Андрей Родин

Идея внутренней геометрии*

Введение

Математические идеи оказывают огромное влияние не только на естественные науки, но и на человеческое мышление в целом, в том числе и на практическое мышление. При этом часто оказывается, что математические конструкции, которые кажутся свободными творениями человеческого ума и фантазии, очень быстро находят применение в естественных науках и технике. Вигнер назвал этот феномен, указывающий на неразрывную - хотя и неочевидную и часто совершенно неожиданную - связь математики и опыта «непостижимой эффективностью математики в естественных науках» (1). Какова природа этой связи? Нам представляется, что объяснение этой загадки состоит в том, что математика укоренена в опыте с самого начала, то есть что фундаментальные математические понятия (например, понятие числа) имеют эмпирический характер. Такая укорененность означает, что вне опыта эти понятия не имели бы никакого смысла, были бы совершенно непонятны, то есть не были бы понятиями. Представим себе совершенно хаотический мир (можно подумать о пламени), в котором ничего нельзя сосчитать, который совершенно меняется каждое мгновение, в котором нет памяти и в котором нельзя выделить никаких «штук» и «разов». В таком мире понятие числа не имело бы никакого смысла, и значит, не могла бы существовать арифметика. Гельмгольц достаточно убедительно (хотя, может быть и чересчур формально, не до конца выявляя предпосылки собственных рассуждений) показал, что евклидова геометрия основана на нашем опыте твердых тел: в жидком мире такая геометрия бессмысленна (2). Если допустить, что математические понятия имеют эмпирическую природу, то «непостижимая эффективность математики» не покажется такой непостижимой, поскольку это будет означать, что математическая теория связана с миром опыта всегда и везде, а не только в те особые моменты,

* Статья подготовлена при поддержке РГНФ, Минобразования и Института Открытое Общество

когда эта теория «применяется» в какой-либо эмпирической области. Вопрос о специфике такого «применения» является важным и требует внимательного разбора, однако, на наш взгляд было бы совершенно неправомерно предполагать, что эти «применения» составляют единственный способ контакта математики с миром опыта. Этот вывод покажется тем более убедительным, если мы принять во внимание то обстоятельство, что сами математические теории очень часто формируются под влиянием конкретных практических задач (например, землемерных и пр.) «Непостижимая эффективность математики» состоит в том, что эти теории обычно имеют гораздо более широкое значение, в том числе и в смысле возможных практических применений, чем решение той практической задачи (или того класса практических задач), с которой эта теория первоначально могла быть связана. Это, однако, означает не то, что математика может обойтись без опыта, а только то, что математика связана с опытом настолько глубоко, что эта связь не может быть заранее ограничена указаниями на конкретные практические задачи.

Одно из основных возражений против эмирического характера математических понятий связано с именем Канта, который считает математику *априорной*. Априорность математики не означает, что она не связана с опытом или слабо связана с опытом. Априорность математики означает, что сам опыт подчиняется математическим законам, которые поэтому должны в каком-то смысле предшествовать опыту - если не генетически, то логически. Аргумент Канта основан на следующем соображении: всякий опыт конечен и относителен, а математика претендует на *необходимость* своих выводов, то есть на то, что ее утверждения истинны всегда и везде. Например, мы можем всю жизнь складывать спички и все же никогда таким образом не докажем наверняка, что взяв два раза по две спички мы получим четыре спички; поэтому, говорит Кант, 2х2=4 это априорная истина, которую мы только обнаруживаем с помощью спичек, которые дают нам эмпирический материал, чтобы эту истину обнаружить. Конечно, кажется нелепым считать 2х2=4 индуктивной гипотезой вроде гипотезы *все лебеди белы* -

поскольку нетрудно представить себе черного лебедя, даже если такого и не доводилось видеть, а вот можно ли придать нетривиальный смысл утверждению 2x2=5 - это по меньшей мере неочевидно (и можно допустить, что это вообще невозможно сделать). Тем не менее, нет достаточных оснований понимать необходимость математических выводов так, как это делает Кант - в абсолютном и вневременном смысле. Конечно, математические теории не меняются так же быстро, как наши чувственные впечатления, однако нет ничего нелепого в том, чтобы считать, что они возникают, изменяются и исчезают в пространстве и времени наряду с людьми, лебедями, книгами, языками, городами и традициями. Кажется, со времени Канта идея вечной истины сильно утратила популярность, и напротив, возникло понимание того, что изменчивость науки является такой же фундаментальной, как и изменчивость мира. (Более того - это уже наша гипотеза, которую здесь невозможно развивать подробно - эту динамику совершенно необязательно понимать в смысле бесконечного *приближения* к вечной истине, пользуясь по сути тем же геометрическим образом, который мог иметь ввиду Платон, думая о гончаре, пытающемся сделать тарелку как можно более круглой. Конечно, идея бесконечного приближения знания к вечной истине делает само знание если и не вечным, то по крайней мере долгосрочным или даже «бессрочным» проектом. Однако это не единственный способ, которым можно обеспечить такую бессрочность. Кроме того, определенная «устойчивость», которой, по-видимому, должно обладать всякое знание, не обязательно предполагает неизменность и отсутствие всякой динамики.)

Если же отказаться от идеи о том, что корректные математические рассуждения должны быть необходимыми в абсолютном и вневременном смысле, то вывод Канта об априорном характере математики лишается убедительности.

Вопрос о внутренней геометрии, который мы рассмотрим ниже, имеет к кантовскому априоризму особое отношение (на что указывали многие, в частности, Рейхенбах (3)). Кант считает пространство априорной формой, определяемой геометрией этого пространства (естественно думать, что Кант имел в виду евклидову геометрию). Внутренний подход, впервые предложенный Гауссом (4), состоит, грубо говоря, в том, что пространство как целое вообще не является данным и определенным, а вместо этого рассматривается движущийся наблюдатель, который на основании локальных измерений и наблюдений делает выводы о том, в каком пространстве он находится и какова геометрия этого пространства. Кажется заманчивым считать эту конструкцию моделирующей ту ситуацию, в которой на самом деле находятся исследователи реального пространства, геометрия которого, таким образом, оказывается эмпирическим фактом о мире. Мы увидим, однако, что ситуация на самом деле не такая простая, и что конструкции, используемые при внутреннем подходе в геометрии, обязательно также предполагают и некоторое внешнее заранее заданное пространство. Тем не менее, нет необходимости вслед за Кантом считать геометрию этого внешнего пространства фиксированной и жестко связанной с нашим рассудком - гораздо естественнее думать о ней как о гипотезе, которая может быть заменена на другую, если это позволит построить лучшую теорию.

В следующих двух разделах этой работы мы попытаемся эксплицировать идею внутренней геометрии, а затем укажем на некоторые метафизические следствия, которые, кроме прочего, могут иметь важное практическое и эпистемологическое значение.

История про плоскатиков

Представим себе нарисованных на листе бумаги *плоскатиков* - плоских человечков, которым дана способность двигаться в пределах этого листа. Допустим, что тела плоскатиков (как и наши тела в нашем мире) непроницаемы друг для друга (то есть, что они не могут смешиваться как жидкости), и что они подобно нашим телам могут хотя бы приблизительно сохранять свою форму. Что бы мы почувствовали, если бы оказались на месте плоскатиков, и что бы мы смогли узнать о своем мире? Двигаясь по прямой (из любого места в любом направлении) плоскатик дойдет до края листа и так узнает, что его мир имеет границу. Двигаясь вдоль границы и не поворачивая назад, он в какой-то момент поймет, что проходит один и тот же путь многократно (если он умеет идентифицировать свое местоположение и обладает памятью).

История становится более интересной, когда мир плоскатиков перестает быть плоским, хотя и остается двумерным. Предположим, что плоскатик нарисован на поверхности шара. Тогда, двигаясь постоянно в одном и том же направлении, он не обнаружит границы, но опять в какой-то момент наткнется на собственные следы. Возможны и более сложные эксперименты. Предположим, что начиная движение вперед из А, плоскатик в какой-то момент возвращается в А. После этого плоскатик поворачивает, например, направо, и опять идет прямо, пока снова не окажется в А (в третий раз). Если плоскатик нарисован на шаре, он по дороге в А непременно еще раз наткнется на свои старые следы. Если же он нарисован на торе (поверхности бублика), то этого может не произойти. Так, путешествуя, плоскатики могут многое узнать о своем мире (рис.1).

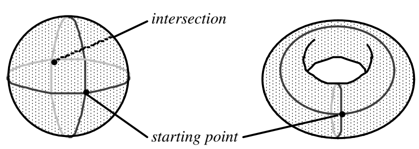


Рис. 1 (5)

Эта история была придумана Edwin'ом A. Abbott'ом в 1882 году и названа автором «многомерным романсом» (*Flatland: A Romance of Many Dimensions*) (6). Однако, как представляется, самое интересное в этой истории это не идея многомерного пространства. Аналогичные эксперименты могли бы производить существа, живущие в пространствах любого числа измерений, например, живущие на линиях или живущие в трехмерных пространствах вроде нашего. Самой важной для нас в рассказанной истории является та идея, что на некоторый геометрический объект можно посмотреть не извне и не «ниоткуда», как этому учат в школе, когда рассказывают про треугольники, круги, шары, пирамиды и т.д., а *изнутри*, представив себе, что данный объект является для нас миром, в котором мы живем. В этом и состоит идея внутренней геометрии.

