

## КОММЕНТАРИИ

*А.А. Веретенников*

То, на что мы указываем... может представлять собой разные события, но тот же самый объект (*Гудмен Н.* Способы создания миров. М., 2001. С. 125).

В последней части статьи автор выводит некоторые «метафизические и эпистемологические следствия» из описанного им проекта «внутренней геометрии». Эти критические замечания будут касаться только этих выводов, безотносительно самого проекта. А.В. Родин различает два уровня описания: экстенциональный и интенциональный («внешний» и «внутренний»). Проблематика соотношения теории и опыта переформулируется автором в терминах внешнего/внутреннего. Каким образом возможно независимое от экстенционального внутреннее описание, как возможно «точно обозначить» различие между одним и другим видом описания?

Моя точка зрения состоит в том, что невозможно никакое «внутреннее» описание, отличное от внешнего, т.е. понятие *описания*

сания (определения) подразумевает понятие экстенциональности (но не наоборот). В частности, мы не можем экстенционально определить точку, мы можем лишь *эксплицировать* это понятие.

Сам автор называет гипотезой *интенциональности* гипотезу о существовании мира как вещи, «не имеющей *внешности*». Я хочу заметить, что выделение *мира* или миров из прочих классов объектов, доступных экспликации, уже есть его *экстенциональное* определение. Интенциональной логика может быть тогда, когда переменные обозначают понятия, но не объекты или классы объектов. Мир здесь — это объект или понятие? Если переменная *мир* обозначает вещь, объект, тогда переменная *мир* есть переменная обычной экстенциональной логики и той части семантики этой логики, которая поддается эксплицитному описанию, и, следовательно, место этой переменной в создаваемой нами онтологической структуре *мира* как понятия может быть точно указано.

Предположение о том, что мир не имеет *внешности* есть предположение, высказанное с точки зрения *плоскатики*. Предположение о множественности миров формулируется с точки зрения абсолютного субъекта познания, которому, по определению, доступен как экстенциональный, так и интенциональный уровень описания. На точку зрения этого субъекта претендует наука и, в частности, логика, оперирующая с *мирами* как с логическими переменными, а, следовательно, *внешним* образом.

Предлагаемый А.В. Родиным «внутренний» подход к геометрии не является чем-то радикально новым. Отказ же от гипотезы о мире и от гипотезы об атомах приведет к потере наукой (в частности, физикой) своего фундаментального статуса по отношению к обыденному знанию (статуса «абсолютного субъекта» по отношению к *плоскатику*).

Предлагаемый автором статьи подход действительно позволяет «релятивизировать» различие между опытом и теорией и, на мой взгляд, в случае его реализации повлечет ряд кризисов в области теоретического знания.

*Г. Б. Гутнер*

В статье А.В. Родина содержатся два весьма многообещающих проекта философских концепций. Один из них имеет, скорее, эпистемологический характер и связан с различением внешнего и внутреннего подходов. Второй — развивающий «интенциональную теорию множеств» — в большей мере касается онтологии. Статья, однако, вызывает ряд вопросов, связанных прежде всего с самим ее названием. Действительно ли интенциональная онтология вписывается в идею внутренней геометрии? Можно ли считать,

что эта онтология однозначно требует «внутренней» эпистемологии? Разъяснения, данные автором, кажутся мне по меньшей мере недоведенными до конца. Несмотря на кажущуюся интуитивную ясность (отказ от атомарности дает возможность исследовать любой объект изнутри), можно, мне кажется, привести ряд рассуждений, показывающих, что связь двух проектов весьма неоднозначна. Наиболее существенным здесь представляется тот факт, что внутренняя геометрия тесно связана именно с экстенциональным, а не интенциональным представлением. В самом деле, внутреннее исследование геометрической структуры объекта производится наблюдателем, помещенным в определенном *локусе* внутри объекта. По поводу этого локуса можно утверждать следующее.

1) Он элементарен, т.е. не имеет никакой внутренней структуры, поскольку наблюдатель изучает окрестность, а не свой внутренний мир.

2) Он произволен в том смысле, что наблюдателю доступно любое место внутри объекта. Мы не можем предполагать существование «тайных мест», не являющихся потенциальными наблюдательными пунктами.

