Аксиоматический метод в современной науке и технике: прагматические аспекты[1]

Сергей Протасович Ковалёв — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. E-mail: kovalyov@nm.ru

Андрей Вячеславович Родин — кандидат филос. наук, старший научный сотрудник, Институт философии РАН, доцент Санкт-Петербургского государственного унивеситета. E-mail: andrei@philomatica.org

В 1900 г. Давид Гильберт опубликовал свой знаменитый список из 23 открытых проблем, которые, по его мнению, должны были определить повестку математических исследований в новом XX в. Шестым номером в этом списке стоит задача аксиоматизации физики. С тех пор в решение этой задачи были вложены значительные усилия. Однако результаты оказались более скромными, чем надеялись ранние энтузиасты аксиоматического метода. Существующие аксиоматизации физических и биологических теорий обеспечивают их логический анализ, но не могут служить в качестве стандартного представления этих теорий, которое можно было бы использовать для передачи, оценки и обоснования физических или биологических знаний. Это положение вещей является сильным свидетельством в пользу тезиса о том, что стандартное понятие аксиоматического метода, основанное на работах Гильберта и Тарского, не подходит для данной цели. Однако в последние годы в математике возник новый аксиоматический подход, представленный гомотопической теорией типов (ГТТ). Мы показываем, что конструктивная аксиоматическая архитектура, используемая в ГТТ, может более успешно применяться в физике, а также в компьютерных науках и инженерии.

Ключевые слова: аксиоматический метод, аксиоматизация физики, конструктивная аксиоматическая архитектура, гомотопическая теория типов.

Axiomatic method in contemporary science and technology: pragmatic aspects

Serge Kovalyov — Institute of Control Sciences V.A. Trapeznikov, Russian Academy of Sciences

Andrei Rodin — Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences, assistant professor, Saint Petersburg State University.

In 1900 David Hilbert announced his famous list of then-opened mathematical problems; the problem number 6 in this list is axiomatization of physical theories. Since then a lot of systematic efforts have been invested into solving this problem. However the results of these efforts turned to be less successful than the early enthusiasts of axiomatic method expected. The existing axiomatizations of physical and biological theories provide a valuable logical analysis of these theories but they do not constitute anything like their standard presentation, which can be used for transmission, evaluation, and justification of physical and biological knowledge. This state of the art in the axiomatization of physics is strong evidence that the standard notion of axiomatic theory stemming from Hilbert and Tarski is not appropriate for the task. However in the recent years in mathematics there emerged a new axiomatic approach best represented by the Homotopy Type theory (HoTT). We argue that the constructive axiomatic architec-

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 13-03-00384.

ture used in HoTT has better chances to be successfully applied in physics as well as in computer science and engineering.
Key words: axiomatic method, axiomatization of physics, constructive axiomatic architecture, homotopy type theory.

1. Введение

Компьютерная революция последних нескольких десятилетий дала новый толчок развитию формальных логических исчислений и теории таких исчислений; в наши дни значительная часть такого рода исследований имеет практическую направленность и производится в дисциплинарных рамках компьютерных наук (Computer Science). Однако более внимательный взгляд на историю показывает, что далеко не все надежды, связанные с применением формальных средств в науке и технике, сегодня оправдались. В связи с этим часто ссылаются на математические результаты Геделя, Тьюринга и Тарского, которые устанавливают фундаментальные теоретические ограничения формализации[2]. Вместе с тем можно указать на нереализованные возможности формализации знаний, которые не попадают под эти фундаментальные ограничения. Наша цель состоит в том, чтобы проанализировать те трудности, с которыми столкнулись попытки реализации такого рода проектов в прошлом, и обсудить перспективные способы преодоления этих трудностей. Мы покажем, что часть этих трудностей имеет не чисто технический, а скорее концептуальный характер, что делает уместным не только логико-математический, но и более широкий философский подход к данной проблеме.

2. Формальный аксиоматический метод и его применения

Представляя публике свою программу формализации математики в 1927 г., Гильберт [Hilbert, 1927] высказал надежду на то, что в недалеком будущем формальный аксиоматический метод станет «основным инструментом всякого теоретического исследования». Под теоретическими исследованиями Гильберт имеет здесь в виду не только чистую математику, но и естественные науки, прежде всего физику. В какой мере этот проект формализации математики и естественных наук можно сегодня считать реализованным? Мы попробуем ответить на этот во-

[2] В частности, из этих результатов следует невозможность для формальной теории, содержащей арифметику, формально доказать собственную непротиворечивость, а также отсутствие универсального алгоритма, проверяющего любой данный алгоритм на возможность «зацикливания».

прос, рассматривая отдельно ситуацию в математике, естественных науках, а также информационных технологиях и компьютерных науках.

Математика. Когда заходит речь об исследованиях на стыке логики и математики, обычно сразу обращают внимание на *математическую логику*. Однако нужно иметь в виду, что успехи математической логики сами по себе еще ничего не говорит об успехе или неудаче гильбертовского проекта формальной аксиоматизации математики. Чтобы оценить значение логических методов для математики в целом, необходимо принять во внимание широкий спектр математических дисциплин, а не ограничиваться математическими дисциплинами, связанными с логикой каким-то специальным образом (как, например, аксиоматическая теория множеств).