Попробуем проанализировать рассказанную историю подробнее. Как я уже сказал, предположение о том, что плоскатики живут в мире двух измерений не существенно (по крайней мере для наших настоящих целей). Важными мне представляются следующие три обстоятельства.

(1) Главный герой истории - это Наблюдатель, Перспектива, Точка Зрения или Я. (Математически это - локальная система координат; см. пункты 2 и 3 ниже.) Чтобы понять смысл рассказанной истории необходимо отождествить себя с одним из плоскатиков, встать на точку зрения плоскатика. Однако важно одновременно сохранить и «обычную» точку зрения, которая по отношению к плоскому миру является *внешней* точкой зрения всевидящего ока. Мы видим шар, по поверхности которого ползают плоскатики, и заранее *знаем*, куда и как они могут доползти, и одновременно мы пытаемся поставить себя на место плоскатика, спрашивая, как много из того, что уже *знаем мы* о плоском мире (например, что этот мир представляет собой сферу), сможет узнать плоскатик, не подозревающий и том, что такое третье измерение. То есть чтобы понять рассказанную историю нужно не просто встать на внутреннюю точку зрения, но нужно научиться свободно переходить от внутренней точки зрения к *внешней* и наоборот (7). Разумеется, все, что касается внешней точки зрения, относится к *внешней*, а не внутренней геометрии. Но это значит только то, что идея внутренней геометрии не существует сама по себе. Идея состоит не просто в том, что вводится какая-то новая геометрия, а в том, что проводится различие между внутренней и внешней геометрией. Внешняя геометрия - это геометрия пространства, в котором находятся лист бумаги, сфера, тор или любая другая поверхность, на которой живут плоскатики (8). Кстати, это обстоятельство объясняет, почему идею внутренней геометрии легче всего иллюстрировать именно на примере двумерного мира. Причина состоит в том, что в качестве внешней в этом случае можно взять «обычную» (евклидова) геометрию трехмерного пространства, которую мы привычно считаем геометрией нашего повседневного мира. Кроме того, если иметь в виду *метрические* свойства, то случай минимальной размерности, когда такие свойства могут оказаться

внутренними, то есть не зависящими от внешнего пространства и способа вложения внутреннего пространства во внешнее - это как раз случай, когда внутреннее пространство является поверхностью: все линии в метрическом смысле эквивалентны прямой линии и «форма» линии полностью определяется способом ее вложения во внешнее пространство (9). Однако если иметь в виду более простые и более фундаментальные *топологические* свойства, то это не так: окружность или любая линия с самопересечениями топологически не эквивалентна прямой. (Топологические свойства более фундаментальны, чем метрические в том смысле, что всякая метрика индуцирует топологию, но не всякая топология метризуема.) Исторически же идея внутренней геометрии была предложена Гауссом именно в связи с метрическими свойствами поверхностей и развита Риманом (10) в связи с метрическими свойствами пространств произвольного количества измерений. Переход от метрических свойств к топологическим заставляет также отказаться от идеи Римана о том, что внутренняя геометрия является сугубо локальной, то есть действующей только в некоторой бесконечно малой окрестности. Топологические свойства пространства являются одновременно глобальными и, как мы видели, внутренними. Как внутренний подход связан с локальностью, мы подробнее проанализируем в следующих двух пунктах.

(2) Различие между внешней и внутренней точкой зрения состоит не только в том, что внешний наблюдатель наблюдатель наблюдает извне, а внутренний - изнутри. Существенный момент состоит и в том, что внешний наблюдатель неподвижен, а внутренний *движется*. Как мы видели из приведенных примеров, узнать что-то о своем мире внутренний наблюдатель может только путешествуя, а не просто созерцая свой мир изнутри. Внешнему же наблюдателю достаточно чистого созерцания. Хотя мы на самом деле не можем посмотреть на шар одновременно со всех сторон и увидеть всю поверхность шара сразу, обычная стереометрия абстрагируется от этого обстоятельства: считают, что шар вместе со своей поверхностью целиком *дан* в пространстве. Заметим также, что внутренний наблюдатель обязательно должен обладать *памятью* - в противном случае он

ничего не сможет извлечь из своих путешествий, поскольку у него не останется от них никаких воспоминаний. На самом деле память необходима внутреннему наблюдателю и во время путешествия: иначе он не сможет вспомнить, проходил ли он через данную местность раньше или же оказался там впервые; натолкнувшись на собственные следы, он не сможет вспомнить, что это именно его следы, и т.д. Внешнему же наблюдателю память, вообще говоря, не нужна, поскольку в единственный момент времени он видит сразу все, что вообще способен увидеть. Говоря другими словами, время, движение и память существенным образом участвуют во внутренних наблюдениях, и не участвуют во внешних наблюдениях (11).

Кроме того в приведенных примерах было существенно, чтобы наблюдатель был *пробным* и его наблюдения воспроизводились при некоторой вариации начальных условий. Так, мы можем утверждать, что совершив кругосветное путешествие, Магеллан доказал шарообразность земли, только имея в виду, что *каждый* человек в принципе может совершить кругосветное путешествие, причем не обязательно повторяя путь Магеллана в деталях. Если бы кругосветное путешествие Магеллана оставалось уникальным событием, оно еще ничего не говорило бы о топологии земной поверхности.

Идея движения в римановой геометрии может быть реализована двояко. Во-первых, с помощью «метода подвижного репера». В этом случае «точка зрения» математически означает некоторую (локальную) систему координат, которая предполагается движущейся, то есть сохраняющей свою идентичность в различных положениях в пространстве. Задача состоит в том, чтобы описать это движение, не прибегая к фиксированной внешней системе координат. Покажем как это делается в простейшем случае кривой на поверхности. Представим себе, что кривая описывается движущейся точкой O. Пусть l - длина дуги кривой, пройденной точкой на данный момент времени. Для удобства мы будем отсчитывать время по длине пройденного пути. Тогда *скорость* движения O $v=v(l)$ будет по модулю равна **1** и направлена по касательной к траектории, а *ускорение* $k(l)=dv/dl$ будет всегда перпендикулярно к скорости. Модуль $|k|$ называют *кривизной*, а обратную

величину R=1/k - *радиусом кривизны* кривой в данной точке. Если теперь взять единичный вектор скорости v(l) и единичный перпендикуляр к нему n в качестве движущейся прямоугольной системы координат (подвижного репера), то будут верны *формулы Френе*, которые показывают как движется репер: dv/dl=kn и dn/dl=-kv. Поскольку модуль v не меняется, можно также записать $|d\varphi/dl|=k$, то есть кривизна это скорость поворота репера (тогда как скорость его движения вдоль кривой постоянна и равна по модулю $|v|=\mathbf{1}$). Заметим, что указанный метод позволяет судить не о внутренней геометрии кривой, а о внутренней геометрии поверхности, на которой лежит кривая (поскольку понятия касательной и нормали к кривой имеют смысл только по отношению к объемлющему пространству). Пусть наша кривая это окружность. После того, как касательная, образующая одну из осей подвижного репера совпадет с исходным положением, вектор нормали может либо тоже оказаться в исходном состоянии, либо оказаться направленным в противоположную сторону. Если поверхность - цилиндр, будет реализован первый случай, если поверхность - лист Мебиуса, то может быть реализован второй.
Альтернативный подход на самом деле идет несколько вразрез с историей про плоскатиков. Вместо того, чтобы предполагать наблюдателя, движущегося в неподвижном объемлющем пространстве (которое ни в какой момент не видно все целиком), здесь предполагают множество неподвижных (относительно неподвижного пространства) наблюдателей и ставится вопрос о том, каким образом они могут «коммуницировать» по поводу наблюдаемого. Формально такой переход дается просто: никто не мешает в предыдущем примере говорить не об одном репере, движущемся вдоль кривой, а о множестве реперов, имеющих начала в разных точках кривой. В следующем пункте мы покажем, что принципиальным моментом является то, что эти моментальные наблюдатели не взаимозаменимы, поскольку каждый из них наблюдает только некоторую область пространства (обычно предполагаемую бесконечно малой) и не один не наблюдает все пространство целиком.
Новая формулировка позволяет естественнее поставить вопрос об *объекте*, то есть о том, что, собственно, наблюдается. Заметим, что в предыдущем примере этот

