Программный реализм в физике и основания математики

Часть 2: Неклассическая и неоклассическая наука*

А.В. РОДИН

Во второй части работы вопрос о “непостижимой эффективности” математики рассмотрен в контексте физики и математики XX в. и современности. Показано, каким образом революционные изменения в математике и физике начала XX в. привели к тому, что старые ответы на этот вопрос перестали быть удовлетворительными. Основной тезис второй части статьи состоит в том, что программа развития новой реалистической физики, которую Эйнштейн сформулировал в дискуссии с Бором, в настоящее время вновь стала актуальной, в том числе в связи с некоторыми новейшими результатами в области оснований математики. Поэтому образец классической реалистической науки, в котором математика играет роль эффективного средства теоретического описания и экспериментального дизайна (в смысле ван Фраассена), остается релевантным современному состоянию науки и может мотивировать новые амбициозные программы исследований.

In the second part of this work we consider the question of “unreasonable effectiveness” of mathematics in the context of the 20th century and today’s science. We explain why the revolutionary changes in mathematics and physics occurred in the beginning of the 20th century made earlier answers to this question unsatisfactory. The main claim of this part of our work is the following: the project of new realistic physics formulated by Einstein in his debate with Bohr nowadays is again pertinent because of some latest developments in foundations of mathematics. This is why the pattern of Classical realistic science where mathematics serves as an effective means of theoretical description and experimental design (van Fraassen) remains relevant to today’s science and may motivate new ambitious research programs.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: программный реализм, принцип дополнительности, теория топосов, гомотопическая теория типов.

KEY WORDS: programmatic realism, complementarity principle, topos theory, homotopy type theory.

---

* Работа поддержана исследовательским грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-06-00515). The article is written with the support from RFBR, project No. 13-06-00515. См. первую часть статьи [Родин 2015].

Как было сказано в начале первой части этой работы [Родин 2015], физика и математика второй половины XIX в. поставили классический научный реализм под вопрос, и этот вопрос до сих пор можно считать открытым[1]. Это было связано по крайней мере с двумя разными обстоятельствами. Во-первых, новые, сформулированные в XIX в. фундаментальные физические теории, такие как электромагнетизм и термодинамика, уже не были реалистическими в том же смысле, что и классическая механика. Созданная в начале XX в. квантовая механика лишь усугубила эту проблему[2]. Во-вторых, в XIX столетии появились новые математические теории, которые уже не были напрямую связаны с физической интуицией, подобно классической евклидовой геометрии и арифметике; в этом отношении знаковым событием было создание и последующее развитие неевклидовой геометрии[3]. Напомню, что проблема "непостижимой эффективности математики в естественных науках" была поставлена Вигнером в 1960 г. уже в этом новом контексте. Поэтому классическое решение проблемы Вигнера, описанное в первой части моей статьи, является анахронизмом и не отвечает напрямую на вопрос Вигнера, который относится к математике и физике XX в. Отсюда, однако, вовсе не следует, что классическое понятие реалистической научной теории, которое я сформулировал в первой части, пользуясь только классическим материалом[4], заведомо не может быть заново реализовано в современной науке новыми средствами. В этой части статьи я постараюсь показать, что, наоборот, есть самые серьезные основания рассматривать научный реализм как методологическую идею, актуальную для современной физики и математики (несмотря на то, что наши лучшие фундаментальные физические теории на сегодняшний день не являются реалистическими).

Отдавая дань историческому подходу в эпистемологии [Райнбергер 2010; Стёпин 2003], я буду называть этот эпистемологический проект *неоклассической* наукой. В этой связи необходимо сделать одно методологическое пояснение. Я исхожу из того, что будущее науки является открытым, а никакая историческая периодизация, в рамках которой можно различать классический, неклассический и другие периоды в истории мировой науки, не может претендовать на статус исторического закона, управляющего развитием этой науки. В этой статье я пользуюсь понятиями классической и неклассической науки только в качестве подручного средства, которое позволяет легко указать на тот или иной период истории. Говоря о неоклассической науке, я не пытаюсь предсказать будущее науки, а пытаюсь сформулировать широкий научный проект, который мог бы мотивировать дальнейшее развитие математики и фундаментальной физики в определенном направлении. Чтобы обосновать этот проект, я опираюсь, с одной стороны, на факты из истории науки и анализ трендов сегодняшней науки и, с другой стороны, на некоторые независимые эпистемологические аргументы. Моя главная задача в этой части статьи состоит в том, чтобы убедить читателя, что современная реалистическая физика возможна в принципе. Как я покажу, реализация этого проекта требует основательного пересмотра оснований математики, а не только пересмотра оснований физики.

Неоклассическая физика: Эйнштейн против Бора

В этом разделе я предлагаю анализ известной эпистемологической дискуссии между Эйнштейном и Бором по поводу реализма в физике вообще и в квантовой теории в частности. Версия научного реализма, которую я представил в предыдущем разделе статьи, в значительной степени мотивирована позицией Эйнштейна в этой дискуссии. В интерпретации реализма Эйнштейна я в основном следую Файну [Файн 1986].