Таким образом, весь объект представляется системой элементарных мест, составляющих, пользуясь аристотелевским термином, его *материю*. Конечно, мы не должны впадать в «атомистический редукционизм» (материализм) и утверждать, что структура объекта определена совокупностью локусов и их собственными свойствами. Однако «атомистическая гипотеза» представляется необходимым условием описываемого подхода. Более того, интенциональная онтология предполагает существующим целый объект, наделенный завершенной структурой, что никак не вяжется с внутренней позицией наблюдателя.

*Л. О. Шишкин*

В статье А.В. Родина «Идея внутренней геометрии» рассматривается соотношение (и взаимоотношение) геометрии, физики и представлений о пространстве. Интересно было бы разобраться, что означает различие «внешнего» и «внутреннего» подходов для математики в целом. Автор замечает, что подход к обоснованию математики, связанный с теорией множеств, является «разновидностью гипотезы о точках», т.е. соответствует внешнему взгляду на объект исследования. Действительно, в этом случае подразумевается, что наблюдатель способен «увидеть» (представить) любое множество, в том числе актуально бесконечное, целиком. Например, аксиома объемности утверждает, что два множества совпадают, если они состоят из одних и тех же элементов. При этом считается, что заданы *все* элементы множества.

В этом смысле предложенная интенциональная теория множеств, являясь двойственной по отношению к обычной (экстенциональной) теории множеств, не отличается от нее принципиальным образом. Обе теории используют одни и те же подходы, поскольку меняются лишь «направление взгляда» и терминология, но не «способ наблюдения». Объекты задаются целиком и описываются тем же языком логики предикатов. Замена объединения множеств пересечением (или конъюнкцией) свойств сохраняет методы теории множеств, только в первом случае рассматриваются совокупности элементов, а во втором — совокупности «ареалов». Какая математика могла бы соответствовать опыту существ, изучающих пространственные объекты исключительно локальными, внутренними средствами? Для получения представления о глобальной структуре пространства в этом случае требуется применение разнообразных алгоритмов. Возможность работать в каждый момент только с конечной частью объекта исследования и, следовательно, получение информации в виде (потенциально бесконечной) последовательности «образов» должны, вероятно, привести к развитию некоторой «конструктивной науки».

Второй вопрос касается «взаимоотношений» внутренней и внешней точек зрения. Внешняя геометрия позволяет рассматривать вложения изучаемого пространства в пространства большей размерности, помогая внутренней геометрии ставить задачи определения кривизны, отыскания границы пространства и т.п. «Внутренний» исследователь ограничен в средствах, однако следует заметить, что ограничение касается только «экспериментальной» части науки, ее методов. Исследователь может встать на любую точку зрения и строить теорию с позиций как внутренней, так и внешней геометрии, представляя свое пространство «со стороны» при формулировании гипотез и построении моделей. Имеет ли место подобное соотношение для конструктивной (алгоритмической) и теоретико-множественной математики, если одну рассматривать как внутреннюю, находящуюся ближе к «опыту», а другую — как внешнюю, меньше ограниченную в выборе «точки зрения»? Помогает ли теоретико-множественная математика формулировать утверждения о свойствах объектов конструктивной математики, позволяя представить их «в целом»? В каком объеме идеи «внешней», теоретико-множественной, математики могут использоваться в конструктивной, применяющей свои собственные «инструменты»? Можно ли добиться «чистоты» или их взаимное влияние неизбежно? Ответ на эти вопросы позволил бы уточнить роль каждого из направлений в развитии математики.

Наконец, рассматривая соотношение математики и опыта, можно спросить, определяется ли существование различных на-

правлений в математике возможностью изучения пространства, пространственных объектов «изнутри» и «извне» или же само развитие математики приводит к появлению различных точек зрения на пространство?

*В.А. Янков*

Очень интересно было следить за философской мыслью, развиваемой при живом прощупывании естественно-научных и общематематических проблем.