вопрос напрямую не ставился. *Объективным* мы называем то, что в каком-то важном смысле не зависит от той особенной точки зрения, под которой данная вещь рассматривается. Объект это объективная вещь. Объектом в нашем случае могла бы быть такая вещь В, которая одинаково (с точностью до некоторого фиксированного преобразования П) наблюдается всеми моментальными наблюдателями. Кроме того, нужно, очевидно, предположить, что преобразование П не зависит от конкретного В, а годится по крайней мере для некоторого широкого класса объектов. (Традиционная точка зрения состоит в том, что такое П единственно и характеризует геометрию пространства, которая предполагается фиксированной. Если пространство предполагается евклидовым, то П - это движения, сохраняющие евклидову метрику.) Поясним сказанное на примере. В качестве примера объекта возьмем письменный стол. С разных сторон он выглядит, конечно, по-разному. Однако, изменения видимого образа стола в зависимости от позиции наблюдателя подчиняются законам перспективы, которые не зависят от этого конкретного стола: если вместо стола рассматривать стул, эти законы останутся теми же. На самом деле, этот бытовой пример сложнее, чем та ситуация, о которой мы говорим, поскольку стол ни из какой позиции не бывает виден весь целиком. Чтобы упростить этот пример, мы могли бы вместо стола взять нарисованный мелом на доске круг, который можно видеть целиком (хотя физиология зрительного восприятия говорит, что одновременность восприятия и в этом случае является, так сказать, вторичной, тогда как в действительности наши глаза «сканируют» всякий объект по частям и только затем из полученной информации в нашем мозге конструируется некая целая картина). Интересно, что не существует примера объекта, который в действительности был бы виден сразу всем возможным наблюдателям: любой объект виден невооруженным глазом только с близкого расстояния, и хотя возможности зрения можно увеличить за счет технических средств, понятия объективности и объекта, очевидно, не предполагает, что все люди на земле (а именно их, по всей видимости, и нужно считать потенциальными наблюдателями) одновременно сосредоточивают свое внимание на одной и той же вещи. Эти понятия предполагают другое: не то, что *все* люди действительно одновременно видят то же самое (с точностью до некоторого преобразования, например, задаваемого законами перспективы), а то, что *любые* два человека *могут* увидеть то же самое, *если правильно* посмотрят, в простейшем случае - если займут одну и ту же позицию. Таким образом, пространственно-временная модальность заменяется в идее научной объективности на модальность *возможности*. Это поднимает целый комплекс проблем, который не место здесь рассматривать. Ограничимся пока тем, что объективное положение вещей не зависит от частной перспективы, в которой рассматривается ситуация. В более формальном смысле такая независимость означает инвариантность относительно преобразований координат. Впрочем, такая формализация сразу требует уточнений: какие именно системы координат считать допустимыми и инвариантность относительно какой группы преобразований следует иметь в виду. Важная часть истории физики состоит как раз в попытках давать на эти вопросы различные ответы: например, ньютоновская механика выделяет в качестве класса допустимых систем отсчета инерциальные системы и в качестве допустимой группы преобразований берет галилееву группу; в специальной теории относительности галилеева группа заменяется на лоренцеву; в общей теории относительности ситуация уже меняется более глубоким образом, о чем сейчас и пойдет речь.

Напомним, что при новом подходе, о котором мы сейчас говорим, наблюдатели считаются неподвижными. Это значит, что объект - в том смысле, в котором мы говорили об объекте выше - должен быть по меньшей мере наблюдаемым для всех этих наблюдателей сразу (даже если отвлечься от важного вопроса о том - *каким именно образом* наблюдаемым). Однако поскольку моментальные наблюдатели остаются *внутренними* (и предполагаются неподвижными), ни один из них не видит весь мир целиком, и в общем случае мы не можем предполагать, что все они видят один и тот же объект (если считать, что объект может находится в любой области пространства; предположение о том, что в пространстве имеется некоторая специальная область «объективности», которая видна сразу всем локальным наблюдателям, кажется не лишенным смысла, но совершенно противоречит существующим физическим теориям и плохо согласуется с существующей математикой). Следовательно объект в указанном выше смысле - назовем его *глобальным* объектом - в рамках внутреннего подхода невозможен. Грубо говоря, это означает, что строго объективным может быть только Бог, который смотрит на наш мир «ниоткуда» (по выражению Томаса Нагеля (12)) и видит его во всех подробностях сразу и целиком. Однако понятия объективности и объекта могут быть сами локализованы. С этой целью требование инвариантности относительно локальной точки зрения (и с точностью до некоторой группы преобразований) применяются не ко всему миру целиком, а только к *соседним* точкам зрения. На самом деле эта идея лучше отвечает обыденному опыту, чем классическая идея глобальной объективности: речь идет о том, что два человека, стоящие рядом по одну или по разные стороны стола видят в существенном смысле одно и то же (один и тот же объект, хотя, возможно, и с разных сторон) - без всяких предположений о том, в каком смысле эта ситуация могла бы быть отнесена к человечеству в целом (или даже к какой-то значительной его части, например, к взрослым, европейцам или мужчинам). Эту идею несложно переформулировать и на языке движущегося наблюдателя: речь идет о том, чтобы движущийся наблюдатель, обладающий только ограниченной и постоянно изменяющейся перспективой, мог бы все-таки по ходу своего движения наблюдать объекты. Объектом в этом случае мы будем называть такую вещь, которая остается в важном смысле одной и той же в глазах некоторого движущегося наблюдателя, который по ходу движения рассматривает ее с разных точек зрения. Если понятие глобального объекта предполагает, что такой движущийся наблюдатель видит одно и то же из *любого* положения и во всякий момент времени, то понятие *локального* объекта требует только того, чтобы объект оставался сам собой, пока он остается в поле зрения движущегося наблюдателя. Важно, что понятие локального объекта в этом смысле *не* означает локального «согласия» некоторой группы наблюдателей, которая может быть противопоставлена другой группе, которая не согласна с первой. «Согласие» в данном случае возникает между соседними группами, однако оно не транзитивно: если A соседствует с B, а B - с C, то согласие A с B и B с C не влечет согласия A с C.

Математически и физически идея локального объекта реализуется с помощью понятия *тензора.* Тензор в самом общем смысле это некоторый объект, для которого можно сформулировать определенные правила преобразования координат при переходе от одной локальной системы координат к другой, которые зависят от *типа* этого объекта и от данной пары системы координат, но не от данного конкретного объекта (впрочем, в противном случае было бы невозможно говорить о *правилах*, поскольку не может быть правила, которое действовало бы в единственной уникальной ситуации) (13). Такое понятие тензора годится и для того, чтобы соответствовать глобальному объекту (хотя и в этом случае появляется неклассический момент, который состоит в том, что идентичность объектов может задаваться различным образом - поскольку тензоры могут быть различных типов), однако в дифференциальной геометрии (и в общей теории относительности) тензоры используются локально, а именно речь всякий раз идет о переходе в новую систему координат, начало которой лежит в окрестности начала старой системы координат (в этом случае преобразования даже между криволинейными координатами можно считать линейными - с точностью до бесконечно малых второго порядка).

Поскольку понятие наблюдателя (тесно связанное с понятием субъекта, Я) является по меньшей мере неудобным для физики, а понятия объекта и объективности, наоборот, кажутся совершенно необходимыми для этой науки (в том смысле, что если физику не указать на объект, который он должен изучить или на возможность объективного положения вещей, которое он должен обнаружить, он вообще не будет знать, чем заниматься) неудивительно, что в физике возобладал именно этот второй подход, в рамках которых тензорам приписывают различные объективные физические положения дел (или положениям дел приписывают тензоры - это с какой стороны посмотреть). Однако необходимо подчеркнуть, что оба рассматриваемых подхода являются одинаково *внутренними* и отличаются от внешней точки зрения, в рамках которой неподвижным является (находящийся «нигде») наблюдатель, а объекты движутся. Представляя себе шар или тор, по которому ползают плоскатики, мы занимаем именно такую позицию внешнего наблюдателя. Тензор всегда неподвижен, прикреплен к точке пространства. Хотя когда говорят о тензорах, обычно не говорят о подвижных системах координат, речь идет опять об изменении точки зрения на объект (как перейти от одной точки зрения на объект к другой?), а не о том, что при фиксированной точке зрения, положения объекта в поле зрения меняется.

(3) И все же, что увидит внутренний наблюдатель, если остановится? Что он видит в каждый миг своего путешествия? Можем ли мы предположить, что в отличие от внешнего наблюдателя, который видит сразу *все* (имеется в виду - весь мир внутреннего наблюдателя, например, всю поверхность шара, на котором живут плоскатики), внутренний наблюдатель не видит вообще *ничего*? Конечно, такое предположение абсурдно: в наших примерах путешествующий внутренний наблюдатель должен был видеть по крайней мере собственные следы. Отличие внутреннего наблюдателя от внешнего состоит в том, что он не видит весь мир *сразу* (как и мы не видим сразу тот мир, в котором мы живем), однако он может увидеть любое место в мире, если окажется в этом месте. Вопрос состоит в том, насколько большим является «место», которое плоскатик может увидеть сразу целиком. Поскольку количественные соображения представляются в этом вопросе неуместными, кажется естественным предположить, что наблюдатель не имеет размеров вовсе, то есть является точечным, и, соответственно, что он может «наблюдать» только ту *точку* своего пространства, в которой непосредственно находится. Этого достаточно, чтобы наблюдатель смог обнаружить собственные следы: если он окажется в какой-то миг в некоторой точке, в которой он уже находился раньше, он сможет это зафиксировать. Такого наблюдателя можно назвать слепым, но не лишенным чувства осязания: он ничего не видит даже на коротком расстоянии, но ощущает, где находится в данный миг. Однако, как легко заметить, этого недостаточно, чтобы плоскатик мог путешествовать так, как об этом говорится в рассказе.