Место логики в современной математике можно описать следующим образом. С одной стороны, математическая логика и формальный аксиоматический метод являются ключевыми элементами стандартных теоретико-множественных *оснований* математики. В этом специальном смысле можно утверждать, что формальные логические методы действительно имеют для современной математики универсальное значение. С другой стороны, можно заметить, что логические методы в явном виде практически никогда не используются в математике за пределами исследований по основаниям математики и теории множеств. Поэтому можно также с уверенностью сказать, что в современной практике математических исследований логические методы имеют весьма ограниченную область применения.

Противоречие между этими двумя утверждениями только кажущееся. Практически любая математическая теория[3], которую профессиональное математическое сообщество считает хорошо проверенной и установленной, в *принципе* допускает стандартную теоретико-множественную формализацию. Однако в таких случаях речь идет только о *принципиальной возможности* формализации, а вовсе не об эффективной реализации этой возможности. Утверждение о том, что данная теория T может быть (в принципе) представлена в виде некоторой формальной теории T_F, может быть затем использовано в качестве слабого необходимого условия корректности T. Разумеется, такое условие не является достаточным, поскольку принципиальная (но не реализованная!) возможность формализовать T в виде T_F не позволяет использовать T_F для проверки корректности рассуждений в T. Хотя такая проверка в рамках описываемого подхода признается в принципе возможной, практически она оказывается недоступной.

[3] Некоторые существующие теории требуют расширения стандартных методов формализации с помощью аппарата *универсумов Гротендика* [Bourbaki, 1972: 185–217] и других специальных средств, но мы сейчас не будем специально заострять внимание на таких случаях.

Можно было бы ожидать, что использование электронной вычислительной техники, которая многократно повышает доступные человеку вычислительные мощности, поможет уменьшить разрыв между тем, что возможно в принципе, и тем, что возможно на практике. На самом деле использование компьютеров делает этот разрыв еще более явным, а также показывает, что граница между возможным и действительным в данном случае устроена более сложно, чем это казалось ранее. Сегодня формальная компьютерная проверка математических рассуждений (доказательств) остается на стадии теоретической разработки и отдельных успешных попыток[4].

Таким образом, между «официальными основаниями» математики и математической практикой, включая исследовательскую и образовательную практику, а также практику применения математических методов в других науках и технике, сегодня существует весьма значительный разрыв или, если использовать более нейтральный термин, значительная дистанция. Философы, логики и математики, специализирующиеся в области оснований, описывают математические теории в виде, который разительно отличается от того, как эти же теории представлены в стандартных математических публикациях и учебниках. Некоторые философы и логики видят в таком положении вещей вполне естественное разделение труда, которое позволяет математикам оставить все вопросы оснований на откуп специалистам, и самим заниматься более содержательными аспектами математических проблем и теорий. В то же время многие авторитетные математики высказываются в том духе, что стандартные основания математики вовсе не имеют никакого отношения к их науке и создают о ней неадекватное представление [Арнольд, 2002].

Вместе с тем было бы неверно утверждать, что логические методы в математике и связанные с ними философские идеи вовсе не оказали никакого влияния на математику в XX в. «Полуформальная» версия аксиоматического метода в духе раннего Гильберта [Hilbert, 1899] в сочетании с так называемой «наивной», т.е. содержательной, а не формально-аксиоматической версией теории множеств, сегодня широко используется в качестве стандартного средства представления математических теорий, особенно в университетских учебниках. Важнейшей попыткой найти действенный компромисс между требованиями формальной и логической строгости, с одной стороны, и требованиями математической практики — с другой, стал опубликованный во второй половине XX в. группой французских математиков, использующей псевдоним Н. Бурбаки, многотомный труд «Элементы

[4] Первое доказательство нетривиального математического утверждения, в котором существенную роль играл компьютер, было опубликовано в 1977 г. Аппелем и Хакеном [Appel, Haken, 1977]. Речь идет о решении известной проблемы (ставшей после 1977 г. теоремой) *четырех красок*.

математики» [Bourbaki, 1939–1988]. Хотя в математическом сообществе сегодня преобладает скорее негативная оценка этого фундаментального труда, он тем не менее внес значительный вклад в систему профессионального математического образования во второй половине XX в. во всем мире.

Приведенный выше краткий обзор показывает, что высокие ожидания Гильберта и его последователей в отношении практических перспектив широкого применения в математике формальных логических методов на сегодняшний день пока не оправдались, хотя в разработке самих этих методов за прошедшие десятилетия произошел значительный прогресс. В следующем разделе статьи мы обсудим ряд новейших подходов, которые дают основания для оптимизма.

Физика. В 1900 г. на международном математическом конгрессе в Париже Гильберт публично представил свой ставший впоследствии знаменитым список из 23 нерешенных математических проблем [Hilbert, 1902]. Шестой номер в этом списке — у проблемы аксиоматизации фундаментальных физических теорий. Эта проблема до сих пор остается открытой, а по поводу ее актуальности для современной науки высказываются различные и зачастую полярные мнения.

