

## Seminaire "Catégories et physique"

La théorie des catégories est une discipline mathématique qui fournit un puissant "langage" pour un très large spectre des mathématiques. Permettant un regard nouveau et unifié sur tous les concepts mathématiques de base, elle exerce ainsi un impact remarquable hors de son propre domaine.

Ces dernières années ont vu de nombreuses tentatives d'application de la théorie des catégories aux sciences de la nature, et en particulier à la physique fondamentale. Tout d'abord, des reformulations élégantes de théories déjà constituées (comme la relativité générale ou la théorie quantique des champs) permettent de les apprécier d'un point de vue différent. Mais surtout, le cadre nouveau et unifié offert permet des généralisations d'un type nouveau, sous la forme de théories physiques nouvelles, qui seraient impossibles à formuler hors du cadre des catégories. En particulier, on peut penser aux théories indépendantes d'un cadre géométrie fixe ("background independent"). Un problème tout à fait actuel au sein des recherches de théories quantiques de la gravitation! Notre groupe explorera en premier lieu la "physique catégorielle" existante; en particulier les théories de gravité quantique basées sur ce formalisme. Il s'agira d'une approche comparative et critique. Sans aucun doute, ceci amènera à discuter du statut de la plupart des notions fondamentales de la physique : espace, temps, matière; invariances et covariance; causalité...

Dans ce groupe de travail interdisciplinaire, nous nous proposons d'étudier le possible impacte de la théorie des catégories en physique théorique. La théorie des catégories, qui à bien des égards peut être considérée comme une "théorie de la relativité mathématique", pourrait aider à résoudre certains problèmes liés à la nécessité de rendre les théories physiques indépendantes des backgrounds externes (en particulier en gravitation quantique). Nous pensons que cette tâche technique doit s'accompagner d'un approfondissement épistémologique des principes fondamentaux desdites théories. À travers la collaboration de physiciens, de mathématiciens et de philosophes, notre objectif est d'examiner les travaux déjà faits dans cette direction aussi bien que d'essayer de pousser plus loin encore ces développements.

Organisers/ Organismes:

Marc Lachièze-Rey (APC; marclr@cea.fr)

Andrei Rodin (ENS; rodin@ens.fr)

### Réunion 1

**Date** : le 16 Novembre 2006

**Objet**: l'article de ZBIGNIEW OZIEWICZ « WHAT IS CATEGORICAL RELATIVITY? »;

**Bibliographie** : [arXiv:math.CT/0608770](http://arXiv:math.CT/0608770) ;

**Intervenant** : Marc Lachièze-Rey

### Réunion 2

**Date** : le 28 novembre 2006;

**Objet:** 1) suite de l'étude de l'article "WHAT IS CATEGORICAL RELATIVITY?" » par Zbigniew Oziewicz; 2) analyse critique de "CATEGORICAL GEOMETRY AND THE MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF QUANTUM GRAVITY" par Louis Crane;

**Bibliographie :** [arXiv:gr-qc/0602120](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0602120)

### Réunion 3

**Date :** le 12 décembre 2006;

**Objet:** les catégories tensorielles et ses applications dans la physique.

**Intervenant:** Andrei Rodin

**Bibliographie :** 1) Bojko Bakalov, Alexander Kirillov (Jr.) (2001) : Lectures on Tensor Categories and Modular Functors, University Lecture Series AMS, vol. 21, 2) Jean Bénabou (1963) « Catégories avec multiplication » Comptes Rendus d'Académie des Sciences 256, 1887-1890 3) Masaki Kashiwara, Pierre Schapira (2006): Categories and Sheaves, Springer (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 32), ch. 4.