Чтобы понять, что мир устроен как поверхность шара, плоскатик должен был двигаться вся время *прямо*. В противном случае, он мог бы натолкнуться на собственные следы и на листе бумаги, просто описав на поверхности петлю - и это еще ничего не говорило бы о мире. Даже не имея точного математического определения того, что означает «двигаться прямо» в случае движения на сфере, понятно, что для того, чтобы сказать свернул ли ты в сторону или нет, необходимо иметь хотя бы минимальный обзор. Рассмотрим простейший случай движения по прямой на плоскости (листе бумаги). Приняв во внимание сколь угодно маленький отрезок прямой, можно приложить к этому отрезку линейку и продолжить его сколь угодно далеко. Но если принять во внимание только граничную точку этого отрезка, мы не получим никаких указаний на то, в каком именно направлении продолжать движение, чтобы продолжать двигаться в прежнем направлении. Обобщение понятия прямой на плоскости на случай произвольной гладкой поверхности называется *геодезической* - это линия кратчайшего расстояния между двумя точками. Чтобы использовать это определение, точки можно брать сколь угодно близкими, однако нельзя все же допустить, чтобы они совпали, то есть нельзя вместо двух точек взять одну (ср. предыдущий пример с прямой на плоскости). Итак, плоскатик может видеть только очень малую область своего мира, математически говоря - *сколь угодно малую* или *бесконечно малую* область (окрестность), однако эта окрестность не может все же выродится в точку (14). Понятие бесконечно малого составляет старую проблему математического анализа, которую несмотря на хорошо разработанные теории классического (основанного на потенциальной трактовке бесконечного малого) и неклассического (основанного на актуальной трактовке бесконечно малого) анализа вряд ли можно считать удовлетворительно решенной. В данном случае эта общая проблема имеет свою специфику. Во-первых, совсем не всегда имеет смысл предполагать, что обзор движущегося наблюдателя является «малым». Естественно предположить, что в некоторых положениях внутренний наблюдатель может иметь широкую перспективу и даже быть в состоянии видеть весь мир целиком (изнутри). Во-вторых, могут существовать особые точки (сингулярности), попадая в которые наблюдатель вовсе лишается перспективы (может быть, только такие области и следует называть в собственном смысле *точками*). На подобные предположения наталкивает не только обыденный опыт, но и геометрия многообразий (теория динамических систем, теория особенностей). Вопрос о точках представляется принципиальным: кажется, что приведенные выше замечания плохо согласуются с привычным взглядом, согласно которому всякое геометрическое пространство в некотором смысле состоит из точек (в сильном смысле, когда пространство рассматривается как *множество* точек, снабженное некоторой структурой, или же в более слабом смысле, восходящему к Аристотелю, когда подразумевают, что всякая область пространства *потенциально* содержит бесконечно много точек). Заметим, что вопрос о статусе *окрестности* точки, является по сути топологическим, поскольку окрестность обычно определяется как некоторое открытое множество, а топология задается с помощью различения открытых и закрытых множеств. Ниже мы подробнее обсудим этот вопрос в метафизической перспективе.

Мир и атом

Ограничиваясь пока по-прежнему геометрическими представлениями, поставим такие вопросы: (1) есть ли такая вещь (фигура, объект), на которую можно посмотреть *только* снаружи?; (2) есть ли такая вещь, на которую можно посмотреть *только* изнутри? В геометрии известен только один род вещей, на которые можно посмотреть только снаружи (то есть, у которых нет «внутренности») - это *точки*. Предположение о том, что все геометрические объекты в некотором смысле состоят из точек, означает, что всякий геометрический объект может быть в конечном счете представлен внешним образом, тогда как любые внутренние перспективы этого объекта являются, вообще говоря, излишними. (Например, это означает, что сфера или тор могут быть полностью заданы во внешнем трехмерном пространстве, причем таким образом оказываются заданными и «внутренние» свойства этих поверхностей.) Поэтому предположение о том, что все геометрические объекты состоят из точек, можно назвать *гипотезой экстенсиональности*. Мы видим, что гипотеза о том, что все геометрические объекты состоят из точек отвечает классическому экстенсиональному подходу, при котором геометрическое пространство всегда рассматривается как внешнее.

Метафизическим аналогом (или, скорее, обобщением) геометрического понятия точки является понятие *атома*. Поэтому атомистическую гипотезу, согласно которой все сущее состоит из неделимых частей, то есть атомов, можно также считать метафизическим обобщением геометрической гипотезы экстенсиональности (15).

Теперь попытаемся ответить на второй вопрос. Очевидно, есть только один род вещей, на которые можно посмотреть *только* изнутри, то есть вещей, не имеющих *внешности* - это *миры*. (Это можно использовать в качестве определения мира. Заметим, что такое определение мира не исключает множественности миров.)

Итак, мы видим, что понятия атома и мира оказываются двойственными (в том же смысле, в котором можно назвать двойственными понятия внешнего и внутреннего). Гипотезу о существовании мира (в определенном выше смысле - как вещи без внешности) можно по двойственности назвать гипотезой *интенсиональности* (16).

Можно попытаться представить себе чисто внутренний (интенсиональный) подход к геометрии, двойственный обычному внешнему. В такой геометрии принималась бы гипотеза о мире и отсутствовала бы гипотеза о точках; вместо точек рассматривались бы бесконечно делимые открытые области (но делимые не точками, а тоже областями). Интересно, что в общей теории относительности по-видимому принимаются обе гипотезы: предполагается существование мира, то есть универсального пространственно-временного многообразия, допускающего исключительно внутреннюю перспективу, и предполагается, что мир состоит из атомарных событий, которые математически отождествляются с точками этого многообразия (17). Ниже мы также приводим набросок интенсиональной теории множеств, двойственной стандартной экстенсиональной теории.

Атомистическая гипотеза и гипотеза о мире имеют важные эпистемологические следствия. Попытка строить геометрию и вслед за ней естественные науки чисто экстенсионально приводят к необходимости предварительного полного (вплоть до атомов) разложения (т.е. анализа) всякого изучаемого объекта. В естественных науках это требование может быть выполнено лишь условно, если договориться о том, что именно в данном считать «атомом», то есть о том, на каком уровне прекращать дальнейший анализ. В реальной ситуации такого рода ограничение всегда накладывается текущим состоянием фундаментальных исследований. На сегодняшний день первоэлементами сущего нужно, по-видимому, считать кварки, однако вполне может случиться, что у кварков будет впоследствии обнаружена внутренняя структура, как это уже в свое время случилось с химическими молекулами, физическими «атомами» и «элементарными частицами». Такое ограничение пределов анализа текущим состоянием знания можно было бы считать естественным, однако с ним связаны две серьезные методологические трудности. Во-первых, во многих случаях (и даже в большинстве случаев) такое естественное ограничение пределов анализа оказывается совершенно недостаточным. Мы не беремся здесь судить о том, в какой степени анализ элементарных частиц в терминах кварков можно считать на сегодняшний день успешно реализованным, однако совершенно очевидно, что современная наука не позволяет описывать в терминах кварков все природные явления. В этой связи особенно показателен пример биологии: несмотря на все успехи биохимии, попытки объяснить биологические явления в терминах химических реакций (которые в свою очередь сводятся к взаимодействию физических атомов, которые в свою очередь можно надеяться свести к взаимодействию кварков) приводят к тому, что исследователи просто опускают руки перед совершенно немыслимой сложностью биологических систем и вынуждены апеллировать к Проведению, чтобы объяснить, как все эти атомы и молекулы оказываются в нужное время в нужном месте, или же откладывать серьезные занятия биологией до тех пор, когда наука, может быть, научится с такой сложностью справляться.

Подчеркнем, что экстенсиональный подход требует окончательного анализа уже в качестве *предварительного* условия построения теории: следуя этому подходу, сначала нужно выяснить как из кварков образуются элементарные частицы и атомы (атомная физика), потом следует переходить к изучению относительно простых структур, состоящих из атомов (физика твердого тела, неорганическая химия) и только потом переходить к изучению все более сложных структур (органическая химия, биохимия, цитология, биология высших организмов). Если бы естествознание строго следовало этой программе, биология находилась бы еще в зачаточном состоянии или же не существовала вовсе! И хотя биологи вопреки требованиям экстенсионалистской методологии не переквалифицируются в физиков, а продолжают развивать свою науку, отсутствие ясно сформулированной методологической альтернативы делает статус их науки достаточно сомнительным: с последовательно экстенсионалистской точки зрения вся биология (включая современную биохимию) занимается исключительно тем, что описывает (и моделирует) явления, не добираясь до их причин и только в редких случаях обнаруживая за многообразием явлений относительно простые принципы и механизмы (как в случае открытия генетического механизма наследственности). Не умея объяснить биологические явления в терминах фундаментальных взаимодействий, биологи вынуждены принимать в качестве «атомов» гораздо более крупные и сложные элементы, чем это позволяет сделать фундаментальная физика, в частности, живые клетки и целые организмы. С экстенсионалистской точки зрения такое ограничение глубины анализа также значительно дискредитирует биологию.

Впрочем, можно предположить, что экстенсиональный подход позволяет оправдать биологию (и вообще все «нефундаментальные» области естествознания) в моральном смысле: дело не в том, что биологи что-то делают неправильно, а в том, что биологические явления намного сложнее физических, и хотя современное естествознание неспособно трактовать природу единообразно, биологи делают важные шаги на пути к фундаментальной теории биологических явлений, которая могла бы стать частью единой теории природы как целого.