В центре внимания была древняя платоновская пара — «двойца» большого и малого, у которой автор находит новые аспекты внешнего и «внутреннего» и экстенционального и интенционального. Сам автор, возможно, не согласится с моим пониманием темы по Платону. На эту мысль меня наводит, однако, двойственность, которую он стремится выявить. Эта двойственность замечена уже Николаем Кузанским, отождествлявшим оба направления — к бесконечно большому и к бесконечно малому в Боге-максимуме.

Двойственность в докладе выражена в построении альтернативной к ZF теоретико-множественной системе. Отмечу, что в связи с этим был бы желателен анализ куайновской системы New Foundation, где, как представляется, двойственность воплощена в пределах одной конструкции.

Однако само применение двойственности в данном исследовании показывает, что автор смотрит на предмет с «внешней», экстенциональной позиции и не замечает глубокой асимметрии внешнего и внутреннего.

Дело в том, что позиция внешнего наблюдателя, рассыпавшего Вселенную на атомы, а потом собирающего ее из них, является позицией господина вещей, имеющего свободу распоряжения. Если же мы смотрим на вещи изнутри, то уже не мы властвуем над вещами, а, скорее, они властвуют над нами, и мы не стремимся даже вырваться из их потока, сохраняя, впрочем, интерес к наблюдению. Это не означает, что содержательные предикаты (роды, отношения и т.п.) навязываются нам исключительно извне; частично они определяются нами, поскольку у нас есть все же некоторая свобода, но то, что принципиально противоположно позиции внешнего наблюдателя, от таких определений ускользает и ведет к экзистенциалистскому пониманию ситуации.

Последняя установка вообще может быть описана как принятие своей воплощенности («внутренности»). Недаром она родилась (у Паскаля) в эпоху, когда декартовский механический детерминизм вытеснил душу из тела, делая ее полностью «внешней»

по отношению к вещественному миру. Более ранняя европейская философия не знала такого поворота: душа, если и не была телесной, то оставалась в нерасторжимой связи с телом.

Так что докладчик не доходит в своем стремлении до крайнего радикализма, что, впрочем, не мешает содержательности его мысли.

## ОТВЕТ АВТОРА

*А.А. Веретенникову*

Возможно ли внутреннее описание, независимое от внешнего? Геометрические примеры говорят, скорее, против этого предположения: пытаясь встать на точку зрения плоскатики, мы одновременно продолжаем смотреть на него и на его мир со стороны. Вместе с тем, интенциональная и экстенциональная интерпретации теории множеств являются вполне независимыми. Но, может быть, дело в том, что интенциональные множества дают чересчур упрощенную модель «идеи внутренней геометрии».

Далее, комментатор ставит ряд вопросов, касающихся важной темы, к которой я вплотную подошел в своей работе, но которой непосредственно не касался. Речь идет о различии между внешним и внутренним, между экстенциональностью и интенциональностью *в логике*. Здесь я могу дать только самые предварительные и приблизительные ответы на вопросы комментатора.

По поводу тезиса комментатора о том, что всякое описание является внешним по самому смыслу понятия описания. Я думаю, что это действительно так, пока речь идет об описании *объектов*: позиция наблюдателя по отношению к объекту является внешней. Если же речь идет об описании *событий*, то, как мне кажется, ситуация меняется: позиция наблюдателя, описывающего событие — это позиция участника этого события. Поэтому, кстати, логика исторического *рассказа* (нарратива) существенно отличается от логики естественно-научной теории. Впрочем, тот факт, что понятие события стало играть ключевую роль и в современной физике, как представляется, заставляет науку также искать новые подходы.

Далее, комментатор справедливо замечает, что в рамках экстенциональных логических теорий миры обычно понимаются как объекты или вещи, наряду с другими вещами. Мое предложение состоит как раз в том, чтобы отнестись к понятию мира более внимательно и не использовать его таким образом. В рамках интенционального подхода мир — это, конечно, не объект (не вещь). Утверждение комментатора о том, что гипотеза о множественно-