### Réunion 4

**Date :** le 9 janvier 2007

**Objet:** article de Crane&Christensen "Causal Sites as Quantum Geometry"

**Intervenant :** Romain Attal

**Bibliographie :** [arXiv: gr-qc/0410104](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0410104)

### Réunion 5

**Date :** le 25 janvier 2007

**Objet:** les catégories doubles (pas la même chose que bi-catégories!)

**Intervenant :** René Guitart

### Réunion 6

**Date :** le 8 février 2007

**Objet:** Marc Lachièze-Rey parlera sur le problème de causalité

**Bibliographie :** Parrado&Sanchez : [arXiv:math-ph/0507014](https://arxiv.org/abs/math-ph/0507014)

### Réunion 7

**Date :** le 1 mars 2007

**Objet:** les changements du paradigme épistémologique structuraliste suggérées par la théorie des

catégories

**Intervenant** : Andrei Rodin

## Réunion 8

**Date** : le 22 mars 2007

**Objet**: ouvrage de Doering et Isham « Topos Foundation of Theories of Physics ». (Parties 1-2);

**Intervenant** : Andrei Rodin

**Bibliographie:Part 1**: Formal Languages for Physics: [arXiv: quant-ph/0703060](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0703060) ; **Part 2**: Daseinisation and the Liberation of Quantum Theory: [arXiv: quant-ph/0703062](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0703062)

## Réunion 9

**Date** : le 5 avril 2007

**Objet**: ouvrage de Doring et Isham « Topos Foundation of Theories of Physics ». (Parties 3-4)

**Intervenant** : Alexei Grinbaum (CEA)

**Bibliographie;** **Part 3**: The Representation of Physical Quantities With Arrows: [arXiv: quant-ph/0703064](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0703064) ; **Part 4**: Categories of Systems: [arXiv: quant-ph/0703066](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0703066) ; Chris Isham, "A New Approach to Quantising Space-Time: I. Quantising on a General Category": [arXiv: gr-qc/0303060](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0303060) ; "A New Approach to Quantising Systems: II. Quantising on a Category of Sets" ; [arXiv: gr-qc/0304077](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0304077)

## Réunion 10

**Date** : le 16 mai 2007

**Objet**: John Bell (University of Western Ontario ) présentera son article 'Two Approaches of Modelling the Universe'

**Bibliographie**: L'article est téléchargeable du : [site de l'auteur](#)

## Réunion 11

**Date** : le 16 octobre 2007

**Objet**: Bob COECKE, "CATEGORICAL QUANTUM AXIOMATICS"

**Résumé**: We define both quantum and classical systems as structured objects within a symmetric monoidal category. Quantum measurements turn out to be Eilenberg-Moore coalgebras relative to a comonad induced by a classical structure. In particular, the Eilenberg-Moore commuting square condition embodies von Neumann's projection postulate of quantum mechanics: when one repeats a measurement one obtains the same outcome in the second measurement as one obtained in the first one. This language provides an extremely powerful tool for the design and analysis of sophisticated quantum informatic protocols which involve highly non-trivial interaction between the quantum world and the classical world.

What is particularly appealing to the practising physicist is that this categorical language comes with an intuitive diagrammatic calculus. In fact, the graphical language for monoidal categories, quantum structures and classical structures is in fact a two-dimensional 'correction' and 'refinement' of the so-called Dirac notation, which is very popular among physicists.

The category-theoretic background for this talk traces back to work by Kelly & Laplaza, Carboni & Walters, Joyal & Street and others. This talk is based on several papers which also include work by/with Abramsky, Duncan, Paquette, Pavlovic & Selinger. For papers and links please consult [http://se10.comlab.ox.ac.uk:8080/BobCoecke/Maintopic\\_en.html](http://se10.comlab.ox.ac.uk:8080/BobCoecke/Maintopic_en.html) and also ask me for new not yet publicized papers at the talk.

## Réunion 12

**Date :** le 31 octobre 2007

**Objet:** La discussion autour d'exposé de Bob Coecke du 16 octobre, en particulier, sur le principe de "no cloning" pour des systèmes quantiques.

Bibliographie (merci à Bob): Pour obtenir les matériaux marqués ATTACHED - envoyez un email à moi ou directement à l'auteur.