Дискуссии об эпистемологических проблемах квантовой теории происходили между Бором и Эйнштейном на протяжении более двадцати лет начиная с 1927 г. (5-я физическая конференция в Солвеевском институте) в основном при личных встречах. Основной источник, благодаря которому мы об этом знаем, – рассказ самого Бора, опубликованный в

[Шилп 1949]; в этом же издании опубликован “Ответ критикам” Эйнштейна, в котором он заново формулирует свою позицию. С начала 1990-х гг. стали появляться новые исторические работы, которые позволили точнее реконструировать события 1920-х гг., опираясь не только на слова Бора, но и на независимые источники [Кашинг 1994]. Это позволяет нам сегодня лучше понять аргументы Эйнштейна и критичнее отнестись к той влиятельной точке зрения на историю квантовой теории, которую выразил Джаммер [Джаммер 1966], принимая в указанном споре сторону Бора. Новые исторические исследования также сделали очевидной неадекватность ранее распространенного карикатурного взгляда на последний период творчества Эйнштейна в Принстоне как на образец научного ретроградства. В своем изложении событий я пользуюсь всеми этими источниками (как и материалами, содержащимися в работе Д. Ховарда (D. Howard) “Пересматривая диалог Эйнштейна и Бора”, которая вскоре выйдет в свет).

В 1928 г. Шредингер высказал Бору в письме следующее соображение: неравенство (соотношение неопределенностей) Гейзенберга указывает на то, что классические понятия пространственного положения и импульса имеют границы применимости и что, следовательно, в квантовой теории эти понятия нужно заменить на какие-то другие, новые понятия, которыми можно было бы пользоваться точно (подобно тому как понятия положения и импульса используются в классической физике), а не приблизительно (т.е. так, как понятия положения и импульса используются в квантовой физике в связи с ограничительным неравенством Гейзенберга). С этим предложением Шредингера Бор резко не согласился. В качестве причины несогласия Бор высказал тезис, согласно которому только классические физические понятия позволяют нам координировать наш опыт тем способом, который соответствует нашей природной способности к концептуализации [Файн 1986].

После того, как Шредингер поделился своими соображениями с Эйнштейном, тот в ответном письме сформулировал свою позицию по этому вопросу: «Ваше мнение, согласно которому понятия импульса и положения нужно отбросить в случае, когда они имеют только “размытые” значения, кажется мне совершенно обоснованным. Успокоительная философия – или скорее религия? – Гейзенберга – Бора так хитро устроена, что каждому истинно верующему она дает мягкую подушку, от которой его очень трудно оторвать. Поэтому лучше оставить его лежать на ней» (цит. по [Файн 1986, 19]).

Впоследствии Эйнштейн [Эйнштейн 1954, 292] уточнил эту позицию: “По моему мнению, заранее ничего нельзя сказать о том, каким образом нужно строить понятия и связывать эти понятия с другими понятиями и с опытом. Необходим только некоторый набор таких правил, поскольку без правил невозможно приобрести никакое новое знание. Можно сравнить эти правила с правилами некоторой игры, которые являются вполне произвольными, но без которых данная игра невозможна. Однако такие правила не задаются раз и навсегда, но применяются только в строго определенных рамках. Поэтому [в науке] нет никаких окончательных категорий в смысле Канта”. И в другом месте: “Мы имеем здесь дело с категориями или схемами мышления, которые мы можем выбирать сами и которые можем оценивать только по их вкладу в прояснение содержания нашего сознания... Пока мы движемся внутри таким образом очерченной сферы мысли, мы мыслим физически. Поскольку физическое мышление позволяет нам понимать опыт, мы рассматриваем это мышление как “знание реальности”. Таким образом под “реальностью” в физике нужно понимать что-то вроде программы, которая, однако, не заложена в нас априори” [Шилп 1949, 673–674].

Конфликтующие позиции Бора и Эйнштейна в этом споре можно рассматривать как разные модификации подхода Канта. Бор заимствует у Канта понятие классической эмпирической теории и связанное с такой теорией понятие (классической) объективности. Бор настаивает на том, что “все [физические] наблюдения должны быть описаны с помощью классических понятий” [Шилп 1949, 209], поскольку он вслед за Кантом считает, что только классические (по Канту – априорные) понятия способны придать этим наблюдениям статус объективных (экспериментально проверяемых) фактов. При этом Бор видит, что классические понятия недостаточны для построения квантовой теории. Выход из этой ситуации Бор находит в том, чтобы использовать классические понятия (импульс, положение и т.д.) для символического (а не реалистического) описания квантовых явлений; такие описания не являются объективными в классическом смысле, но подчиняются “принципу дополнительности”, согласно которому различные несовместимые друг с другом (в классическом смысле) описания одних и тех же квантовых объектов являются допустимыми: “Данные различных экспериментов невозможно свести в единую картину. Поэтому их нужно рассматривать в качестве дополнительных, имея при этом в виду, что только полная совокупность всех явлений, наблюдаемых в экспериментах [различных типов], содержит полную информацию об изучаемых объектах. Адекватным инструментом дополнительного описания является именно формализм квантовой механики, который представляет собой чисто символическую схему, позволяющую описывать и предсказывать результаты экспериментов в терминах классических понятий” [Шилп 1949, 210–211].

