вещь как чертеж. (Сам Евклид, разумеется, нигде не говорит, что для разговора о числах он прибегает к помощи геометрических фигур.) Возникает вопрос о том, какого рода вещи пересчитывает Евклид в своей арифметике - если нет рода вещи, то нет и вещи. Ответ на этот вопрос является важным для понимания арифметики как таковой: родом вещей, которые пересчитывает Евклид и следы которых мы у него находим, является "вещь". И то, что в арифметике именно "вещь" появляется в качестве рода неудивительно, поскольку любые вещи бывают в некотором числе. Попытка Гильберта рассматривать геометрические вещи как просто вещи, была поэтому важнейшим шагом его программы арифметизации математики - отдавал ли он себе в этом отчет или нет.

Вещи, о которых говорит арифметика, имеют имена. У Евклида эти имена такие же как в геометрии: отрезки, которые изображают числа, Евклид и называет как обычные геометрические отрезки. То, что у Евклида можно было бы назвать "математическим" числом пять - это некоторый отрезок AB, составленный из пяти отрезков. "AB" - это общее имя для тех пяти отрезков, из которых AB состоит. "Само" число пять - это вид (11) вещей AB, который выделяется по тому свойству AB, что AB состоит из пяти подобных частей. Заметим, что имя "математического числа" AB у Евклида есть не имя вещи, а общее имя вещей, например, вещей AC, CD, DE, EF и FB. Поэтому "математическое число" есть не вещь, а совокупность вещей. Впрочем, сам Евклид не рассматривает такие виды как "пять" или "шесть", но рассматривает такие виды как "четное", "нечетное", "простое", "составное" и так далее. Зато такие виды чисел рассматривает Никомах (12). У Никомаха как и у Евклида, с одной стороны, имеются "числовые картинки", которые показывают нам следы исчисляемых вещей, с другой стороны, имеются имена этих вещей, представляющие собой специально помеченные буквы и их комбинации, аналогичные нашим записям "5", "6" или "12", а с третьей стороны, есть нечто промежуточное - собственно числа, о которых идет речь. Это промежуточное между родом и именем и есть вид. Мы видим, что если в геометрии виды фигур остаются чем-то вторичным по отношению к самим фигурам, то в арифметике именно виды-числа выходят на первый план. Отсюда понятно, почему Платон именно арифметику считает наиболее близкой из всех математических дисциплин к идеалу "диалектической эпистемы", которая должна иметь дело с одними только видами (13) , а в поздний период своего творчества - в "неписанном учении" - пытается построить "диалектическую эпистему" именно на основе арифметики (14).

Различение "чисел-видов" и "математических чисел" не может считаться только спецификой античной математики. Мы и сейчас при разговоре о числах испольуем как произвольные имена (переменные) так и установленные виды, например, 4 или 5. Мы сегодня можем во всяком арифметическом рассуждении поменять имя натурального числа "n" на имя "m" так же как Евклид мог поменять имя "математического" числа AB на CD. Однако до сих пор в математике остается общим местом платоновская догма, согласно которой "существуют только виды", и до сих пор математики остаются глухи к соображениям Аристотеля по поводу того, что вид определяется через свойство, а свойство требует вещи, свойством которого оно является. Поэтому "натуральное число n" или "натуральное число m" мыслятся как некоторые неопределенные названия, которые получают определенность только "принимая значения" вроде "5" или "6", тогда как сами натуральные числа 5 и 6 мыслятся как определенные вещи, существующие независимо от того, принимает ли какая-либо переменная такие значения или нет. На самом деле, именно имена "n" или "m" определяют совокупность вещей, а 5 или 6 есть уже вид этой совокупности. Правда, определить совокупность вещей здесь еще не значит определить все вещи из совокупности. Поэтому "натуральное число n" или "натуральное число m" правильно мыслятся как неопределенные названия и правильно говорят, что они становятся определенными числами тогда, когда принимают конкретные значения. Однако неправильно мыслить, что сами эти значения являются чем-то определенным без того, чтобы некоторые переменные эти значения принимали. "N равное 5" указывает на совокупность определенных, то есть переименованных и перечисленных вещей. Просто "5" само по себе не указывает ни на какую совокупность вещей. Если не говорить о том, что 5 это значение переменной, нужно говорить о пяти точках или любых других пяти вещах, в частности, просто о "пяти вещах". Следы вещей, о которых говорит арифметика, современная математика показывает, в частности, с помощью "числовой прямой" (15).