Известные сегодня попытки аксиоматического представления физических теорий можно условно разделить на два основных типа. Попытки первого типа используют понятие формальной аксиоматической теории в духе Гильберта–Тарского [Tarski, 1941] в сочетании с классическим исчислением предикатов (обычно только первого порядка). Попытки второго типа используют неформальное понятие об аксиоматической теории в сочетании (в некоторых случаях) с идеей неклассической *квантовой* логики. Если попытки первого типа принадлежат исключительно логикам и философам науки, то попытки второго типа принадлежат в основном самим физикам. Как мы сейчас увидим, на сегодняшний день «аксиоматика логиков» и «аксиоматика физиков» существенно отличаются друг от друга — вплоть до того, что значительная часть логического сообщества вовсе не признает аксиоматические построения физиков в качестве таковых. Таким образом, в современной физике вопрос об адекватности «аксиоматического подхода логиков» существующей научной практике стоит еще более остро, чем в чистой математике.

Подробный обзор исследований в области аксиоматизации физики до 1972 г., а также содержательную дискуссию о значении аксиоматического метода в физике можно найти у Бунге [Bunge, 1967; Bunge, 1972]; в этих же работах Бунге описывает и свои собственные попытки аксиоматизации физических теорий. Работа Бунге, так же как и большинство рассматриваемых в его книге более ранних работ, относится к физической аксиоматике первого типа («аксиоматика логиков»). Следуя Тарскому [Tarski, 1941], Бунге формулирует основные предпосылки своего подхода к аксиоматизации физики следующим образом:

> Существует единственная теория, которая строится с нуля, а именно математическая логика… Все другие теории предполагают по меньшей мере логику и, как правило, используют дополнительные предположения. Говоря более точно, минимальная теория, которую всякая математическая и вообще всякая научная теория принимает как данность — это обычная [то есть классическая] двузначная логика предикатов [по-видимому, первого порядка], дополненная микротеорией тождества [Bunge, 1972: 135] (перевод авторов).

Это суждение Бунге носит нормативный, а не описательный характер; оно говорит о том, как физики (или любые другие теоретики) *должны* строить свои теории, а вовсе не о том, как они это на самом деле делают. Попытка Бунге аксиоматизировать физику представляет собой попытку перестройки физики по заранее заданному образцу. Бунге, по-видимому, исходит из того, что вопрос о *логической форме* физической теории находится в компетенции не физиков, а логиков и философов и может быть решен независимо от любых физических соображений.

Не вдаваясь глубоко в философскую полемику о природе логики и других подобных общих вопросах, мы укажем только на фундаментальное возражение против подхода Бунге, которое сделал Патнэм [Putnam, 1968] (и ранее делали некоторые другие авторы). Согласно Патнэму, логическая часть физической теории подлежит эмпирической проверке наравне с любой другой частью этой теории. Поскольку квантовая теория (а) является эмпирически проверенной с высокой степенью надежности и (б) приводит к логическим парадоксам, есть смысл скорректировать обычно используемую классическую логику, заменив ее подходящей *квантовой* логикой, в которой таких парадоксов не будет. Использовать старую логику в новой фундаментальной физической теории, по мнению Патнэма, значит недооценивать степень новизны этой теории. Критический разбор аргументов Патнэма и интересные контраргументы можно найти у Даммита [Dummett, 1976]. Со своей стороны мы заметим, что стандартная архитектура аксиоматических теорий, которую использует Бунге, допускает использование вместо классического исчисления предикатов других логических исчислений, включая различные варианты квантовой логики. Поэтому вопрос об адекватности подхода Бунге не сводится к вопросу о выборе базового логического исчисления, но включает в себя также вопрос об адекватности выбранной аксиоматической архитектуры, к которому мы вернемся ниже.

Идею о том, что с квантовой теорией может быть связана особая неклассическая логика, первым высказал фон Нейман в книге 1932 г. [Neumann, 1932], которую он рассматривал в качестве попытки аксиоматического построения квантовой теории; более систематично и основательно понятие о квантовой логике ввели фон Нейман и Биркгоф в статье 1936 г. [Birkhoff, 1936]. Работа фон Неймана определенно относится к «аксиоматике физиков»; в отличие от работ Бунге книга фон Неймана [Neumann, 1932] стала классической в своей области и оказала существенное влияние на дальнейшее развитие квантовой теории. Реакция Бунге на эту работу фон Неймана является типичной и характеризует непростые взаимные отношения между логиками, интересующимися физическими приложениями своей науки, с одной стороны, и физиками, пытающимися пользоваться логическими методами и подходами, — с другой:

Ошибочно думать, что фон Нейман действительно построил аксиоматические основания квантовой механики. В его изложении отсутствуют все характеристики современной аксиоматики… И тем не менее по какой-то странной причине эта работа считается образцом физической аксиоматики [Bunge, 1972: 132].

Действительно, в изложении фон Неймана отсутствует всякое четкое разделение синтаксиса и семантики, которое является базовым для формального аксиоматического метода. Такой же полуформальный (или вовсе неформальный) характер имеют и другие известные попытки аксиоматизации физических теорий, которые мы выше назвали «аксиоматика физиков». Кроме классической книги фон Неймана в этом ряду необходимо также упомянуть (не упомянутую Бунге) важную работу Маки [Mackey, 1963]; современный обзор можно найти в [Chiara, 2004], см. также [Puccini, 2004].