Таким образом, стратегия Бора состоит в том, чтобы продолжать пользоваться классическими физическими понятиями, но при этом отказаться от классического эпистемологического требования, согласно которому физическая теория должна быть реалистической, и считать полноценной теорией любую “чисто символическую схему, позволяющую предсказывать результаты экспериментов”. Напомню, что похожую точку зрения на природу физической теории в начале XX в. высказывал Дюгем [Дюгем 1906]. Эйнштейн отвергает этот подход, называя его “успокоительной философией” (см. [Файн 1986, 19]). Стратегия Эйнштейна, напротив, состоит в том, чтобы построить новую реалистическую теорию с помощью введения новых фундаментальных физических понятий. Именно в этом состоит смысл “программного реализма” Эйнштейна, который является методологией, а не метафизическим основанием (или метафизической интерпретацией) физики.

Стратегию Эйнштейна не нужно путать с более специальной программой поиска “скрытых переменных”, к которой он никогда не проявлял интереса. Скорее эту стратегию нужно связать с попытками Эйнштейна построить общую теорию поля, которым он посвятил последний период работы в Принстоне. Тот факт, что эти попытки не привели к немедленному успеху, не может служить основанием для отказа от программного реализма. Тем более нет никаких оснований считать принцип дополнительности и другие элементы методологического подхода Бора установленными и общепризнанными научными истинами. Ведь в данном случае речь идет не о физических фактах и не о физических теориях, объясняющих эти факты, а о методологических установках и философских интерпретациях. Эйнштейн совершенно правильно замечает, что речь в данном случае идет именно о философии физики, а не о физике в узком смысле слова.

Введение в математизированную теоретическую физику новых фундаментальных физических понятий всегда требует использования нового математического аппарата, с помощью которого представляются эти понятия. Когда Ньютон вводил в теорию механики фундаментальное понятие ускорения, он сам создавал подходящий для этого новый математический аппарат (дифференциальное и интегральное исчисление). Чтобы ввести новое фундаментальное понятие о релятивистском пространстве-времени в рамках Общей теории относительности (ОТО), Эйнштейн использовал понятие геометрического многообразия, введенное Риманом несколькими десятилетиями ранее [Риман 1867] (что, разумеется, не означает, что создание ОТО вовсе не требовало чисто математической работы). Если смотреть на этот исторический эпизод со стороны, то его нетрудно представить как еще один случай необъяснимой эффективности математики в физике. Однако более внимательный анализ работ Римана, Лобачевского и других творцов новой геометрии в XIX в. показывает, что все эти математики с самого начала имели в виду возможность физического применения своих геометрических теорий; это составляло важную часть их мотивации[5]. Это позволяет посмотреть на создание ОТО Эйнштейном как на этап общего физико-математического проекта, который был начат в XIX в. Лобачевским и Риманом. Программный реализм Эйнштейна представляет собой подходящую методологию именно для проектов такого рода.

Применение такой методологии сегодня является проблематичным, поскольку возможные физические мотивации математических исследований не играют никакой роли в архитектуре математики XX в. Эта стандартная архитектура мотивирована идеей о том, что математика занимается своего рода “мысленными мирами” ([Кассирер 1907, 43–44], которые только по счастливой случайности или благодаря внерациональной “интуиции” математиков или, как предполагает Вигнер [Вигнер 1960], по воле Провидения иногда оказываются в чем-то похожими на реальный мир, изучаемый физиками с помощью эмпирических методов. Именно поэтому вопрос об основаниях и архитектуре математики я считаю ключевым для научного (программного) реализма в современном контексте. Мой энтузиазм по поводу научного реализма связан с новейшими исследованиями в области оснований математики, которые обещают изменить стандартную архитектуру математических теорий и которые, как я сейчас покажу, могут позволить установить более прочную связь между математикой и естественными науками и таким образом предложить новое *неоклассическое* решение проблемы Вигнера.

Неоклассическая математика: вперед к Евклиду

Попытка Бора (а также его предшественников и последователей) строить физическую теорию как “чисто символическую схему” имеет прямую аналогию в современной Бору математике. Обсуждая с Фреге свою аксиоматическую теорию геометрии [Гильберт 1899; Гильберт 1923], Гильберт характеризует математическую теорию как “схему понятий”[6]; в более поздней редакции 1934 г. [Гильберт, Бернайс 1934; Гильберт, Бернайс 1979] такая теория-схема становится полностью символической, т.е. построенной с помощью строго языка символической логики. Именно такое понимание аксиоматической теории является на сегодняшний день стандартным и обычно используется в современной логике и основаниях математики [Френкель, Бар-Хиллел 1966; Бар-Хиллел, Френкель, Леви 1973]. Эту аналогию между понятием теории у Бора и Гильберта можно продолжить, если принять во внимание понятие *модели* данной формальной теории, которое играет центральную роль в подходе Гильберта и в современных основаниях математики[7].