Здесь, однако, возникает вторая трудность экстенсионалистской методологии. Это трудность состоит в том, что переход на более глубокий уровень анализа вряд ли можно рассматривать в качестве *уточнения* старых моделей. Скорее старые модели приходится вовсе отбрасывать и строить новые с нуля. Действительно, предположим, что мы объяснили некоторую модель явления Я с помощью модели $М_1$, которая предполагает, что элементы (условные «атомы») $А_i$ взаимодействуют по законам $З_1$. Пусть теперь выясняется, что элементы $А_i$ состоят из более мелких элементов $В_j$, взаимодействующих по законам $З_2$. Теперь, согласно экстенсионалистской методологии, следует построить новую модель $М_2$ объясняющую Я из $В_j$ и $З_2$. Модель $М_1$ при этом должна быть редуцирована к $М_2$ и может быть использована при построении $М_2$ только для проверки ее правильности: $В_j$ и $З_2$ это, строго говоря, все что необходимо для объяснения сущности Я, и $М_2$ могла бы быть построена даже если бы $М_1$ никогда не существовала.

Если это так, то это значит, что, например, биологи, объясняющие поведение биологических популяций в терминах особей, делают по большому счету ненужную работу. Конечно, можно пытаться найти некоторое моральное утешение в том обстоятельстве, что старые модели оказываются следствиями новых, однако сознание того, что работа, которая делается сейчас, в будущем будет представлять чисто исторический интерес, все же может привести в уныние. Справедливости ради надо добавить, что подобная программа была довольно успешно реализована в химии (построение квантовой химии).

Современная математика, основанная на теории множеств, также в целом следует экстенсионалистской методологии. Хотя стандартная аксиоматика теории множеств Цермело-Френкеля (ZF) предполагает существование только одного атома, а именно пустого множества (18), так называемая «наивная» теория множеств, которая и является главным рабочим инструментом математиков, обычно предполагает некоторое множество атомов, то есть исходных «элементов» (19). Общий метод построения математических структур с помощью множеств состоит в том, что из элементов некоторого исходного множества, которое в соответствии с принципом экстенсиональности считается заданным именно своими элементами, как из кубиков строятся новые множества. При этом исходные элементы разрешается «брать много раз», то есть рассматривать их во множестве экземпляров. Например, из исходного множества {A,B,C} (состоящего из элементов A, B,C) можно выделить подмножества {A,B}и {A,C} (и рассматривать эти подмножества одновременно). С помощью такого конструирования универсум рассмотрения значительно расширяется. Однако никаких операций, позволяющих наращивать сложность не за счет повтора и перегруппировки данных элементов, а за счет введения *внутренней* структуры элементов (что могло бы привести не к расширению, а к *углублению* универсума) в математике обычно не рассматривают (20). При таком подходе понятие множества всех множеств, то есть универсума, который уже не может быть расширен (21), оказывается камнем преткновения экстенсионалистской теории множеств, приводя к знаменитым «парадоксам» («антиномиям») причем не только в рамках наивной теории множеств (есть основания полагать, что именно проблема множества всех множеств довела Кантора до сумасшествия), но и в рамках формальной теории (парадокс Рассела, подорвавший логическую систему Фреге и также спровоцировавший глубокий творческий кризис у ее автора) (22). Обычный метод борьбы с парадоксами, связанными с понятием множества все множеств (в частности, применяемый в ZF), состоит в том, чтобы разрешить существование только «хороших» множеств, то есть предписать такие процедуры построения множеств, которые исключали бы возможность построения множества всех множеств. Все это создает впечатление, что множество всех множеств является неким «запредельным» объектом, чреватым парадоксами и опасным для «нормального» мышления.

Однако, эта опасность, как представляется, связана с определенными предпосылками, а именно с принципом экстенсиональности, который в наивной теории множеств принимается некритически. Трезвый метафизический анализ (23) показывает, что понятие множества всех множеств (или универсума, или мира) не более запредельно, чем понятие атома. Представим (на наивном уровне) краткий набросок *интенсиональной* теории множеств, которая будет опираться не на интуицию атома (первичного элемента), а на интуицию *мира*.

Интенсиональные множества

Такая интенсиональная теория будет двойственной по отношению к обычной экстенсиональной теории. Как мы сейчас увидим, интуитивно она оказывается не менее (и не более) прозрачной, хотя и менее привычной, чем обычная теория. Будем по определению называть *миром* множество, которое само не является элементом никакого другого множества. (Это определение двойственно определению атома как множества без элементов, то есть такой вещи, которая может быть элементом множества, но сама не состоит из элементов.) Если считать «множество всех множеств» миром в смысле этого определения, то множество всех множеств не будет элементом самого себя, а значит, не будет служить «очевидным примером»(24) множества, содержащего самого себя в качестве элемента, на котором основан парадокс Рассела. Такое решение парадокса Рассела может показаться чем-то вроде разрубания Гордиева узла. Однако, кажется, этот парадокс (как и парадокс Кантора) на самом построен на столкновении двух несовместимых идей: с одной стороны, идеи *всего* или *целого*, то есть идеи мира, а с другой стороны, идеи неограниченного экстенсионального расширения универсума (за счет сополагания этого универсума и его частей). Выход состоит в том, что принять только одну идею из двух. Принимая идею неограниченного расширения, мы должны отказаться от идеи мира, то есть исключить множество всех множеств из рассмотрения, как это и делается в обычной теории множеств (в частности, в ZF). Принимая идею мира, мы должны будем отказаться от идеи неограниченного экстенсионального расширения, что мы сейчас и собираемся сделать. (Заметим, впрочем, что проблема усугубляется тем, что множества с самого начала расматриваются как актуально бесконечные, а понятие актуально бесконечного и состоит в том, что неограниченное экстенсиональное расширение некоторой области (например, области выписанных натуральных чисел: 1,2,3...) рассматривается как завершенное. Если считать такое рассмотрение законным, то непонятно, почему его нельзя применить и к множествам в целом. Тем не менее, аналогия между множеством всех множеств и, например, множеством всех натуральных чисел N только частичная. Ведь N это не мир, поскольку кроме натуральных чисел в мире есть и другие вещи, другие множества. Когда же говорят о множестве всех множеств, то мыслят все-таки, скорее, именно мир, хотя и не отчетливо.)

Итак, попробуем исходить из понятия мира как первично данного. Так же как в экстенсиональном случае теория с многими атомами была интуитивно более ясной, чем одноатомная теория (как ZF), так и теперь нам будет проще сначала предположить много миров M_i (то есть более одного). (Заметим, что миры M_i по определению не образуют *множества*. Это можно считать противоречащим интуиции и указывающим на трудность предлагаемого рассмотрения, однако ниже мы покажем, как можно обойтись одним миром - по аналогии, или точнее, по двойственности с одноатомной экстенсиональной теорией.) Теперь по двойственности с *принципом экстенсиональности*

$$\forall x\forall y(\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y),$$

согласно которому всякое множество однозначно определяется своими элементами, введем *принцип интенсиональности*

$$\forall x\forall y(\forall z(x\in z\leftrightarrow y\in z)\rightarrow x=y),$$

согласно которому всякий элемент однозначно определяется теми множествами, которым этот элемент принадлежит. (Как и в ZF мы формально не различаем множества и элементы, то есть имеем в виду, что элемент может быть, вообще говоря, множеством и наоборот. Тем не менее, имея $a\in b$ мы как обычно будем называть a «элементом множества b». Кроме того, для удобства дальнейших формулировок мы введем еще один подобный вспомогательный термин: имея $a\in b$, мы будем называть b «ареалом a».) Введенный принцип интенсиональности можно интерпретировать в духе закона Лейбница о тождестве неразличимых, понимая принадлежность множеству как обладание *свойством*. Однако нужно иметь в виду, что при этом, во-первых, мы сразу должны вводить свойства свойств, и т.д., а во-вторых, что мы не должны предполагать никаких субстанций, то есть вещей «нулевого уровня», которые обладают всеми этими свойствами (ср. идею Рассела о вещах как «пучках свойств»).

Далее, по двойственности с *аксиомой пары* ZF,

$\forall a \forall b (a \neq b \rightarrow \exists p \forall x (x \in p \leftrightarrow (x=a \vee x=b)))$

которая гарантирует существование множества p=(a,b) для любых двух данных различных элементов (множеств) a и b, потребуем, чтобы любые два различные множества a,b (в том числе - любые два мира) «пересекались», то есть чтобы существовал элемент p=(a,b) принадлежащий одновременно a и b (и только им):

$\forall a \forall b (a \neq b \rightarrow \exists p \forall x (p \in x \leftrightarrow (x=a \vee x=b)))$.

(Эту аксиому можно назвать *аксиомой связи.*)

Взяв теперь пару исходных миров M_1, M_2 , мы построим новое множество (элемент) (M_1, M_2), затем эту операцию можно повторять, строя другие множества, имеющие пару ареалов. Чтобы теперь получить элементы (множества) общего вида, то есть элемены, принадлежащие одновременно n множествам M_1, M_2, ...,M_n, по двойственности с *аксиомой объединения* ZF

$\forall a (\exists b (b \in a) \rightarrow \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \exists z\ (x \in z\ \&\ z \in a)))$,

которая для каждого неатомарного множества a гарантирует существование множества y, состоящего из элементов элементов множества a, нам понадобится соответствующая *аксиома пересечения*:

$\forall a (\exists b (a \in b) \rightarrow \exists y \forall x (y \in x \leftrightarrow \exists z\ (z \in x\ \&\ a \in z)))$,

которая для каждого немирового множества a гарантирует существование элемента y, принадлежащего всем ареалам ареалов множества a (и только им)(25).