сти миров имеет смысл только для внешнего наблюдателя, с моей точки зрения, неверно. Действительно, только внешний наблюдатель мог бы увидеть *совокупность* (множество) миров (но тогда они не были, строго говоря, мирами). Мое предположение состоит в том, что можно говорить о множественности миров, не мысля при этом эти миры как совокупность. (Ср. мой ответ на предыдущий комментарий.) Наконец, комментатор делает замечание эпистемологического характера, высказывая опасение, что внутренний подход лишит научное знание его объективного статуса. Мне это опасение кажется разумным. Знания, получаемые внутренним наблюдателем, не являются, строго говоря, объективными. Однако не следует думать, что житель Трехмерии (внешний наблюдатель) видит все, что видит плоскатиик (внутренний наблюдатель) плюс какие-то вещи, которых плоскатиик не видит. Есть вещи, которые можно узнать и понять только изнутри. Возможно, что любые *события* относятся именно к этому роду вещей. Но, может быть, за любыми событиями можно найти объект или объекты и, таким образом, редуцировать знания о событиях к знаниям об объектах (ср. эпиграф, который приводит комментатор)? Примеры событий, в результате которых одни объекты появляются, а другие перестают существовать (ср. взаимодействия частиц в микрофизике), указывают на то, что это скорее всего не так.

*Г. Б. Гутнеру*

Связь между «внутренним подходом» и интенциональной теорией множеств мне проще всего объяснить генетически: я попытался уточнить основанные на геометрическом материале рассуждения первой части о внешнем и внутреннем подходе с помощью формального аппарата аксиоматической теории множеств. В частности, интуитивные определения атома как «вещи без внутренности» и мира как «вещи без внешности» на языке множеств приобретают простой и ясный смысл множества без элементов (пустого множества) и множества, которое само не является элементом. Хотя такая формализация, очевидно, не схватывает какие-то аспекты исходной геометрической интуиции, она мне представляется естественной и правомерной. Понятие интенциональности возникает в этой связи обычным образом, а именно, когда мы интерпретируем принадлежность множеству как обладание свойством.

В принципе я согласен с комментатором, когда он связывает геометрические интуиции с эпистемологией, а множества — с онтологией. Я только хочу уточнить то, что комментатор называет «интенциональной онтологией». Мой аргумент состоит в следую-

шем: для построения стандартной «внешней» геометрии необходимо предположить существование атомов (точек), а для внутренней геометрии — существование мира (или того многообразия, которое мы считаем миром условно, например, называя миром плоскостиком соответствующее двумерное многообразие). При этом внешняя геометрия не требует предположения о мире, а внутренняя — предположения о точках. Последнее утверждение является, конечно, единственным нетривиальным, поскольку обычно внутренняя геометрия все же предполагает точки, и комментатор попытается доказать, что без такого предположения внутренняя геометрия обойтись не может. Прежде чем ответить на эти аргументы, я хочу указать на попытки построения геометрии без точек в рамках *теории локусов* и *формальной топологии*. Само название «формальная топология» говорит о том, что эта теория остается в некотором смысле оторванной от геометрической интуиции. Свою задачу я вижу в том, чтобы развить такую бесточечную геометрическую интуицию, которая, в частности, могла бы способствовать развитию этих относительно новых математических идей. Поэтому моя дискуссия с комментатором имеет также неформальный характер. Тем не менее я могу, как мне кажется, предъявить на аргументы комментатора вполне точные опровержения. Итак, первый (контр)аргумент комментатора состоит в том, что «...внутреннее исследование геометрической структуры объекта производится наблюдателем, помещенным в определенном *локусе* внутри объекта. По поводу этого локуса можно утверждать... [что] он элементарен, т.е. не имеет никакой внутренней структуры (иными словами, атомарен, является точкой. — *A.P.*), поскольку наблюдатель изучает окрестность, а не свой внутренний мир».