Some easy-reading introductions on the use of monoidal categories in physics are in:

[1] B. Coecke (2005) \em Kindergarten quantum mechanics --- lecture notes\em. In: Quantum Theory: Reconsiderations of the Foundations *vm III*, pages 81—98. AIP Press. arXiv:quant-ph/0510032

[2] B. Coecke (2006) \em Introducing categories to the practicing physicist\em. In: What is Category Theory? pages 45—74. Advanced Studies in Mathematics and Logic *bf 30*, Polimetrica Publishing. ATTACHED [Cats.pdf]

The analysis of quantum measurement and the spider-theorem are in:

[3] B. Coecke and D. Pavlovic (2007) \em Quantum measurements without sums\em. In: Mathematics of Quantum Computing and Technology, G. Chen, L. Kauffman and S. Lomonaco (eds), pages 567—604. Taylor and Francis. ATTACHED [CoeckePavlovic.pdf] (the arXiv version is a bit outdated and has some bugs)

[4] B. Coecke and E. O. Paquette (2007) \em POVMs and Naimark's theorem without sums\em. Electronic Notes in Theoretical Computer Science (To appear). arXiv:quant-ph/0608072

A draft paper on the green & red dots and phases:

[5] B. Coecke and R. W. Duncan (2007) \em A graphical calculus for non-commuting quantum observables\em. ATTACHED [GreenRed.pdf]

Not mentioned in the talk was the construction of CPMs due to Peter Selinger:

[6] P. Selinger (2007) \em Dagger compact categories and completely positive maps\em. Electronic Notes in Theoretical Computer Science *bf 170*, 139—163. <http://www.mathstat.dal.ca/selinger/papers.html#dagger>

[7] B. Coecke (2007) \em Complete positivity without positivity and without compactness\em. Oxford University Computing Laboratory Research Report PRG-RR-07-05. <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/>

publications/tr/rr-07-05.html

The program to axiomatise quantum informatic protocols categorically was initiated in:

[8] S. Abramsky and B. Coecke (2004) \em A categorical semantics of quantum protocols\em. In: Proceedings of 19th IEEE conference on Logic in Computer Science, pages 415—425. IEEE Press. arXiv:quant-ph/0402130.

[9 - soft version of 8] B. Coecke (2005) \em Quantum information-flow, concretely, and axiomatically\em. In: Proceedings of Quantum Informatics 2004, Y. I. Ozhigov (ed), pages 15—29. Proceedings of SPIE \bf 5833. arXiv:quant-ph/0506132

where we assumed certain properties of categories which have no diagrammatic counterpart; hence the above outlined alternative accounts on measurement based on copying and deleting. There is however a very recent intriguing paper which takes [8] as its starting point:

[10] J. Vicary (2007) \em A categorical framework for the quantum harmonic oscillator\em. International Journal of Theoretical Physics (To appear). arXiv:quant-ph/0706.0711

Alex Wilce specifically asked about projective representations, which are in:

[11] B. Coecke (2007) \em De-linearizing linearity: projective quantum axiomatics from strong compact closure\em. Electronic Notes in Theoretical Computer Science \bf 170, 47—72. arXiv:quant-ph/0506134

## Réunion 13

**Date :** le 22 Novembre 2007

**Objet:** William LAWVERE, "Euler, Maxwell, and Grothendieck : The search for a rational description of the cohesion underlying Space."

**Résumé:** Variable quantities such as energy and volume, metrics and affine connections, wave functions and probabilities, etc. are the ingredients of physical constitutive relations for matter and for the ether. I want to try to clarify the nature of the plenum over which these quantities vary. The default model of such a plenum has been assumed to be a "topological space" but Maxwell had observed that physics needs a variety of levels of precision that can be cranked up or cranked down as required. Grothendieck's great work of 50 years ago laid the framework for a systematic use of homological algebra in complex analysis, and in so doing pointed the way not only to an explosion in the development of category theory, but also to an explicit nonlinear theory of the panorama of kinds of space implicit in mathematics. There are at least two very different classes of toposes. An oversimplification of the history of topos theory suggests that it was the extension by Grothendieck from variable truth values (open subsets) to variable discrete sets (sheaves) (permitting generalizations like individual étale schemes), which provided typical examples. However, at least as typical was his 1960 treatment of the category of all analytic spaces; the objects of any one of that ilk of topos may serve as "spaces" for some geometrical, physical, combinatorial, or computational purpose. These toposes have very distinctive properties that I attempt to make explicit. The method I use is based on Cantor's starting point, the contrast between cohesive spaces he called "Mengen" and qualitatively less cohesive ones. The adjoint functors embodying such a contrast have special properties (for example a Nullstellensatz and a product-preserving left adjoint). Rational mathematical definitions of apparently philosophical terms (quality, extensive quantity, form, substance) can be given in this context and used to compare examples. A class of examples of such contrast arises by recognizing an infinitesimal space