Как мы видели, Бор считает, что объективация чувственного опыта возможна только с помощью классических физических понятий, которые включают в себя классические понятия пространства и времени и, соответственно, евклидову геометрию и стандартную арифметику. На нелепости, которые возникают при попытках построения квантовой теории с помощью этих классических понятий (и которые сегодня принято называть *парадоксами* квантовой механики), Бор предлагает реагировать следующим образом. Нужно отказаться от попытки такого описания физической реальности, которое было бы независимым по отношению к типам экспериментов и наблюдений, используемых для познания этой реальности; отсюда следует, что и само понятие физической реальности оказывается излишним. Несовместимые друг с другом (в классическом смысле) описания, каждое из которых соответствует эксперименту или наблюдению только определенного типа, следует считать *дополнительными* в том смысле, что каждое из них дает частичное описание данной физической системы. Тот факт, что эти частичные описания не складываются в общую инвариантную (по отношению к изменению типа эксперимента) классическую картину, по мнению Бора, отражает принципиальную невозможность на квантовом уровне отделить наблюдаемый физический процесс от процесса его эмпирического наблюдения (эксперимента). Всякая попытка представить себе (квантовую) физическую реальность в том виде, как она существует сама по себе без вмешательства человеческого (или другого макроскопического) наблюдателя, является, с точки зрения Бора, эпистемологически наивной.

Понятие модели формальной теории у Гильберта и его последователей мотивируется очень похожей идеологией, которая оправдывает использование старых добрых классических понятий в новых неклассических контекстах. Согласно этой идеологии неевклидова геометрия Лобачевского и Римана, современная абстрактная алгебра или современная теория множеств – примеры математических теорий, которые “выходят за пределы” традиционных пространственных и временных интуиций, т.е. для которых такие интуиции уже не релевантны. Поэтому при строгом формальном аксиоматическом построении таких теорий следует отказаться от всякой попытки жестко связывать основные понятия этих теорий с какими бы то ни было интуитивными представлениями вроде обычного интуитивного представления о точках и прямых в традиционной геометрии. Тем не менее, даже если отказаться от идеи о том, что эти интуитивные представления связаны с математическими понятиями жестким и однозначным способом, ими можно продолжать успешно пользоваться в *моделях* формальных теорий.

Я поясню логико-математическое понятие модели с помощью популярного и исторически важного примера евклидовых моделей гиперболической планиметрии Лобачевского. Идея здесь состоит в том, чтобы сначала построить гиперболическую геометрию как формальную аксиоматическую теорию L, а затем найти подходящую евклидову геометрическую конструкцию M (понимая при этом евклидову геометрию в традиционном неформальном духе), которая обладает следующими свойствами. Подходящие элементы M объявляются значениями основных терминов теории L ("точка", "прямая", отношение "лежать на" для точки и прямой и др.) таким образом, чтобы при этой интерпретации терминов все аксиомы теории L были истинными (как предложения обычной неформальной евклидовой геометрии). В этом случае конструкцию M называют моделью теории L. Именно так устроены такие популярные евклидовы модели гиперболической геометрии как *модель Кэли-Клейна* и *модель Пуанкаре*. Очевидно, что это значение термина "модель", принятое в современной математической логике, не вполне совпадает со значением этого слова, принятым в физике и других эмпирических науках (в таких выражениях как "математическая модель явления"). Тем не менее, как я сейчас покажу, в обоих случаях речь идет о сходных вещах, особенно если понимать физические математические модели именно в духе Бора.

По аналогии с физикой евклидову геометрию можно назвать *классической* теорией, а неевклидовы геометрии – *неклассическими* (хотя такая терминология и не принята в математике). Тогда евклидовы модели гиперболической геометрии можно назвать классическими моделями неклассической теории. Подобно тому как квантовая механика позволяет использовать классические физические понятия для описания квантовой реальности, классические модели неклассических математических теорий позволяют пользоваться в этих неклассических теориях традиционными математическими интуициями. В обоих случаях за такую возможность приходится платить отказом от классического понимания отношений между понятиями и интуитивными представлениями этих понятий. Таким образом, новая аксиоматическая архитектура неклассической математики, предложенная в начале XX в. Гильбертом, и антиреалистическая интерпретация квантовой теории, предложенная Бором, основаны на близких эпистемологических идеях. Несмотря на это обстоятельство, формальная аксиоматическая реконструкция подхода Бора является проблематичной. Чуть ниже я скажу, в чем состоит принципиальная трудность такой реконструкции.

Формальная аксиоматическая архитектура сегодня является общепринятой в логике и математике, но практически не используется в физике. Как я уже говорил в первой части статьи, эта архитектура плохо подходит для построения новых реалистических физических теорий. Сейчас я покажу более подробно, почему это происходит.