Поскольку в наши цели сейчас не входит формальное построение интенсиональной теории множеств, мы не будем пытаться выписать все аксиомы. Мы также оставляем для будущего исследования вопрос о том, как предлагаемые здесь идеи соотносятся с существующими разработками. Наша основная цель сейчас - сделать интенсиональный подход интуитивно ясным. Поэтому, завершая этот набросок, мы ограничимся только тем, что покажем, как будет выглядеть интенсиональная теория множеств при предположении о единственности мира.

Мы будем снова исходить из двойственности с экстенсиональной теорией ZF. Как мы уже сказали, эта теория предполагает существование единственного атома, а именно пустого множества (точнее, существование и единственность этого атома является непосредственным следствием аксиом). Напомним, как с помощью единственного атома A можно строить новые множества. Простейший способ это сделать был предложен Цермело. Построим множество {A}, единственным элементом которого является A. Множество {A} уже не является атомом, поскольку оно содержит элемент, а именно A. Теперь эту процедуру можно повторять, строя множества {{A}}, {{{A}}}и т.д. Возможность этой конструкции в ZF обеспечивается *аксиомой степени*:

$\forall a \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \subseteq a)$

которая для каждого множества a гарантирует существование множества его подмножеств (его множества-степени) y. Поскольку пустое множество A является единственным подмножеством самого себя, его множество-степень есть {A}, и т.д. Пользуясь аксиомой пары и объединения теперь можно строить множества вроде {A, {A}, {A,{A}}} и т.д.

Пусть теперь нам дан единственный мир M. Двойственным образом рассмотрим элемент мира M, который для единообразия мы также обозначим {M}. В соответствии с принципом интенсиональности этот элемент единственен. Однако {M} это уже не мир, поскольку $\{M\} \in M$. Теперь эту конструкцию можно повторять, строя элементы {{M}}, {{{M}}} и т.д. Чтобы обеспечить успех, нам нужна аксима, двойственная аксиоме степени. Чтобы ее сформулировать, нам нужно сначала определить понятие, двойственное понятию подмножества. Если

$\forall x\ (y \in x \rightarrow z \in x)$

то есть если всякий ареал элемента y является также ареалом элемента z, то будем называть y *подэлементом* элемента z. Из этого определения непосредственно следует, что каждый элемент является подэлементом самого себя. Обозначая «y есть подэлемент z» по прежнему как $y \subseteq z$, мы можем теперь сформулировать аксиому, двойственную аксиоме степени экстенсиональной теории:

$\forall a \exists y \forall x (y \in x \leftrightarrow x \subseteq a)$, Согласно этой последней аксиоме, все подэлементы всякого элемента а содержат (единственный) общий элемент (который можно по двойственности назвать *корнем* элемента а) (26). Поскольку мир M является подэлементом себя, он действительно содержит элемент (корень), который мы выше обозначили {M}. Аксиомы связи и пересечения позволяют строить дальнейшие элементы вроде {M, {M}, {M,{M}}}. Конечно, такой способ усложнения внутренней структуры мира не кажется совершенно интуитивно прозрачным, но все же он представляется более естественным, чем попытка построить мир с помощью одного пустого множества, как это делается в экстенсиональной ZF (27) .

Догма экстенсионализма

Возвращаясь к методологическим трудностям, связанным с экстенсионалистской установкой в естествознании, приведем слова Рене Тома (который имеет в виду прежде всего биологию): *следует отбросить как иллюзорную ту примитивную и людоедскую концепцию знания, согласно которой, чтобы познать какую-то вещь, ее следует предварительно разобрать на части - как это делает ребенок, который ломает часы и вынимает из них шестеренки, чтобы понять как они работают* (28).

Мы бы не стали, однако, заходить так далеко и утверждать, что *интенсионалистская* методология, даже если она была бы достаточно хорошо разработана, имела бы преимущества перед существующей экстенсионалистской методологией. Скорее, предметом нашего беспокойства должно служить то, что экстенсионалистская установка в современном естествознании и математике принимается в значительной степени некритически, а альтернатива ей остается неясной. По-видимому, причина этого лежит все-таки в онтологии. Почему-то мы думаем, что, например, только посмотрев на Землю извне, из космоса можно увидеть «как она выглядит на самом деле», а именно, что она - шар. Почему не считать, что путешествуя по поверхности Земли, то есть изучая Землю, так сказать, изнутри, мы составляем о ней по крайней мере такое же адекватное впечатление? Житель Трехмерия оказывается по сравнению с плоскатиком высшим существом только при том условии, что пространство состоит из точек, и все, что плоскатик пытается познать изнутри, в конечном счете может быть познано только снуружи. Но разве у нас есть физические или даже просто интуитивные основания считать, что пространство состоит из неделимых частиц? Разве дело не обстоит скорее так, что мы просто не знаем как обойтись без этого предположения? В теории относительности представление об атомарности пространства-времени приводит к тому, что пространство-время рассматривается как множество атомарных *событий*. Представление о событиях, которые не имеют временной протяженности и поэтому не могут быть *изменениями* (ведь всякое изменение предполагает по крайней мере два состояния: исходное и измененное) кажется совершенно противоречащим интуиции (как, впрочем, и представление о частице, которую в нельзя разделить, причем не по физическим, а по метафизическим соображениям). Разве дело не обстоит так, что теория относительности принимает такую парадоксальную онтологию просто под влиянием традиционной геометрии, которая не умеет обходится без точек?

Пытаясь исторически ответить на вопрос, почему метафизика и эпистемология столь определенно встали на сторону экстенсиональности и столь последовательно игнорировала интенсиональность, можно, наверное, указать на влияние платонизма. Речь идет о предпочтении неподвижной точки зрения, способной охватить предмет сразу и одновременно, подвижной точке зрения, с которой предмет рассматривается постепенно и по частям. В крайнем случае платонизм готов допустить движение предметов, но не движение точки зрения: пусть лучше движутся другие вещи, но мы останемся на месте. В этом смысле между Платоном, с одной стороны, и Расселом и Квайном с другой («логический атомизм» Рассела (29) и «бегство от интенсионала» Квайна (30)), как кажется, можно провести прямую связь. Можно также вспомнить о том, какое принципиальное эпистемологическое значение придавал пространственному протяжению Декарт. Впрочем, наше упражнение с интенсиональной теорией множеств показывает, что все-таки дело здесь по крайней мере не только в исторических предрассудках. Нам обязательно нужно с чего-то начинать рассуждать, если не с атомов, то с мира, если не с ничего (пустого множества), то со всего сразу (универсума). Пытаясь выше представить набросок интенсиональной теории множеств, мы связывали себя идеей двойственности по отношению к экстенсиональной ZF. Разумеется, это было сделано только для упрощения задачи. Можно попытаться построить систему, которая предполагала бы мир или миры наряду с атомами (как неявно делает общая теория относительности), и экстенсиональные операции вроде построения множества-степени наряду с интенсиональными операциями вроде введенного выше нахождения корня множества. Выяснить, насколько интенсиональный подход сочетается с экстенсиональным - интересная и важная логическая проблема. Однако из общих эпистемологических соображений можно заранее сказать, что наиболее соответствующей задачам эмпирических наук была бы система, которая позволяла бы начинать рассуждать, так сказать, с середины, и обходилась бы как без предположения о первичных первоэлементах, то есть без предположения об атомах, так и без предположении об окончательном целом, то есть без предположения о мире (31). Отказ от атомов и мира не означал бы отказа от экстенсиональности и интенсиональности как таковых, а означал бы только отказ от их абсолютизации. Выбрав некоторые исходные элементы, определяемые особенностями данной задачи (например, живые клетки или организмы в биологии, молекулы в химии и т.д.), можно было бы затем применять к ним как экстенсиональные процедуры (то есть, например, думать, как из клеток можно построить организм), так и интенсиональные процедуры (например, описывать внутреннюю структуру организма в терминах функций его клеток). При этом важно, чтобы искомая система позволяла «сдвигать» исходный элементарный уровень, обеспечивая при этом совместимость соответствующих моделей. Если мы, например, будем считать исходными элементами в одной задаче клетки, а в другой организмы, то экстенсиональная модель, объясняющая как из клеток строятся организмы, должна быть совместима с интенсиональными моделями клеток, объясняющими, какие функции они выполняют в организмах. Пусть теперь мы хотим построить модель какого-то органа, например, сердца. Есть две возможности: либо, (1) приняв за исходные элементы клетки, построить экстенсиональную модель сердца (то есть понять, как из клеток можно собрать сердце), либо (2) приняв за исходный элемент организм, построить интенсиональную модель сердца (показывающую, какую функцию сердце выполняет в организме). Можно предположить, что всякая вещь допускает такое двойное описание: экстенсиональное в терминах элементов низшего уровня и интенсиональное в терминах элементов высшего уровня. При условии совместимости этих описаний можно было бы отказаться от поиска исходного (атомарного, элементарного) уровня описания, позволяющего описывать экстенсионально сразу всю природу. Такая методология позволила бы, в частности, придать биологии такой же эпистемологический статус как и физике, и считать эти науки в одинаковой мере «фундаментальными» (и в одинаковой мере «феноменологическими»).