T that represents the indispensable tangent bundle functor. (This T is the concentrated definition of motion in general: a map with domain T "steps into the river" in one place but simultaneously not only in that place). The contrasting noncohesive spaces can then be defined as those S for which all maps from T to S are constant. Calculus and differential geometry arise from the interplay of T and the map-space construction; the real one-dimensional continuum itself arises, with its intrinsic multiplication, as a retract of the tangent bundle of T; this vindicates Euler's long-deprecated definition of reals as ratios of infinitesimals.

### **Bibliographie :**

F.W. Lawvere, "[Axiomatic Cohesion](#)", Theory and Applications of Categories, Vol. 19, No. 3, 2007, pp. 41–49.

(l'article est également téléchargeable de cette page - voit les documents attachés en bas)

### **Réunion 14**

**Date :** le 18 Janvier 2008

**Objet:** René Guitart sur l'exposé de LAWVERE du 22 novembre

**Bibliographie :** F.W. Lawvere "[Volterra's functionals and covariant cohesion of space](#)" (l'article est également téléchargeable de cette page - voit les documents attachés en bas)

### **Réunion 15**

**Date :** le 18 mars 2008

**Objet:** Covariance dans la physique et dans la théorie des catégories.

**Intervenants:** Marc Lachièze-Rey et Andrei Rodin

### **New Series (2010-2011)**

#### **Réunion 1**

Speaker: Louis Crane (Kansas State University)

Title: QUANTUM GRAVITY AND THE MACKAY CORRESPONDENCE

temps: 20 décembre 2010, 15h-17h

lieu: Université Paris-Diderot, bâtiment Condorcet, salle 483A Malevitch.

#### **Réunion 2**

Speaker: Noson YANOFSKY (City University of New York)

Title: "The Shape of an Experiment"

temps: 26 janvier 2011, 15h-17h

lieu: Université Paris-Diderot, bâtiment Condorcet, salle 483A Malevitch.

*Abstract:* Two of the most important ideas in quantum mechanics are compatibility of measurements and entanglement of outcomes. We look at a combinatorial description (simplicial sets) of the space of measurements and the space of possible outcomes of those experiments. An experiment is then a map from the space of outcomes to the space of measurements that assigns to each outcome the measurement that corresponds to it. The result of an experiment is simply a map from measurements to outcomes that is inverse to the experiment map. Different no-go theorems and properties of quantum systems are then simple statements about experiment maps. From this point of view, the notion of compatibility (which restricts the space of measurements) and entanglement (which restricts the space of outcomes) are seen as intimately related phenomena. *Résumé:* Deux des idées les plus importantes en mécanique quantique sont la compatibilité des mesures et l'interdépendance des résultats. Nous présentons une description combinatoire (par les ensembles simpliciaux) de l'espace des mesures et de l'espace des résultats possibles de ces expériences. Une expérience est alors une application de l'espace des résultats vers l'espace des mesures qui assigne à chaque résultat la mesure qui lui correspond. Le résultat d'une expérience est simplement une application de l'espace des mesures vers celui des résultats qui est inverse à l'"application des expériences". Diverses propriétés de systèmes quantiques ainsi que certains Théorèmes d'impossibilité deviennent de simples observations sur les "applications des expériences". De ce point de vue, la notion de compatibilité (qui restreint l'espace des mesures) et d'interdépendance (qui restreint l'espace des résultats) sont compris comme des phénomènes intimement liés.