В принципе некоторая подходящая формальная теория T может иметь физическую модель P, все элементы которой будут предметами возможного опыта. При этом T нельзя будет назвать физической теорией и тем более реалистической физической теорией, поскольку T не связана жестко с P и не задает никакого определенного класса "собственных" *объектов*. Помимо модели P теория T может иметь и другие модели, не имеющие никакого отношения к физике. Более разумное предложение может состоять в том, чтобы в качестве реалистической физической теории рассматривать теорию T *вместе* с ее физической моделью P или вместе с некоторым классом таких моделей. Именно в этом смысле Гильберт и другие авторы обычно говорят о возможности применения формального аксиоматического метода в физике. Обозначим для удобства такую интерпретированную теорию TP. Чтобы построить TP по рецепту Гильберта, нам нужно отдельно построить T и соответствующую модель (или класс моделей) P. О том, как строятся формальные теории, можно прочитать в любом современном учебнике логики. Но откуда взять P? Хинтикка

[Хинтикка 2011, 83] отвечает на этот вопрос так: “Класс структур, который предполагается схватить с помощью аксиом, может быть либо дан интуитивно, либо свободно выбран, либо введен опытным путем”.

Поскольку мы сейчас говорим о физической теории, релевантным для нашей дискуссии является в первую очередь именно задание класса моделей “опытным путем”. В чем именно может состоять этот способ построения моделей, Хинтикка не уточняет. Чтобы попытаться ответить на этот вопрос, естественно воспользоваться парадигмальным примером евклидовых моделей неевклидовых геометрий. Хотя такие модели можно действительно назвать интуитивными, они не “даны” нам в готовом виде, а специально построены с помощью старой доброй неформальной евклидовой геометрии и других традиционных неформальных математических средств. Это сравнение показывает, что никакой бессвязный набор эмпирических фактов и интуиций сам по себе не может позволить построить подходящую модель *P*. Это можно сделать, в частности, с помощью классической физики. Однако использование классической физики для построения моделей теории *T* будет означать, что именно классическая физика играет для нас роль фундаментальной физической теории. Формальная теория *T* будет служить в этом случае лишь для того, чтобы выделить некоторый класс *P* классических физических моделей. Формальный аксиоматический подход может претендовать в этом случае только на роль вспомогательного инструмента, который поможет прояснить формально-логическую структуру классических физических теорий. Я сейчас оставляю в стороне спорный вопрос о том, насколько такая структура является существенной для физики.

Поскольку нас сейчас интересует в первую очередь неклассическая физика, нам необходимо рассмотреть случай, когда теория *T не* имеет классических физических моделей. Аксиоматическая архитектура формальных теорий действительно не исключает такую возможность. Однако эта архитектура не дает нам никаких указаний на то, как строить *неклассические* физические модели. Примером теории *T*, не имеющей классических моделей, может быть формально-аксиоматически реконструированная квантовая механика. Дополнительные классические описания в смысле Бора не являются полноценными моделями этой теории. В противном случае можно было бы утверждать, что все квантовые эффекты можно объяснить с помощью некоторого классического физического механизма, что, конечно, не так. Эти дополнительные описания можно попытаться описать формально с помощью подходящего ослабления обычного понятия о модели формальной теории. Но это заведомо не может помочь построить *TP* как содержательную *реалистическую* физическую теорию.

Итак, мы видим, что стандартная формальная аксиоматическая архитектура современной математики создает существенный разрыв между математикой и физикой и, таким образом, тормозит развитие новых физических теорий включая реалистические теории. С этим выводом можно поспорить, указав на то, что в современной математической практике формальный аксиоматический метод не играет большой роли, а математики по-прежнему много и успешно работают в области математической физики. Действительно, на практике математики, как правило, излагают свои результаты и обмениваются новыми идеями, не уделяя большого внимания вопросам формальной строгости. Однако постольку, поскольку именно Гильбертово понятие формальной аксиоматической теории отождествляется с понятием *строгой* математической теории, формальный аксиоматический метод продолжает играть ключевую эпистемологическую роль в современной математике. Чтобы изменить эту ситуацию, необходимо предложить альтернативное понятие о строгой математической теории, а не просто пытаться по мере возможности игнорировать стандартные требования формальной строгости, не предлагая ничего определенного взамен.

Теперь я укажу на два важных примера современных математических аксиоматических теорий, которые помогут мне наметить такого рода альтернативу. Я имею в виду аксиоматическую *теорию топосов* [Лавер 1970; Макларти 1992] и *гомотопическую теорию типов* [Воеводский 2013]. Не имея возможности излагать здесь содержание этих теорий, я скажу несколько слов об их аксиоматическом устройстве. Мы увидим, что аксиоматическая структура этих современных теорий построена не по методу Гильберта, а скорее по методу Евклида (разумеется, в принципиально новой форме этого метода). Именно поэтому я называю эти теории *неоклассическими*[8]. Затем я покажу, каким образом эти неоклассические математические теории могут быть в перспективе использованы (и уже частично используются) для построения новой реалистической физики.