Идея формального аксиоматического построения квантовой теории на основе квантовой логики была выдвинута (но не реализована в соответствии с существовавшими в то время логическими стандартами) ученицей де Бройля Паолеттой Феврие [Février, 1951]. Эту работу подвергли жесткой критике МакКинзи и Суппес [McKinsey, 1954], по мнению которых проект Феврие требовал полной перестройки успешно используемой в квантовой теории классической математики и поэтому был заведомо нереалистичным. Ван Фраассен в статье 1974 г. с говорящим названием «Лабиринты квантовых логик» [Fraassen, 1974] предпринял попытку переформулировать ранее высказанные фон Нейманом, Рейхенбахом и некоторыми другими авторами неформальные соображения о квантовой логике в соответствии с принятыми в философском сообществе логическими стандартами. Результатом этой работы стало не одно определенное логическое исчисление, а описание целого семейства таких исчислений. В 2004 г. такого же рода работа была выполнена Чиарой, Джунтини и Гричи

[Chiara, 2004], которые пришли к ожидаемому заключению, что на протяжении четверти века после публикации статьи ван Фраассена «лабиринт квантовых логик становился все более и более лабиринтным» (Chiara, 2004: 268–269) .

Как и многие другие логики и философы, ван Фраассен отказывается рассматривать квантовую логику в качестве средства аксиоматической перестройки и дальнейшего совершенствования квантовой теории и ограничивает задачу исследований в этой области логическим анализом, не претендующим ни на какое прямое вмешательство в анализируемую теорию. Такую осторожную позицию можно считать разумной, но нужно иметь в виду, что она делает исследования в области квантовой логики неинтересными и нерелевантными для физиков, которые, как правило, интересуются логическими методами постольку, поскольку такие методы могут что-то дать их науке.

В 1971 г. Снид [Sneed, 1971], опираясь на идеи Суппеса [Sugar, 1953], предложил альтернативный подход к логической реконструкции физических теорий, в которых теория отождествляется не с системой высказываний (аксиом и теорем), выраженных на подходящем формальном языке, а с некоторым классом моделей. Такой подход получил название *непропозиционального* (non-satement view) или *семантического* [Fraassen, 1987]. Эти идеи получили развитие в работах Штегмюллера [Stegmüller, 1979], Мулинеса и Бальцера [Moulines, 1987]; впоследствии к этому проекту присоединились и другие исследователи [Balzer, 1996; Moulines, 2000]. Как замечает Штегмюллер, все попытки использовать стандартный аксиоматический подход (в духе Бунге) для представления современных физических теорий сталкиваются с непреодолимыми практическими трудностями. Выход Штегмюллер видит в том, чтобы вслед за математиками использовать полуформальный аксиоматический стиль в духе Бурбаки[5].

Несмотря на то что в развитие проекта Снида–Штегмюллера на протяжении нескольких десятилетий вкладывались довольно значительные усилия, сегодня можно констатировать, что результаты этих исследований не нашли применения в физических исследованиях или в физическом образовании. Данный подход позволяет реконструировать научные теории в форме, которая может быть полезна для целей логического и философского анализа, но на практике оказывается совершенно неподходящей для научных публикаций и учебников.

Биология. Среди ранних попыток аксиоматического построения биологической теории следует упомянуть работу Вудгера 1937 г. [Woodger, 1937], в которой автор пытается использовать для этой це-

[5] Вслед за Бурбаки Штегмюллер связывает свою семантическую версию аксиоматического подхода с философией *структурализма*, отсекая, впрочем, многие направления философского структурализма как нерелевантные.

ли формализм *Principia Mathematica* Рассела и Уайтхеда. Проект Вудгера имел практическую направленность в том смысле, что ставил своей целью построение биологической теории в соответствии со стандартами формальной логической строгости в духе Тарского, с которым Вудгер лично сотрудничал во время написания своей книги. Подобно тому, как это случилось в математике и физике, попытка Вудгера не получила широкого признания в сообществе биологов и, кроме того, подверглась жесткой критике более молодого поколения философов биологии [Nicholson, 2014]. Интересно, что и сторонники, и противники идеи использования формальных логических методов в биологии часто говорят об этом как о переносе в биологию методов точных наук. На самом деле, как мы только что показали, использование логических методов в математике и физике сталкивается с совершенно аналогичными трудностями.

Известные нам более поздние попытки аксиоматизации биологических теорий ставят своей целью логический и эпистемологический анализ этих теорий и не предполагают непосредственного использования формальных логических методов в биологических исследованиях [Esanu, 2013].

Компьютерные и инженерные науки. Несмотря на то что идея использования формальных символических исчислений в инженерии была высказана Лейбницем еще в XVII в. [Leibniz, 1679], аксиоматический метод часто считают квинтэссенцией «чисто теоретического» мышления. С этой точки зрения проверка полезности технического изделия путем натурного или виртуального испытания обычно представляется гораздо более значимой, чем формальное математическое доказательство правильности его функционирования. Ситуация усугубляется тем, что аксиоматизация изделия в объеме, достаточном для доказательства его потребительских свойств, требует очень высоких затрат труда и времени. Даже хорошо аксиоматизированные виды изделий, такие, как геометрические тела или тепловые двигатели, в прикладных науках, как правило, рассматриваются рецептурно, без обращения к формальному выводу.