Мое возражение состоит в том, что локус, в котором помещен наблюдатель, и окрестность, которую этот наблюдатель изучает (и которая не является элементарной) — это одно и то же. Я могу предположить, что аргумент комментатора основывается на следующих двух предположениях, оба из которых, на мой взгляд, неверны: (1) наблюдатель элементарен (неделим), и (2) отношение « $X$  помещен в  $Y$ » обладает следующим свойством: если  $X$  помещен в  $Y$ , то если  $X$  элементарен, тогда  $Y$  тоже элементарен. Что касается (2), то я ограничусь тем, что переложу бремя его доказательства на комментатора и замечу, что даже если кот помещен в мешок, то кот и мешок все же остаются совсем непохожими вещами. Что касается (1), то я бы хотел вообще избежать того, чтобы описывать наблюдателя в терминах делимости или атомарности, поскольку считаю делимость и атомарность математическими свойствами, наблюдателя не считаю математическим объектом, который может обладать такими



свойствами. Между прочим, мир, который исследует внутренний наблюдатель, вполне может быть «внутренним миром», т.е. психическим миром самого наблюдателя. Каждая личность является именно *внутренним* наблюдателем своего психического мира, поскольку этот психический мир наблюдается не целиком, а как последовательность психических *состояний*. Каждое психическое состояние — это окрестность или локус психического мира личности. Своим вторым аргументом об отсутствии в мире недоступных для наблюдателя «тайных мест» автор усиливает свой тезис, доказывая, что внутренний геометрический подход требует не только предположить атомы (элементарные места, точки), но и предположить, что «весь объект представляется системой элементарных мест» (иными словами, атомов или точек. — *A.P.*), т.е. что *всякое* место или элементарно (т.е. является точкой), или в некотором смысле состоит из точек. Во-первых, мне кажется неуместным в данном контексте употребление слова «объект», более подходящее для словаря внешнего подхода: объект — это то, на что мы смотрим снаружи, а не изнутри. (Не имея сейчас возможности обосновать это утверждение, я замечу, что в случае внутреннего подхода более уместным оказывается говорить не об объектах, а о *событиях*.) Во-вторых, некоторое подобие «тайных мест» все же можно допустить, а именно, можно допустить, что в некоторых положениях наблюдатель не способен что-либо наблюдать. Именно такие «черные дыры» (особенности, сингулярности) естественно считать *точками*, поскольку в данном случае наблюдаемая окрестность вырождена и действительно не имеет никакой структуры. Внутренний подход допускает (но не требует) существование таких точек, однако их в некотором смысле не должно быть слишком много, иначе этот подход перестанет работать. Приводя свои контраргументы, я предполагал, что термин комментатора «элементарный» означает «атомарный», т.е. «неделимый», т.е. «точечный». Это единственная доступная мне интерпретация, которая позволяет мне отнести аргументы комментатора к моей проблеме.

*Л. О. Шашкину*

В своем ответе на комментарий В.А. Янкова я отметил, что предлагаемая мной переинтерпретация ZF не касается чисто формальной стороны дела: меняется (причем «с точностью до наоборот») содержательный смысл исходных символов, а формальная схема остается прежней. Если считать вопрос об интерпретации второстепенным, то разницу между стандартной экстенциональной и предложенной мной интенциональной интерпретацией

ZF можно действительно назвать непринципиальной. Впрочем, сам я не думаю, что вопрос об интерпретации формальной системы является второстепенным: в частности, не нужно забывать о том, что непротиворечивость формальной системы во многих случаях обосновывается именно с помощью ее интерпретации в другой системе, как, например, это делает Гильберт в «Основаниях геометрии». Однако сейчас я не буду подробно защищать эту общую точку зрения, а остановлюсь только на предложенной мною интенциональной интерпретации ZF.

Согласно комментатору, «замена объединения множеств пересечением (или конъюнкцией) свойств сохраняет методы теории множеств, только в первом случае рассматриваются совокупности элементов, а во втором — совокупности "ареалов"». Хотя такие выражения, как «пересечение свойств» и «конъюнкция свойств», стоило бы заменить на более точные, легко понять, что комментатор имеет в виду. Я хочу остановиться на другой неточности, которая прямо касается существа дела (и позволяет мне уточнить смысл моего предложения). Если бы от разговора о совокупностях элементов можно было легко переходить к разговору о совокупностях свойств или «ареалов», то различие между интенциональными и экстенциональными подходами в логике и математике было бы в самом деле тривиальным. Однако это не так, и вот почему. Принимая «аксиому связи», двойственную обычной аксиоме пары, мы вынуждены, чтобы сохранить нетронутой формальную систему (!), отказаться от аксиомы пары в обычном смысле. То же самое верно по отношению к аксиоме объединения и двойственной к ней аксиоме пересечения. Однако отказ от обычных аксиом пары и объединения означает, что свойства или «ареалы», вообще говоря, не образуют множеств или «совокупностей». Нельзя сохранить нетронутым формальный каркас ZF, мысля совокупности свойств вместо совокупностей элементов. Можно пытаться либо строить новые формальные *интенциональные системы* (см. по этому поводу *Intensional Mathematics*, S. Shapiro (ed.). N. Y., 1985)' либо искать *интенциональные интерпретации (интенциональные двойники)* аксиом пары и объединения, т.е. отказываться от этих аксиом, понятых в обычном смысле. (Еще можно, конечно, комбинировать эти два направления исследования.) Хотя с формальной