В отличие от аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля и других стандартных аксиоматических теорий, аксиоматическая теория Лавера не пользуется "готовой" логикой, а описывает топос как универсум, в котором заданы определенные операции, имеющие как логическую, так и геометрическую интерпретацию. Геометрическая интерпретация этих операций в новой форме воспроизводит исходное предаксиоматическое понятие топоса, введенное ранее в алгебраическую геометрию А. Гротендиком без всякой специальной связи с логикой. Спецификация системы логики для теории топосов при геометрической интерпретации логических понятий превращается в спецификацию основного объекта этой теории (элементарного топоса). Такой логический формализм в теории топосов называют *внутренней логикой* (данного топоса). Понятие о внутренней логике позволяет рассматривать топос не только как геометрическое пространство особого рода, в котором можно строить дальнейшие геометрические конструкции, но и как унивесум рассуждений, в котором выполнимы определенные логические операции (причем каждой логической операции соответствует определенное геометрическое построение). Этим аксиоматическая теория топосов напоминает геометрическую теорию "Начал" Евклида, в которой геометрические построения также играют роль логических шагов доказательств.

Эта аналогия с традиционной геометрией становится еще более очевидной в аксиоматической *теории гомотопии*, известной под названием *гомотопической теории типов* [Воеводский 2013]. Хотя в теории топосов принято неформально говорить о различного рода *построениях*, вопрос о конструктивном или неконструктивном характере этой теории является на самом деле довольно запутанным [Макларти 2006]. В этом отношении ситуация с гомотопической теорией типов гораздо более ясная. В этой теории достигается точное соответствие между синтаксическими конструкциями конструктивной теории типов Мартина-Лёфа [Мартин-Лёф 1984], с одной стороны, и элементарными объектами теории, которые называют *гомотопическими типами*, с другой. С помощью этой теории ее создатель Воеводский пытается в настоящее время построить новые основания математики, которые он называет *унивалентными* (по имени единственной дополнительной аксиомы, которую Воеводский добавляет к теории Мартина-Лёфа). Если теорию типов Мартина-Лёфа вместе с дополнительной аксиомой унивалентности действительно можно считать чем-то вроде универсальной системы логики для всей математики (или, по крайней мере, для значительного фрагмента математики), то построенная с помощью этой системы логики геометрическая теория гомотопий автоматически приобретает такое же фундаментальное значение для современной математики, которое евклидова геометрия и арифметика имела для классической математики.

Попытки использовать теорию топосов в физике (включая квантовую теорию) начались в конце 1990-х гг. Краткий обзор этих попыток можно найти в [Родин 2010]. Дёринг [Дёринг 2007 web] специально почеркивает "неореалистический" характер топосного подхода, который позволяет отказаться от стандартной Копенгагенской интерпретации квантовой теории. Реалистическое описание квантовых феноменов оказывается в этом случае возможным благодаря использованию внутренней логики подходящего топоса, которая отличается от классической логики, используемой в стандартных классических описаниях результатов квантовых измерений. В самое последнее время были также сделаны первые попытки использовать гомотопическую теорию типов в квантовой теории поля [Шрайбер 2013 web].

Заключение

Если теория топосов, гомотопическая теория типов или другая фундаментальная неоклассическая математическая теория сможет доказать свою эффективность в качестве основания математики и математического основания фундаментальной физической теории, то это будет означать перестройку современной физики или, по крайней мере, некоторого ее фрагмента по (нео)классическому образцу. При таком положении вещей основания математики и основания физики будут прочно связаны друг с другом, подобно тому как это имело место в классических математических и физических теориях, а эффективность математики в физике и других естественных науках не будет больше казаться непостижимой. Это позволит использовать современную математику в физике и других естественных науках более эффективно, чем это происходит в настоящее время. Разумеется, различие между математической идеализацией и физической реализацией, между возможным и действительным опытом при этом никуда не исчезнет и оставит место для новых регулятивных идей, которые обеспечат дальнейший прогресс в естественных науках.

Такая перспектива не является ни чистой фантазией, ни прогнозом будущего развития событий. Скорее это программа развития науки, которая, с одной стороны, опирается на восходящую к Эйнштейну идею программного реализма и, с другой стороны, принимает в расчет новейшие исследования в области оснований математики.