Такое двойное описание можно схематически представить следующим образом:

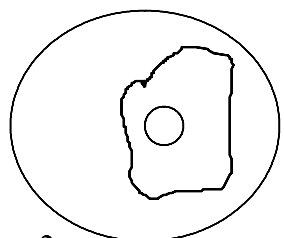
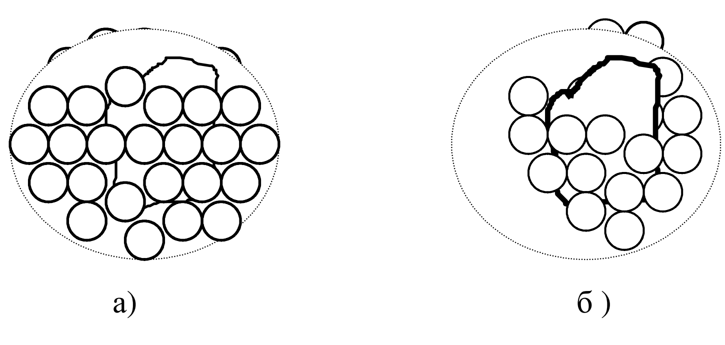


Рис.2

Малый круг обозначает условный атом, большой круг - условный мир, неправильная фигура между кругами - исследуемый (описываемый) объект. Экстенсиональное (внешнее) описание строится с помощью следующих двух шагов.

(i) Атом реплицируется, то есть воспроизводится во множестве экземпляров, так что весь мир вместе со всем своим возможным содержимым оказывается построенным из атомов (из различных экземпляров одного и того же атома). Говоря более вольно: атом «растягивается», заполняя своими репликами весь внешний мир. Исследуемый объект при этом также оказывается построенным *как возможный*. (Лучше сказать: таким образом задается *возможность* исследуемого объекта.) Заметим, что понятие мира оказывается при таком подходе, так сказать, плохо определенным и, может быть даже излишним. Важно, чтобы построенное таким образом пространство было бесконечным (*бесконечно большим*) и наверняка вмещало исследуемый объект, и не важно, чтобы оно было миром. Если построенное таким образом пространство впоследствии окажется подпространством другого пространства, скажем, пространства более высокой размерности, это ничему не помешает. Понятие атома, наоборот, оказывается в рамках экстенсионального описания принципиальным, поскольку это то, с чего мы начинаем все рассуждение. Действительно, при построении геометрии обычным (внешним) способом принципиальным является понятие точки, а не мира.

(ii) Исследуемый объект *актуализируется* посредством выделения составляющих его атомов. Изображая геометрическую фигуру на бумаге мы предполагаем, что мы отмечаем карандашом точки, которые уже в каком-то смысле существовали раньше (как возможные). При рассмотрении изучаемого объекта нам как правило уже не нужно рассматривать все пространство целиком, нам достаточно небольшой области, включающей изучаемый объект. Если чертеж помещается на листе бумаге, границы этого листа не имеют для на значения. Говоря вольно, на этом втором шаге внешний мир обратно «стягивается» до окрестности исследуемого объекта. (Рис.3а,б) (На этих рисунках некоторые атомы пересекают «границу мира», поскольку сконструированное на первом шаге пространство не является миром в строгом смысле.)



а)　　　　　　　　　　　　б)

Рис.3

Чтобы теперь понять как устроено интенсиональное (внутреннее) описание, нам нужно вспомнить историю про плоскатиков. Если правильны наши предыдущие рассуждения, то для такого описания нам нужно на самом деле снова предположить внутренний атом и внешний мир, хотя бы условно (а не достаточно ограничиться только «миром» плоскатиков, то есть, например, сферой, на которой они живут). Мы будем как всегда опираться на двойственность внешнего и внутреннего. В данном случае это будет означать, что процедуру построения описания нужно теперь начинать с мира и осуществлять ее в обратном направлении. Итак, первый шаг построения интенсионального описания состоит в том, что

(i*) внешний мир «стягивается» в атом (в точку). Действительно, история про плоскатиков начинается с того, что мы фиксируем в мире свое неделимое Я, наблюдающее этот мир (32). При более «серьезном» подходе к внутренней геометрии этому соответствует выбор (в исходном пространстве) «пробной точки», принадлежащей исследуемому объекту. Не зная еще своего мира (а только собираясь его исследовать), плоскатик вынужден заранее поместить себя в некоторый *гипотетический* мир, причем, если он расчитывает в дальнейшем что-то узнать о своем мире, этот гипотетический мир должен быть предположен именно внешним по отношению к той области, в которой живет плоскатик. (То есть, строго говоря, плоскатик должен предположить, что та область, в которой он живет, на самом деле не является миром.) (33) Здесь необходимо еще одно уточнение. Как мы говорили в начале этой работы, чтобы что-то узнать об изучаемом объекте, внутренний наблюдатель должен иметь хотя бы минимальный обзор. Говоря формально, с пробной точкой необходимо связать систему координат, которая бы действовала хотя бы локально, хотя бы в *бесконечно малой* окрестности пробной точки. Главное, о чем нужно позаботиться, это чтобы внутренний наблюдатель «поместился внутри» наблюдаемого им объекта. Понятие точки при интенсиональном подходе не имеет принципиального значения. Понятие же мира при таком подходе оказывается принципиальным, потому что это то, с чего мы в этом случае начинаем все рассуждение. В отличие от экстенсионального случая, мы не конструируем мир, и не можем при необходимости его «достроить», если он вдруг окажется слишком тесным для изучаемого объекта. Поэтому нам нужно предполагать мир заранее, сразу и целиком, то есть предполагать мир в точном (хотя и условном) смысле слова.

Следующий шаг состоит в том, что

(ii*) этот атом (локальная система координат) обратно «растягивается» до пределов изучаемого объекта (или заполняет его по крайней мере частично). Такое «растягивание» может быть реализовано либо за счет движения атома, либо за счет его репликации как и в экстенсиональном случае. Как это происходит, мы подробно рассмотрели в первом разделе этой работы. (Рис.4а,б)

(На рис. 4б внутренние наблюдатели имеют пересечения, потому что они не являются строго атомными, как и окрестности начал локальных систем координат.)

а) б)

Рис.4

Завершая это объяснение, напомним еще раз, что мы используем здесь понятия атома и мира в относительном, а не абсолютном смысле. (Мы нарочно изобразили «атомы» достаточно большими, чтобы в них как в миры можно было поместить атомы поменьше, а миры достаточно маленькими, чтобы их как атомы можно было поместить в миры побольше.) Кстати, отказ в естествознании от атомов и мира (по крайней мере понятых в абсолютном смысле), как представляется, вполне соответствует точке зрения Канта, которую он занимает в *Критике чистого разума* при анализе первых двух антиномий (о бесконечности/конечности мира в пространстве и во времени и о бесконечной/конечной делимости вещей), сначала говоря, что именно утверждения *анти*тезисов этих антиномий (мир вечен и бесконечен и все вещи бесконечно делимы) соответствуют эмпирическому подходу (который, по словам Канта, «доставляет теоретическому интересу разума преимущества чрезвычайно привлекательные и далеко превосходящие то, что может обещать догматический проповедник идей разума», **496** (34)), а затем уточняя, что вопрос о конечности или бесконечности мира вообще нерелевантен по отношению к естественным наукам, поскольку мир не может быть их предметом (**529-530**) (35). Вообще, что касается утверждений *тезисов* всех четырех антиномий, (соответствующих точке зрения, которую Кант называет «догматической»), то Кант оправдывает их в практическом и моральном, но не в теоретическом смысле, причем этот аргумент в гораздо большей степени применим к тезисам третьей и четвертой антиномий, где идет речь о существовании свободы воли и Бога, чем к тезисам первых двух, практический и моральный смысл которых гораздо менее очевиден (зато теоретический смысл ясен непосредственно). В любом случае такого рода соображения могут иметь только косвенное отношение к физике и естествознанию в целом. Так что тот факт, что современное естествознание вслед за классической геометрией и теоретико-множественной математикой фактически пользуется атомистической гипотезой (мы имеем в виду не столько поиски неделимых физических частиц, которые вряд ли кто сегодня всерьез надеется найти, сколько использование в физике математических понятий точки и первичного элемента множества), и не знает, что делать с гипотезой о мире (как в случае с «множеством всех множеств»), нужно считать серьезным недостатком (догматическим предрассудком, как сказал бы Кант), который может и должен быть восполнен с помощью новых математических и логических средств, лучше соответствующих задачам и возможностям эмпирического естествознания (36).

Примечания:

(1) Е. Вигнер, *Этюды о симметрии*, М. 1971, стр. 182

(2) Г. Гельмгольц *О фактах, лежащих в основании геометрии* // Об основаниях геометрии. М. 1956 стр.

(3) Г. Рейхенбах. *Философия пространства и времени*, М.1985.

(4) F. Gauss *Disquisitiones generales circa superficies curva*, 1828

(5) Рисунок взят из статьи А. Варзи, *Бублик вокруг дырки* // Логос 4, 2001, стр. 190

(6) См. русский перевод: Эдвин Эбботт, *Флатландия*, Санкт-Петербург, Амфора, 2001. Наша история включает моменты, которых нет у Эббота (в частности, путешествия по кривым поверхностям), но которые в основном также можно найти в литературе. См., например, Д. Бюргер, *Сферландия*: этот текст опубликован вместе с книгой Эббота в упомянутом русском издании под одной обложкой.)