<sup>1</sup> Этот вопрос имеет непосредственное отношение к теории *Мейнонговских объектов*, т.е. объектов, задаваемых своими свойствами. Онтология таких объектов оказывается «раздутой», в частности, она допускает *невозможные объекты*, задаваемые несовместными свойствами, такие как круглый квадрат. Современную реконструкцию см. в: *Pasniczek Jacek. Ways of Reference to Meinongian Objects // Logic and Logical Philosophy. 1994. Vol. 2. Torun. P. 69-86.*

точки зрения первый путь представляется более содержательным (прошу прощения за этот парадоксальный оборот), я пошел по второму пути, который мне кажется важным и интересным для философии (в частности, поскольку он проливает новый свет на некоторые старые философские проблемы). Вопрос состоит в следующем. Можно ли помыслить две вещи или несколько вещей, не мысля при этом *совокупности* этих вещей? Отрицательный ответ на этот вопрос означал бы, что аксиомы пары и объединения составляют «жесткую» часть нашего мыслительного аппарата, т.е. что мы не можем отказаться от этих аксиом ни при каких условиях. Я предполагаю, что это все же можно сделать, если ввести в рассуждение *время*. А именно, разные вещи можно мыслить *в разное время*, не мысля их «вместе», т.е. не мысля их совокупности, т.е. в данном случае пары. Конечно, вопрос остается не вполне ясным. Попробуйте помыслить в разное время вещь *A* и вещь *B*. Можно сказать, что это сделать нельзя, поскольку, прочитав предыдущую фразу, Вы уже думаете об этих двух вещах вместе. Я могу заметить, что Вы все же сначала прочитали о вещи *A*, а уже потом о вещи *B*. И еще нужно отметить, что память в любом случае не является безграничной: наверняка есть такие вещи, о которых Вам случалось думать по отдельности, но никогда не случалось думать одновременно, подобно тому, как Вам случалось, может быть, бывать и в Петербурге, и в Москве, но никогда — в этих двух городах сразу<sup>2</sup>.

Вопрос о соотношении понятий внешнего и внутреннего (экстенционального и интенционального), с одной стороны, с актуальным и потенциальным пониманием бесконечности (а также с идеей конструктивности), с другой стороны, который ставит комментатор, мне представляется очень интересным. Однако я думаю, что дело обстоит несколько иначе, чем об этом говорит Л.О. Шашкин. По мнению комментатора, при внутреннем подходе «возможность работать в каждый момент только с конечной частью объекта исследования и, следовательно, получение информации в виде (потенциально бесконечной) последовательности "образов" должны, вероятно, привести к развитию некоторой "конструктивной науки"». Я бы мог к этому добавить, что идеи потенциальности и конструктивности также предполагают

<sup>2</sup> Между прочим, введение в рассмотрение времени позволяет избежать сложности, возникающей в аналогичной ситуации в теории Мейнонговских объектов, а именно необходимости допускать невозможные объекты вроде круглого квадрата (см. предыдущее примечание).

идею процесса, а следовательно, времени и изменения, а понятие времени, согласно сказанному выше, является ключевым именно для внутреннего подхода.