Вопрос о том, являются ли те или иные теоретические конструкции реальными физическими объектами или же это только удобные фикции вроде птолемеевских эпициклов, не может быть решен с помощью философской спекуляции, но может и должен в каждом конкретном случае решаться методами эмпирической науки. Это видно на следующем простом примере. Географические широты и меридианы являются, конечно, удобными фикциями, которые полезны для навигации и других практических задач. Однако Южный и Северный полюса нашей планеты и ее экватор уже не являются фикциями в том же смысле слова, поскольку их положение на поверхности планеты определяется физическими свойствами Земли, которые никак не зависят от человеческой деятельности. Это различие вовсе не является самоочевидным. Чтобы его обосновать, необходимо ссылаться на физические знания. Эти знания включают в себя сложную систему аргументации, в которой используются как теоретические аргументы, так и эмпирические свидетельства. То обстоятельство, что в современных незаконченных теориях провести точную грань между реальным и фиктивным оказывается трудным или вовсе невозможным (при современном уровне знания), вовсе не означает, что в современной науке это различие потеряло смысл и что его больше не нужно пытаться проводить. Тем более неуместно, на мой взгляд, использовать для ухода от решения этой проблемы какие-либо философские или исторические оправдания.

ЛИТЕРАТУРА

Бар-Хиллел, Френкель, Леви 1973 – *Bar-Hillel Y., Fraenkel A., Levy A.* Foundations of Set Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973.

Вигнер 1960 – *Wigner E.* The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. Vol. 13. P. 1–14.

Воеводский 2013 – *Voevodsky V. et al.* Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Princeton: Institute for Advanced Study, 2013.

Гильберт 1899 – *Hilbert D.* Grundlagen der Geometrie. Leipzig: B.G. Teubner, 1899.

Гильберт 1923 – *Гильберт Д.* Основания геометрии / Пер. с нем. под ред. А.В. Васильева. СПб.: Сеятель, 1923.

Гильберт, Бернайс 1934 – *Hilbert D., Bernays P.* Grundlagen der Mathematik. 2 Bde. Berlin: Springer, 1934–1939.

Гильберт, Бернайс 1979 – *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. М.: Наука, 1979.

Дёринг 2007 web – *Doering A.* Topos theory and ‘neo-realist’ quantum theory // ArXiv:0712.4003. 2007. URL= http://arxiv.org/abs/0712.4003.

Джаммер 1966 – *Jammer M.* The Conceptual Development of Quantum Mechanics. N. Y.: McGraw-Hill, 1966.

Дюгем 1906 – *Duhem P.* La théorie physique: son objet et sa structure. Paris: Chevalier et Rivière, 1906.

Дюгем 1908 – *Duhem P*. Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. Paris: A. Hermann, 1908.

Кассирер 1907 – *Cassirer E.* Kant und die moderne Mathematik // Kant-Studien. 1907. Bd. 12. S. 1–40.

Кашинг 1994 – *Cushing J.T.* Quantum Mechanics: Historical Contingency and the Copenhagen Hegemony. Chicago: University of Chicago Press, 1994.

Лавер 1970 – *Lawvere F.W.* Quantifiers and sheaves // Actes du congrès international des mathematiciens. T. 1 / Berger M., Dieudonne J. *et al.* (eds.). Nice, 1970. P. 329–334.

Макларти 1992 – *McLarty C.* Elementary Categories, Elementary Toposes. Oxford: Clarendon Press, 1992.

Макларти 2006 – *McLarty C.* Two Constructivist Aspects of Category Theory // Philosophia Scientiae, Cahier spécial. 2006. № 6. P. 95–114.

Мартин-Лёф 1984 – *Martin-Löf P.* Intuitionistic Type Theory: Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980. Napoli: Bibliopolis, 1984.

Райнбергер 2010 – *Rheinberger H.-J.* On Historicizing Epistemology. Stanford, CA: Stanford University Press, 2010.

Рассел 1903 – *Russell B.* Principles of Mathematics. L.: Allen and Unwin, 1903.

Рассел 1918 – *Russell B.* The Philosophy of Logical Atomism // Monist. 1918. Vol. 28. P. 495–527.

Риман 1867 – *Riemann B.* Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Habilitationsvortrag. 1854) // Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1867. Bd. 13. S. 133–152.

Родин 2010 – *Родин А.В.* Теория категорий и поиски новых математических оснований физики // Вопросы философии. 2010. № 6. С. 67–82.

Родин 2014 – *Rodin A.* Axiomatic Method and Category Theory. Cham: Springer, 2014. (Synthese Library; vol. 364).

Родин 2014 web – *Rodin A.* On Constructive Axiomatic Method // ArXiv:1408.3591. 2014. (Preprint). URL = http://arxiv.org/abs/1408.3591.

Родин 2015 – *Родин А.В.* Программный реализм в физике и основания математики. Часть 1: Классическая наука // Вопросы философии. 2015. № 4. С. 59–68.

Рэ 1907 – *Rey A.* La théorie de la physique chez les physiciens contemporains. Paris: F. Alcan, 1907.

Стёпин 2003 – *Стёпин В.С.* Теоретическое знание. М.: Прогресс-Традиция, 2003.

Таллант 2011 – *Tallant J.* Metaphysics: An Introduction. L.; N. Y.: Continuum, 2011.

Тарский 1941 – *Tarski A.* Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences. N. Y., NY: Oxford University Press, 1941.

Файн 1986 – *Fine A.* The Shaky Game: Einstein, Realism and the Quantum Theory. Chicago: University of Chicago Press, 1986.