Выше мы сказали, что такое бесконечное число вещей любого рода. Теперь мы можем сказать, что такое бесконечное число самих чисел или бесконечность натурального ряда. Бесконечность натурального ряда - это специфическая числовая неопределенность (неопределенность числа-вида) вещей. Так же как нумерическое определение всякой вещи предполагает ее нумерическую неопределенность, любое определение числа вещей предполагает их специфическую числовую неопределенность. Обратно: так же как нумерическая неопределенность предполагает нумерически определенные (именованные) вещи, специфическая числовая неопределенность предполагает определенные виды-числа. И так же как нумерическое определение вещи предшествует ее специфическому определению, нумерическая неопределенность вещи предшествует ее специфической неопределенности. Например, пять вещей любого рода предшествуют числу пять как их виду, а бесконечное число вещей любого рода предшествует бесконечности натурального ряда.

на главную страницу

Примечания:

(1) См. Г.Кантор Труды по теории множеств М.1985. Альтернативное понимание процесса порождения чисел - как "свободного становления" принадлежит Брауэру. См. L.E.J.Brouwer Collected works 1975 v.1

(2) B.Russel The philosophy of logical atomism // The Monist London 1918

(3) Можно указать много примеров, когда уникальные собственные имена становятся нарицательными. "Ксероксом", несмотря на протесты фирмы, в современном русском языке называется любой копировальный аппарат, работающий по соответствующей технологии. Имеются даже производные слова "ксерокопия" и "ксерокопировать". Ограниченность списка употребительных личных имен, наоборот, служит тому, что человек конституируется как вещь, независимая от своего имени. Кстати, насколько мы могли судить по доступной литературе, лингвистика прошла мимо этого простого факта.

(4) Д. Гильберт Основания геометрии Москва 1948

(5) При современном способе классификации треугольников виды выделяются только по наличию, но не по отсутствию специфического свойства. В частности, свойство иметь две равные стороны определяет вид равнобедренных треугольников, а свойство не иметь две равные стороны - нет. "Разносторонние" треугольники отсутствуют в современных школьных учебниках, хотя есть еще у Киселева. (См. А.П.Киселев Элементарная геометрия М.1980.) Поэтому сегодня можно по-разному понять утверждение о том, что данный треугольник не является равнобедренным: или так, что 1) у треугольника все стороны различны, или так, что 2) треугольник не обязательно имеет две равные стороны. В античной математике, где родо-видовое играло более важную роль, чем в современной математике, эта трудность была обойдена: там виды выделяются не только по наличию, но и по отсутствию свойства. Получается три вида треугольников: равносторонние, равнобедренные (не включающие равносторонние) и разносторонние (см. Евклид "Начала" М. 1950 т.1 кн.1 опр. 20). Здесь каждый отдельный треугольник относится к одному и только к одному виду. С точки зрения различения рода и вида, античный способ классификации является более приемлемым.

(6) Мы здесь рассматриваем "треугольник" как род, хотя он в свою очередь может быть определен как вид "многоугольника", далее как вид "фигуры" или даже как вид "вещи" при аксиоматическом подходе. Это не имеет значения для нашего примера.

(7) См. П.Флоренский Столп и утверждение истины. М. 1990 Приложение 18.

(8) Заметим, между прочим, что и "бесконечность" и неопределенность" суть разные переводы одного греческого термина "απειρον".

(9) Аристотель. Сочинения в 4-х томах т.1 М. 1976

(10) Евклид. Начала М.1950 т.2 кн.7-9

(11) Заметим, что определяя вид через специфическое свойство, мы понимаем вид по Аристотелю. Платон, у которого нет понятия свойства (аристотелевского "συμβηβεκοσ"), определяет вид (ειδοσ) как раз через "самость" (το κατ'αυτο) .

(12) Nicomachus Gerasenus Introduction to Arithmetic Michigan 1938

(13) О "диалектической эпистеме" см. Rep.510b-511d (Платон Сочинения в трех томах т. 3(1)

М. 1971). Об арифметике - ib. 522c-526c.

(14) О "неписанном учении" см. Gaiser K. Platons ungeschribene Lehre Stuttgardt 1963

(15) Мы здесь не затрагиваем проблему действительного числа и говорим только об изображении натуральных чисел.