Тем не менее известен ряд попыток систематически внедрить аксиоматический метод в программирование и инженерию. Уже около полувека разрабатывается аксиоматический подход к описанию функционирования программ на алгебраическом языке, позволяющий строго доказывать их корректность [Hoare, 1969]. Операторы программы при этом рассматриваются как правила вывода специфической дедуктивной системы, так что путем доказательства можно проверять правильность результатов исполнения программы (пост-условия) при правильных исходных данных (пред-условиях). В *аксиоматическом проектировании* (axiomatic design) [Suh, 2001; Lee, 2006;

Haik, 2005; Fiege, 2009] предлагается формально описывать инженерный проект как матрицу-оператор, преобразующий вектор функциональных параметров изделия в вектор проектных параметров конструкции. Аксиомы здесь определяют, какие матрицы отвечают «правильным» проектам. Однако в большинстве случаев привлечение подобных подходов в конкретных проектах сопряжено с затратами, превышающими видимый полезный результат.

Более перспективным представляется подход, когда в качестве аксиом выступают положения, нормирующие деятельность программистов и инженеров. Тогда можно в явной форме потребовать соблюдения аксиом при организации технической деятельности и таким образом обеспечить применимость и эффективность результатов, выведенных из этих аксиом. Конечно, здесь интерес представляет только конструктивный аксиоматический метод: правила конструирования объектов *описывают* деятельность, а аксиомы *предписывают* выполнять ее так, чтобы достигать желаемых результатов. С этой точки зрения частными случаями аксиоматических систем можно считать многие технические стандарты и методики.

В качестве примера применения такого подхода приведем понятие *аспекта* (aspect) в компьютерных науках. Программисты называют аспектами примитивные функции систем, которые не поддаются локализации в рамках отдельных модулей, а «рассеиваются» по всей системе, многократно дублируясь и перепутываясь с реализацией различных алгоритмов. Примерами аспектов служат ведение журналов функционирования системы, защита информации и т.д. Для повышения эффективности программной реализации аспектов в конце 1990-х гг. была предложен новый подход — аспектно-ориентированное программирование [Kiczales, 1997]. Были созданы специальные автоматизированные средства для подключения аспектов к системе путем связывания (weaving), избавляющего от необходимости вручную многократно дублировать программный код. Однако область применения средств данного программирования оказалась очень ограниченной, в том числе из-за отсутствия общей семантической модели аспекта, не привязанной к частным языкам и технологиям программирования [Steimann, 2006]. Более строгое определение понятия аспекта было сформулировано одним из авторов данной статьи с помощью языка теории категорий [Ковалев, 2013].

Аксиоматический метод используется в компьютерных науках также в работах по автоматизации дедуктивного вывода. Программы, предназначенные для доказательства теорем (proof assistants), создавались начиная с 1950-х гг. [Хоггер, 1988]. Однако скоро выяснилось, что компьютер не может «наблюдать» свойства математических объектов, составляющие содержание аксиом и теорем в традиционном аксиоматическом методе, в каком бы то ни было смысле. Компьютер способен конструировать объекты, шаг за шагом применяя финитные рекурсивные правила к финитным исходным данным. Тщательный анализ этой проблемы привел к появлению нового подхода в основаниях математики, который мы обсудим в следующем разделе.

3. Актуальные проблемы аксиоматического метода

Современная математика становится все более разветвленной, а исследования в каждой области математики — все более сложными и изощренными. В этой ситуации возможности проверки новых анонсированных результатов становятся все более ограниченными: такая проверка оказывается доступной только для узкой группы экспертов, суждениям которых остальная часть научного сообщества вынуждена доверять. Эффективная формализация современной математики, позволяющая любому заинтересованному лицу самостоятельно провести формальную проверку любого математического результата с помощью компьютера, могла бы позволить решить данную проблему. Формализация математических рассуждений только в указанном смысле не означает, что математика теряет человеческое измерение и превращается в автоматизированный машинный процесс; речь идет лишь о том, чтобы передать машине рутинную часть математической работы и дать людям больше возможностей для математического творчества.

Сказанное о математике в определенной степени можно отнести и к естественным наукам, в которых также остро стоит проблема коммуникации между учеными различных узких специальностей. Но аксиоматизация естественных наук имеет прямое отношение и к другой проблеме, которую в последние годы стали называть *проблемой Больших Данных* (Big Data) [Mainzer, 2014]. Проблема состоит в том, что сырой эмпирический материал, который благодаря новым электронным технологиям теперь можно накапливать и хранить в невообразимых ранее объемах, требует принципиально новых способов обработки. Для решения этой проблемы в компьютерных науках сформировалось целое научное направление, которое называют *представлением знаний* (knowledge representation) [Lifschitz, 2008]. Центральной идеей этой области исследований была и остается идея компьютерной реализации формального логического вывода, с помощью которого реконструируются рассуждения в данной предметной области. Начиная с пионерских работ Маккарти [McCarthy, 1959] для этой цели, как правило, используется классическая первопорядковая логика (или ее фрагменты) с добавлением специальных операторов, позволяющих описывать временные, эпистемические и другие важные в приложениях контексты. Построенные на этих логических принципах стандартные системы компьютерного представления знаний используются сегодня в основном в описательных науках, таких, как геология; а исследователи, работающие в области фундаментальной физики и других высокотеоретизированных областях науки, пользуются для компьютерной обработки своих данных уникальными разработками. Открытая проблема состоит в том, чтобы найти новую форму аксиоматического представления современных научных теорий, которая, с одной стороны, была бы достаточно гибкой для того, чтобы представлять теории разных типов, а с другой стороны, допускала бы компьютерную реализацию и позволяла эффективно работать с Большими Данными.