Фреге 1971 – *Frege G.* On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic. New Haven, Conn: Yale University Press, 1971.

Френкель, Бар-Хиллел 1966 – *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.

Хинтикка 2011 – *Hintikka J.* What is Axiomatic Method? // Synthese. 2011. Vol. 183. P. 69–85.

Шилп 1949 – Albert Einstein: Scientist-Philosopher / Ed. by P.A. Schilpp. Evanston, 1949. (The Library of Living Philosophers).

Шрайбер 2013 web – *Schreiber U.* Classical field theory via Cohesive homotopy types // ArXiv:1311.1172. 2013. URL = http://arxiv.org/abs/1311.1172.

Эйнштейн 1954 – *Einstein A.* Ideas and Opinions. N. Y.: Crown Publishers, 1954.

Примечания

[1] Как и ранее, под научным реализмом я понимаю здесь не метафизическую, а эпистемологическую доктрину, согласно которой реалистические теории представляют собой высшую форму фундаментального эмпирического знания. О понятии реалистической теории см. ниже, прим. 4.

[2] Хотя последний “кризис оснований” в физике обычно связывают с фундаментальными физическими теориями, введенными в научный оборот уже в XX в. – теорией относительности и квантовой теорией – в 1907 г. Рэ говорит о “кризисе современной физики”, имея в виду только физику XVIII–XIX вв. включая термодинамику и теорию электромагнетизма [Рэ 1907]. Примерно в то же время выходит фундаментальный труд Дюгема [Дюгем 1906], в котором речь также еще не идет ни о теории относительности, ни о квантовой теории. Анализируя развитие физики в XIX в., Дюгем приходит к выводу о том, что задача математизированного естествознания вообще и физики в частности состоит исключительно в “спасении явлений” [Дюгем 1908], т.е. в том, чтобы строить математиче-

ские модели явлений, позволяющие делать правильные эмпирические предсказания. Вопрос о связи между явлениями и реальностью и другие подобные вопросы Дюгем считает выходящими за рамки компетенции науки и оставляет их метафизике.

[3] Независимо от Дюгема Рассел примерно в то же время приходит к аналогичным взглядам на метафизику, опираясь на современную ему математику, которая, по его мнению, не имеет прямого отношения к физике, но зато имеет самое непосредственное отношение к логике [Рассел 1903]. Свою метафизическую доктрину, которая существенно опирается на новейшие (на то время) результаты математической логики, Рассел называет "логическим атомизмом" [Рассел 1918]. Как и Дюгем, Рассел рассматривает здесь метафизику в качестве дополнения к науке (в данном случае – к логике и математике), а не в качестве последнего основания науки. Однако такое подчиненное положение метафизики по отношению к науке у Дюгема и Рассела вовсе не означает, что они оба говорят о метафизике в каком-то новом смысле слова. Как и в случае традиционной метафизики, восходящей к Аристотелю, речь идет о попытке дать ответ на вопрос о том, как устроен реальный мир, с помощью некоторой спекулятивной доктрины, которая может неформально согласовываться с фундаментальными ественнонаучными теориями, обыденным опытом и естественным языком, но которая при этом заведомо не допускает опытной проверки. Благодаря Дюгему, Расселу и их многочисленным последователям в XX в. метафизика стала вновь респектабельной философской дисциплиной, особенно в рамках традиции аналитической философии (см., например, [Таллант 2011]).

[4] Напомню определение реалистической теории, которое было использовано в первой части статьи. Я называю физическую теорию *T* реалистической по отношению к универсуму *U*, если выполнены следующие три условия:

(а) *T* описывает все объекты универсума *U* как предметы возможного опыта;

(б) *T* описывает физический механизм получения соответствующего опыта (наблюдения, эксперименты, измерения) на основании тех же общих принципов, которые используются при описании любых других физических процессов в *U*;

(в) *T* не включает процесс приобретения опыта (и человеческое сознание постольку, поскольку оно предполагается обычным понятием опыта) в число тех фундаментальных физических процессов, которые лежат в основе всех других физических процессов в *U*.

[5] Подробное обоснование этого тезиса требует отдельного исторического исследования.

[6] "Очевидно, что всякая теория – это не более, чем схема понятий, связанных между собой некоторыми необходимыми отношениями, и что базовые элементы, к которым применяется эта схема, могут быть какими угодно. Если я буду думать о моих точках как о произвольной системе вещей, например, как о системе, состоящей из любви, закона и трубочиста, а затем интерпретирую мои аксиомы как отношения между этими вещами, то мои теоремы, например, теорема Пифагора, будут истинными и для этих вещей" (цит. по [Фреге 1971, 13]).

[7] Гильберт не пользуется этим термином, который стал общепринятым в математической логике только после работ Тарского [Тарский 1941].

[8] Более обстоятельное обсуждение теории топосов и гомотопической теории типов с аксиоматической точки зрения можно найти в моей монографии [Родин 2014] и статье [Родин 2014 web].