(7) Главный герой книги Эбботта (цит. соч.) плоскатик Квадрат, от лица которого ведется повествование, смог рассказать нам о своем плоском мире только потому, что он чудесным образом однажды посетил наше Трехмерие.

(8) В истории, рассказанной Эбботтом, жители Трехмерия являются по отношению к плоскатикам высшими существами: они видят и понимают все, что видят и понимают плоскатики, и кроме того, ориентируются в третьем измерении, о котором плоскатики могут только догадываться. Таким образом, Эбботт предполагает превосходство внешней точки зрения над внутренней. Оспорить этот взгляд - основная цель данной работы.

(9) С.П. Новиков, А.Т.Фоменко, *Элементы дифференциальной геометрии и топологии*, М.1987..

(10) Gauss, *op.cit.*, Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Ges. Wiss. Goetingen. Abhandl., 13 (1867), S.133-152.

(11) Это замечание отвечает тому соображению Канта, что время является «формой внутреннего чувства» (*Критика чистого разума*, B50, выделено мной).

(12) Thomas Nagel, *The View from Nowhere*

(13) Э. Картан, *Геометрия римановых пространств*, М. 1936.

(14) Хотя выше мы назвали осязанием способность точечного наблюдателя идентифицировать ту точку, в которой он в данный момент находится, точнее было бы называть осязанием именно такое «короткое зрение». Интересно, что в истории,

рассказанной Эбботтом *ощупывание* - это единственный универсальный метод, с помощью которого плоскатики могут узнавать (форму) друг друга. (Кроме этого плоскатики у Эбботта могут узнавать друг друга по голосам и по видимой интенсивности свечения, но эти два последних метода требуют предположений, явно выходящие за рамки геометрии. Цит. соч. гл. 5)

(15) Метафизическое понятие атома (атом - неделимая частица) не нужно путать с тем, что называют атомами в современной физике. Современная физическая терминология объясняется чисто историческими причинами (и распространенным неуважением физиков к метафизике): после того, как выяснилось, что физические «атомы» делимы и имеют внутреннюю структуру, правильно было бы перестать называть эти объекты атомами. Однако, очевидно, большинство физиков не считало и не считает, что этот вопрос имеет какое-то значение. Так или иначе, мы используем понятие атома в его первоначальном смысле неделимой частицы. Кажется, что современная физика не дает никаких оснований считать, что атомы существуют. (Впрочем, решение этого вопроса зависит от интерпретации квантовой теории и ядерной физики, которую мы не можем обсуждать в этой работе.)

(16) Заметим, что Кант также рассматривает гипотезы о мире и об атомах в тесной связи друг с другом (первая и вторая антиномии чистого разума, *Критика чистого разума* **454** ff.)

(17) Впрочем, см. прим. (32).

(18) то есть множества, не содержащего элементов, которое, однако, оказывается «единственным первичным конституентом любого множества» (Френкель, Бар-Хиллел, *Основания теории множеств*, М. 1966, стр. 60, 117, в дальнейшем мы будем ссылаться на этот труд как на ФБХ). Тот факт, что первичным элементом всякой вещи в рамках этой теории оказывается пустое множество, то есть <u>ничто</u>, в онтологическом смысле кажется парадоксальным. Впрочем, тезис о том, что, что все сущее в каком-то смысле «состоит из ничего», из вакуума, кажется, не вполне чужд современным фундаментальным физическим представлениям. См. И.Л.

Розенталь, И.В. Архангельская, *Вакуум как основная форма материи во Вселенной* // Наука и технология в России N5-6 (42-43), 2000, стр. 25-27.

(19) Об аксиоматических теориях множеств с многими атомами см.: А.М. Анисов, *Представление интенсиональных отношений в теории множеств с атомами* // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН, 1997

(20) Автору не знакомы такие примеры, и он будет признателен если их сообщит более компетентный читатель. Однако даже если такие примеры существуют, можно наверняка утверждать, что их роль для математики в целом несозмерима с ролью «экстенсиональных» конструкций, о которых говорилось выше в основном тексте.

(21) Если употреблять термин «универсум» в смысле «мир», то только множество всех множеств и можно назвать универсумом.

(22) Краткий обзор парадоксов теории множеств см. в ФБХ.

(23) например, проделанный Кантом, см. еще раз прим. XVI.

(24) ФБХ стр.16

(25) Подобная конструкция в логике была введена В.А. Смирновым, когда он построил семантику для исчисления событий, отождествляя события с множествами возможных миров (точнее, с парами множеств возможных миров, имея в виду, что данное событие происходит в мирах из первого множества и не происходит в мирах из второго; это последнее усложнение нужно Смирнову для того, чтобы допустить возможность неклассических отношения между логическим объемом и соответствующим антиобъемом): *Комбинированные исчисления предложений и событий* // Логико-философские труды В.А. Смирнова, Москва, 2001, стр. 221. Отличие нашего подхода состоит, во-первых, в том, что миры у нас по определению не могут быть элементами множества, а во-вторых, в том, что элементы, соответствующие событиям у Смирнова, аналогичным образом определяются любыми множествами, а не обязательно мирами, и сами в свою очередь рассматриваются как множества (то есть вся конструкция многократно итерируется).

(26) Очевидно, что эта «аксиома корня» несовместима с существованием атомов, также как аксиома степени ZF несовместима с существованием миров. Если аксиому степени можно назвать «аксиомой неограниченного экстенсионального расширения», то аксиому корня можно назвать «аксиомой неограниченного интенсионального углубления».

(27) См. прим. XXIII и (впрочем) XXXV

(28) Rene Thom, *Stabilite Structurelle et Morphogenese*, NY 1972, ch.8. Сейчас готовится к изданию русский перевод этой книги.

(29) Б.Рассел. Логический атомизм.

(30) У. Квайн. Слово и объект, гл. 6

(31) Ср. соображения Хакена о важности «мезоскопического» (то есть промежуточного между макро- и микроскопическим) уровня описания: *Синергетика*,

(32) Заметим, что Кант (цит. соч.), обсуждая понятие атома во второй антиномии, в качестве важнейшего примера атома приводит душу (Я).

(33) Именно такой подход используется в общей теории относительности. Описывая пространство-время внутренним образом, приходится заранее предполагать некоторое гипотетическое пространство, внешнее по отношению к физическому пространству-времени и поэтому заведомо не имеющее физического смысла. Такое внешнее пространство нужно прежде всего для того, чтобы задать исходное многообразие событий. Однако поскольку это внешнее пространство полностью гипотетично, онтологический статус этих событий оказывается проблематичным. Если идентифицировать события по времени и месту (то есть по пространственно-временным координатам, что кажется совершенно естественным), то события исходного многообразия оказываются, вообще говоря, сомнительными «сущностями без идентичности» (против которых выступал Квайн), поскольку физические координаты могут быть только локальными. Одним из подходов к решению этой проблемы является попытка рассматривать неидентифицируемые события как возможные, а идентифицируемые как действительные. Однако в каком смысле тут используются эти модальности все равно остается не вполне ясным. В

соответствии с нашими предыдущими рассуждениями, *миром* нужно считать именно такое гипотетическое пространство, а вовсе не физическое пространство-время. При этом его не следует считать экстенсионально определяемым множеством, и, следовательно, и беспокоится о том, что он непонятно из чего состоит. Этот вывод может показаться неприемлемым, поскольку мир таким образом оказывается нефизическим, нереальным в физическом смысле, тогда как теория относительности претендует на то, что она описывает именно физический мир. Но может быть стоит все-таки согласиться с Кантом, что мир заведомо и не может быть физическим понятием? См. прим. 35

(34) Цит. по изд. Кант, *Критика чистого разума*, М. 1998, перевод Н.О Лосского, п/ред. В.А. Жучкова, стр. 393.

(35) «На первый взгляд кажется совершенно ясным, что если один утверждает: мир имеет начало, а другой утверждает: мир не имеет начала, но существует вечно, то одна из этих сторон должна быть правой. Но в таком случае, ввиду того, что аргументация с обеих сторон одинаково ясна, невозможно когда бы то ни было узнать, на чьей стороне правда.... . ... Для основательного завершения спора, удовлетворяющего обе стороны, остается лишь одно средство: окончательно убедить их, что ... предметом их спора служит ничто (подчеркнуто мной - А.Р.), и лишь известная трансцендентальная иллюзия нарисовала им действительность там, где ничего нет.» Цит изд., стр. 412

(36) Что касается точек, то эта проблема, похоже уже осознана, и делаются многочисленные интересные попытки построения математических и логических конструкций без точек, хотя до их систематического применения в естествознании дело пока не доходит. (См. например, *Toposes without points* //Journal of Pure and Applied Algebra 5 (1974); F.G. Asenjo, *Continua without sets* // Logic and Logical Philosophy, vol.1 (1993) 3-6.) Что же касается понятия мира, то с одной стороны оно стало очень популярным в логике благодаря многомировым семантикам Крипке, но с другой стороны, оно употребляется скорее в техническом и условном смысле, в смысле некоторой области значений, тогда как проблема мира в собственном смысле (как исходного понятия интенсионального описания) остается, как

представляется, без должного внимания. Даже наш естественный язык подвержен догме экстенсионализма, заставляя нас всегда говорить об «исходной точке» или «исходном пункте», и затрудняя таким образом понимание того, как можно исходить из мира!