В инженерии в скором времени ожидается широкое внедрение «слабого» искусственного интеллекта — компьютерных средств выработки инженерных и дизайнерских решений [Левенчук, 2015]. Естественной предпосылкой для этого служит понимание того, что инженерная мысль всегда ограничена строгими рамками законов физики и техники, которые способны служить источниками богатого набора аксиом. Из этих аксиом формально выводятся свойства пространства проектных параметров (design space), в котором решение ищется как точка, доставляющая (суб)экстремальное значение подходящей целевой функции, под которую проектируется изделие [Ковалев, 2014]. Задача состоит в том, чтобы построить универсальный (но не обязательно единственный) аксиоматический язык системной инженерии, обладающий доказательной силой и в то же время реализуемый на достаточно мощных вычислительных машинах.

4. Унивалентные основания математики и конструктивная аксиоматическая архитектура

Краткий исторический обзор применения формального аксиоматического метода в науке и технике, который мы привели в начале статьи, может дать повод для пессимистических выводов. Первоначальный энтузиазм по поводу перспектив применения аксиоматического метода в физике и биологии, который адепты этого метода высказывали в 1930-х — 1950-х гг., во второй половине XX в. сменился более сдержанными оценками. Даже в математике при ближайшем рассмотрении успехи применения аксиоматического метода оказываются более скромными, чем может показаться на первый взгляд. Однако для пессимизма в этом вопросе все же нет достаточных оснований, поскольку научные достижения прошедшего XX в. не только открыли для аксиоматического метода новые области и возможности применения, но и предоставили новые средства для реализации этих возможностей.

В качестве такого средства мы кратко рассмотрим *гомотопическую теорию типов* (ГТТ) и тесно связанный с этой теорией проект построения новых *унивалентных оснований* (УО) математики [Voevodsky, 2013]. Формальной основой ГТТ–УО является *конструктивная теория типов* Мартина-Лёфа [Martin-Löf, 1984] (ТТМЛ), которая была задумана с расчетом на компьютерные применения и использована при создании программных продуктов, таких, как AGDA и COQ. Открытие Воеводского состояло в том, что он нашел геометрическую (точнее, теоретико-гомотопическую) модель теории Мартина-Лёфа, позволившую изучить и понять богатую структуру отношения тождества в ТТМЛ, которая без использования такой модели оставалась практически «невидимой» и во всяком случае совершенно непонятной. Идея использования ГТТ–УО в качестве основания всей математики, а также в качестве логико-математического основания физических и других естественно-научных теорий мотивируется формальным характером ТТМЛ, который позволяет смотреть на ГТТ–УО не только как на содержательную геометрическую теорию, но и как на своего рода геометризованную логику.

Опуская технические детали, покажем, чем аксиоматическая архитектура ГТТ–УО выгодно отличается от стандартной аксиоматической архитектуры Гильберта–Тарского. В стандартных аксиоматических теориях можно выделить два «этажа»: на одном этаже (для определенности назовем его верхним) расположена формальная теория, состоящая из неинтерпретированных высказываний, тогда как на нижнем этаже расположена предметная область, в которой эти высказывания интерпретируются и получают истинностные оценки. Эта конструкция хорошо соответствует традиционным метафизическим и эпистемологическим представлениям, связанным с понятием теории: на нижнем этаже мы имеем *предметную область* теории, а на верхнем — *языковые конструкции*, с помощью которых данная теория описывает свои предметы.

На первый взгляд может показаться, что перекрытие между двумя этажами только что описанной конструкции точно соответствует формальному различию между синтаксисом и семантикой теории. Однако это на самом деле не совсем так, поскольку интерпретация синтаксически правильно построенной формулы F в качестве допускающего истинностную оценку *высказывания* — это также семантическая операция. То же можно сказать и о входящих в F *логических* константах. Если трактовать формулу F как «чисто» синтаксический объект, то о ней нужно говорить не как о высказывании, а просто как о последовательности символов.

С самого начала ТТМЛ предполагает некоторый список базовых *типов* $T_1, \ldots, T_k, \ldots$ и правила, по которым из этих базовых типов строятся новые типы. Вопрос о том, какие именно типы в ТТМЛ можно и нужно отождествить с высказываниями, не является вполне очевидным и в настоящее время продолжает дебатироваться. Популярная конструкция *изоморфизма Карри–Ховарда* [Sorensen, 2006] дает повод рассматривать всякий тип как обобщенное высказывание, а термы этого типа — как доказательства данного высказывания, одновременно используя экстенсиональную трактовку типов как множеств (в наивном смысле) или классов. Однако есть много указаний на то, что такая широкая трактовка изоморфизма Карри–Ховарда является слишком вольной; во всяком случае она лишена всякой философской и логической основательности. Гомотопическая модель ТТМЛ (т.е. ГТТ) позволила пролить новый свет на этот вопрос и сформулировать более узкое понятие «голого» высказывания (mere proposition) как типа, который может быть либо пуст (ложное высказывание), либо содержать единственный элемент, свидетельствующий о его истинности (см.: [Voevodsky, 2013: 103]). Это позволяет утверждать, что *наряду* с высказываниями ГТТ также содержит объекты других типов. Такую нестандартную аксиоматическую архитектуру мы предлагаем называть *конструктивной* [Rodin, 2015].