Однако между понятиями потенциальности и конструктивности в их отношении к внешнему и внутреннему подходам есть большая разница. Классическая «синтетическая» геометрия является «внешней» и одновременно конструктивной в том смысле, что из простых элементов в ней с помощью строго определенных процедур строятся сложные (вообще говоря, сколь угодно сложные) конструкции. Аналогичным образом аксиомы пары и объединения экстенциональной теории множеств позволяют конструировать новые множества из уже данных. При внутреннем подходе речь о конструкциях не идет: внутренний наблюдатель предполагает свой мир уже существующим (хотя он и не может «увидеть» свой мир снаружи как единое целое) и изучает этот мир изнутри. Платоновский неизменный мир предполагается, скорее, во втором, а не в первом случае. Различие между внешним и внутренним подходами состоит не в том, что в одном случае мы имеем дело с неподвижным и неизменным, а во втором — с подвижным и изменчивым, а в том, что в первом случае движутся и меняются наблюдаемые вещи (объекты в пространстве), а во втором — сам наблюдатель (проходя различные фазы своей истории). Атомы (точки) не могут изменять свои внутренние свойства (поскольку у них нет ничего внутреннего), но могут двигаться, а миры не могут двигаться (поскольку нет никакого внешнего пространства, в котором они могли бы двигаться), но могут внутренне меняться. Если отвлечься от важного вопроса о памяти, которого мы касались выше, то Москва и Петербург — это простой пример двух вещей, которые обычно не образуют наблюдаемой совокупности. Этот пример также хорошо иллюстрирует тезис о том, что миры могут меняться, но не могут двигаться: из Петербурга в Москву приходится ехать самому.

Несмотря на то что при внутреннем подходе мир или миры берутся как заранее существующие, их следует, скорее, считать существующими *потенциально*, а не актуально — по крайней мере если считать актуальным только то, что наблюдается локальным (внутренним) наблюдателем в данное время. Идея актуально бесконечного натурального числового ряда возникает на самом деле не тогда, когда этот ряд мыслят как существующее целое, а когда, например, к этому целому прибавляют единицу, чтобы получить число следующего числового класса (по терминологии Кантора), или применяют по отношению к нему другую *внешнюю* операцию

(или вводят его в некоторое внешнее отношение). Когда говорят о потенциальной бесконечности натурального ряда, натуральный ряд мыслят как возможность — не в том смысле, что натуральный ряд может быть целиком *построен* (сконструирован) подобно тому, как может быть построено любое конечное число, а в том смысле, что натуральный ряд представляет собой пространство возможностей такого конструирования. Если мы хотим быть уверены, что в принципе могут быть сконструированы сколь угодно большие натуральные числа, то мы должны предположить, что множество всех возможных чисел бесконечно. Делая такое предположение, мы предполагаем, что существует бесконечное множество, и считаем, что все его элементы в некотором смысле «заданы». Однако нам не нужно считать эти элементы действительными, достаточно считать их возможными.

*В.А. Янкову*

По поводу двойственности. Я хотел бы упомянуть о важном выводе, к которому я пришел уже после того, как закончил работу над статьей. Дело в том, что если мы во *всех* аксиомах ZF *везде* заменим  $\in$  на  $\subseteq$ , то это с формальной точки зрения будет означать, что *то же самое* (формально!) примитивное отношение мы обозначаем другим символом и даем ему другую содержательную интерпретацию. Это значит, что, с формальной точки зрения, мы не получаем никакой новой теории. Другими словами, ZF является самодвойственной в том смысле, в котором я говорю здесь о двойственности, а именно в смысле двойственности экстенциональности и интенциональности.

Теперь по поводу последнего замечания комментатора о том, что говоря об интенциональности, я «не дохожу до крайнего радикализма». Это действительно так уже потому, что, строя интенциональную теорию множеств или, говоря аккуратнее, давая интенциональную интерпретацию ZF, я пользуюсь стандартной экстенциональной логикой. Однако, быть может, экстенциональность логики — это тоже в некотором смысле только вопрос интерпретации? Может быть, выбор между экстенциональностью и интенциональностью, внешним и внутренним в некотором отношении вообще не существен и является делом личного вкуса? Может быть, все дело, скорее, в том, как мы *смешиваем* то и другое? (Я надеюсь, что этот вывод созвучен комментатору, находящему у меня параллели с Платоном и Кузанским.)