

Категорификация и формальный аксиоматический метод

Под категорификацией я понимаю реконструкцию математических понятий в терминах теории категорий; такая реконструкция состоит в том, что привычные математические объекты вроде множеств или топологических пространств рассматриваются вместе с подходящим образом определенными отображениями таких объектов друг в друга (в данном примере такими отображениями являются, соответственно, функции и непрерывные отображения). Далее объекты категории описываются в терминах свойств соответствующих отображений (и их композиций). Я показываю, что категорификация представляет собой альтернативу и обобщение формального аксиоматического метода построения математических теорий. Мой аргумент состоит в следующем. (1)

Формальный метод был предложен Гильбертом в качестве ответа на новую ситуацию в математике, в которой важную роль получило понятие интерпретации. В качестве исторически адекватного примера можно привести интерпретацию геометрии Лобачевского в терминах Евклидовой геометрии в работах Бельтрами 1868-го года. (2) Предложенный Гильбертом метод позволил адекватно описывать только обратимые интерпретации, то есть изоморфизмы между разными моделями одной и той же теории (как в известном фольклорном примере Гильберта, где роль привычных точек играют пивные кружки). (3) В общем случае взаимные интерпретации математических теорий друг в друга необратимы (как и переводы между естественными языками). В частности модель, предложенная Бельтрами, не позволяет трактовать Евклидово пространство в терминах плоскости Лобачевского (но только наоборот). (4) Теория категорий позволяет адекватно трактовать интерпретации в общем случае.

Предложенное обобщение формального аксиоматического метода имеет серьезные эпистемологические последствия. В частности это обобщение влечет за собой замену традиционных иерархических структур предполагаемых традиционной Аристотелевской моделью науки на горизонтальные связи между различными областями теории. В заключение я укажу на аналогию между категорификацией и герменевтикой и покажу, что теорию категорий можно рассматривать как математическую версию последней.