Напомним теперь аргументы Снида и Фраассена в пользу *семантического* подхода к аксиоматическому построению научных теорий: научная теория — это в первую очередь класс моделей, а не набор формальных высказываний, истинных во всех моделях данного класса. Вопрос, на который у этих авторов нет хорошего ответа, состоит в том, как строить такие классы моделей независимым образом. На этот вопрос ГТТ–УО отвечает следующим образом: модели строятся из выбранных базовых элементов по тем же общим правилам, по которым из выбранных аксиом выводятся теоремы. Таким образом конструктивная архитектура ГТТ–УО позволяет реализовать семантический подход Снида и Фраассена более полно и более эффективно. Первые попытки использовать ГТТ для аксиоматического построения квантовой теории поля были недавно предприняты Шрайбером [Schreiber, 2014a; Schreiber, 2014b].

В заключение мы хотели бы подчеркнуть, что выбор той или иной аксиоматической архитектуры не является чисто техническим вопросом: всякая такая архитектура отражает фундаментальные эпистемологические предпосылки, связанные с понятием научной теории. Поэтому новый конструктивный аксиоматический подход, представленный в ГТТ–УО, заслуживает самого пристального внимания логиков, эпистемологов и философов науки.

References

Appel, 1977 — Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable. Part I. Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 21, pp. 429–490, 1977.

Arnold, 2002 — Arnold V.I. Matematicheskaya duel' vokrug Bourbaki (The Mathematical Duel around Bourbaki). *Vestnik Rossiiskoi Akademii Nauk – The Bulletin of the Russian Academy of Sciences*, 2002, vol. 72, no.3, pp. 245–250.

Balzer, 1996 — Balzer W., Moulines U. (eds.). *Structuralist Theory of Science: Focal Issues, New Results (Perspectives in Analytical Philosophy, vol. 6)*. Berlin: de Gruyter, 1996.

Birkhoff, 1936 – Birkhoff G., von Neumann J. The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, 1936, vol. 37, pp. 823–843.

Bourbaki, 1939–1988 — Bourbaki N. *Elements de Mathematique*. 10 vols. Paris: Hermann, 1939–1988.

Bourbaki, 1972 — Bourbaki N. Univers. In: Artin M., Grothendieck A., Verdier J.-L. (eds.) *Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois Marie 1963-64 Theorie des topos et cohomologie etale des schemas (SGA 4), vol. 1 (Lecture notes in mathematics, vol. 269)* (in French). Berlin, N.Y.: Springer-Verlag, 1972, pp. 185–217.

Bunge, 1967 — Bunge M. *Foundations of Physics*. Berlin, N.Y.: Springer-Verlag, 1967.

Bunge, 1972 — Bunge M. *Philosophy of Physics*. Berlin, N.Y.: Springer-Verlag, 1972.

Chiara, 2004 — Chiara M.D., Giutini R., Greechi R. *Reasoning in Quantum Theory (Trends in Logic: Studia Logica Library, vol. 22)*. Berlin, N.Y.: Springer-Verlag, 2004.

Dummett, 1976 — Dummett M. Is logic empirical? In: Lewis H. D. (ed.), *Contemporary British Philosophy*, 4th series, London: Allen and Unwin, 5:45–68, 1976.

Fevrier, 1951 — Destouches-Fevrier P. *La structure des theories physiques*. Paris, Presses Universitaires de France, 1951.

Fiege, 2009 — Fiege R. *Axiomatic Design: Eine Methode zur serviceorientierten Modelierung*. Wiesbaden, Gabler Research, 2009.

Fraassen, 1974 — van Fraassen B. The labyrinth of quantum logics. In: Cohen R., Wartofsky M. (eds.) *Logical and Epistemological Studies in Contemporary Physics*. Boston Studies in the Philosophy of Science, 13:224– 254, 1974.

Fraassen, 1987 — van Fraassen B. The semantic approach to scientific theories. In: Nersessian N.J. (ed.) *The Process of Science: Contemporary Approaches to Understanding Scientific Practice*, Kluwer, 1987, pp. 106–124.

Esanu, 2013 — Esanu A. Evolutionary biology and the axiomatic method revisited. *The Romanian Journal of Analytic Philosophy*, 2013, vol. 7, no.1, pp. 19–41.

Haik, 2005 — El-Haik B.S. *Axiomatic quality. Integrating axiomatic design with six-sigma reliability and quality engineering*. N.Y.: Wiley-Interscience, 2005.

Haken, 1977 — Haken W., Appel K., Koch J. Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 1977, vol. 21, pp. 491–567.

Hilbert, 1899 — Hilbert D. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig, 1899.

Hilbert, 1902 — Hilbert D. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1902, vol. 8, no. 10, pp. 437–479.

Hilbert, 1927 — Hilbert D.. Foundations of mathematics. In: J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Godel: A Source Book in the Mathematical Logic*, vol. 2, pp. 464–480, 1967.

Hoare, 1969 — Hoare C.A.R. An axiomatic basis for computer programming. *Communications of the ACM*, 1969, vol. 12, no. 10, pp. 576–580.

Hogger, 1988 — Hogger K. Vvedenie v logitcheskoye programminrovamie (Introduction to Logic Programming), Moscow, 1988.

Kiczales, 1997 — Kiczales G. et al. Aspect-oriented programming. *Lecture Notes in Computer Science*, 1241:220–242, 1997.

Kovalyov, 2013 — Kovalyov S.P., Semantika aspektno-orientirovannogo modelirovanija dannikh i protzessov. (Semantics of aspect-oriented modeling of data and processes, Informatics and its applications). *Informatika i ee primenenija – Informatics and its application,* 2013, vol. 7, no. 3, pp.70–80.

Kovalyov, 2014 — Kovalyov S.P. Teoretiko-kategorniy podkhod k proektirovaniyu programmnykh system (Cathegory-theoretic approach to designing programmed systems). *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika – Fundamental and applied mathematics*, 2014, vol. 19, no.3, pp. 111–170.

Lee, 2006 — Lee D.G., Suh N.P. *Axiomatic Design and Fabrication of Composite Structures. Applications in Robots, Machine Tools, and Automobiles*. Oxford University Press, 2006.

Leibniz, 1679 — Leibniz G.W. Characteristica geometrica. In: C.I. Garhardt (ed.) *Leibnizens Mathematische Schriften*, Halle 1849–1863, 5:141–168, 1679.

Leventchuk 2015 — Leventchuk A.I. Sistemnoingenernoye myshlenie (System engineering thinking). 2015. Available at http://techinvestlab.ru/

Lifschitz, 2008 — Lifschitz V., van Harmelen F., Porter B. *Handbook of Knowledge Representation*. Elsevier Science, 2008.

Mackey, 1963 — Mackey G.W. *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. N.Y., Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc., 1963.

Mainzer, 2014 — Mainzer K. *Die Berechnung der Welt: Von der Weltformel zu Big Data*. C.H. Beck, 2014.

Martin-Löf, 1984 — Martin-Löf P. *Intuitionistic Type Theory (Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980)*. Napoli: BIBLIOPOLIS, 1984.

McCarthy, 1959 — McCarthy J. Programs with Common Sense, *Proceedings of the Teddington Conference on the Machanization of Thought Processes*, pp. 756–791. London: Her Majesty's Stationery Office

McKinsey, 1954 — McKinsey J.C.C., Suppes P. Review of "La structure des theories physiques" by P. Destouches-Fevrier. *Journal of Symbolic Logics*, 19(1):52–55, 1954.

Moulines, 1987 — Moulines U., Balzer W., Sneed J.D. *An architectonic for science*. Reidel, 1987.

Moulines, 2000 — Moulines U., Balzer W., Sneed J.D. (eds.). *Structuralist Knowledge Representation: Paradigmatic Examples (Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities, vol. 75)*. Amsterdam: Rodopi, 2000.

Neumann, 1932 — von Neumann J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin, N.Y.: Springer-Verlag, 1932.

Nicholson, 2013 — Nicholson D.J., Gawne R. Rethinking Woodger's legacy in the philosophy of biology. *Journal of the History of Biology*, 2013, vol. 47, pp. 243–292.

Puccini, 2004 — Puccini G., Vucetich H. Axiomatic foundations of Galilean quantum field theories. *Foundations of Physics*, 2004, vol. 34, no. 2, pp. 263–295.

Putnam, 1968 — Putnam H. Is logic empirical? In: R. Cohen., M. Wartofsky (eds.) *Logical and Epistemological Studies in Contemporary Physics*. Boston Studies in the Philosophy of Science, 5:216–241, 1968.

Rodin, 2015 — Rodin A. *On Constructive Axiomatic Method*. arXiv: 1408.3591, 2015.

Schreiber, 2014a — Schreiber U. *Quantization via Linear homotopy types*. arXiv: 1402.7041, 2014.

Schreiber, 2014b — Schreiber U., Shulman M. Quantum gauge field theory in cohesive homotopy type theory. arXiv:1408.0054, 2014.

Sneed, 1971 — Sneed J.D. *The logical structure of mathematical physics*. Reidel, 1971.

Sorensen, 2006 — Sorensen M.H., Urzyczyn P. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 149). Elsevier, 2006.

Stegmuller, 1979 — Stegmuller W. *The structuralist view of theories: a possible analogue of the Bourbaki programme in physical science*. Berlin, N.Y.: Springer-Verlag, 1979.

Steimann, 2006 — Steimann F. *The paradoxical success of aspect-oriented programming*. Proceedings of the International Conference OOPSLA'06. Portland, 2006, pp. 481–497.

Sugar, 1953 — Sugar A.C., McKinsey J.C.C., Suppes P.C. Axiomatic foundations of classical particle mechanics. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 2:253–272, 1953.

Suh, 2001 — Suh N.P. *Axiomatic design: advances and applications*. Oxford: Oxford University Press, 2001.

Tarski, 1941 — Tarski A. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Dover, 1941.

Taylor, 1999 — Taylor P. *Practical foundations of mathematics (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

Voevodsky, 2013 — Voevodsky V. et al. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study (Princeton); available at http://homotopytypetheory.org/book/, 201.

Woodger, 1937 — Woodger J.H. *Axiomatic method in biology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1937.