Геометрическая характеристика от Грассмана до Воеводского

Андрей Родин

Институт Философии РАН

8 апреля 2015 г.

Content:

Characteristica Geometrica 1679

Поскольку буквенные обозначения точек фигур отражают геометрические свойства этих фигур, я поставил вопрос о том, можно ли данную фигуру полностью представить подобным характеристическим (знаковым, буквенным) способом - так, чтобы любую геометрическую проблему можно было бы затем решить только с помощью перемещения букв. Эта задача не может быть решена с помощью одной Алгебры, которая опирается на геометрические доказательства.

Ср. A. Arnauld. Nouveaux Elements de Geometrie 1667

Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene Geometrische Charakteristik. 1847

Я исхожу из характеристики Лейбница. Я показываю, как из этого зародыша, при последовательном проведении и дальнейшем развитии, при надлежащем исключении всего чуждого и обогащении идеями геометрического родства, проистекает анализ, который я склонен рассматривать как осуществление, хотя только относительное, идеи геометрического анализа Лейбница

Die Formenlehre oder Mathematik. Von Robert Grassmann. Stettin, 1872.
Ersters Buch: Die Grösenlehre
Zweites Buch: Die Begriffslehre oder Logik
Drittes Buch: Die Bindelehre oder Combinationslehre
Viertes Buch: Die Zahlenlehre oder Arithmetik
Fünftes Buch: Die Ausenlehre oder Ausdehnungslehre.

Die Begriffslehre oder Logik 1872

Чтобы научно обосновать учение о понятиях, или логику, мы должны вступить на новый путь, а именно на путь чистых формул, и все доказательства представить уравнениями, преобразуемыми согласно законам учения о величинах. Ибо только этот способ доказательств не предполагает никакой логики, никакой грамматики, только он в состоянии придать мышлению строгую форму [..] Учение о понятиях, или логика, образует вторую ветвь учения о формах, или математики; стало быть, оно уже ссылается на определения и законы учения о величинах.

Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Hermann Grassmann, preceduto delle operazioni della logic deductive, Bocca, 1888

Геометрическое исчисление предваряется введением, в котором рассмотрены операции дедуктивной логики; эти операции аналогичны алгебраическим операциям и операциям геометрического исчисления. [..] Многие из вводимых тут обозначений используются затем в геометрическом исчислении.

Principles of Mathematics 1903

Чистая математика имеет дело исключительно с небольшим числом фундаментальных логических понятий; все математические предложения можно вывести из небольшого числа фундаментальных логических принципов. Доказательство этого тезиса будет [неформально] рассмотрено в гл. 2-7 настоящей работы и затем установлено с помощью строгого символического рассуждения во Второй части [= Principia]

Grundlagen der Geometrie 1899

Геометрия также как и арифметика нуждается для своего последовательного построения в немногих и простых основных положениях. Эти основные положения называются аксиомами геометрии. Постановка аксиом геометрии и исследование их взаимной связи есть задача, которая со времени Евклида была предметом исследований в многочисленных прекрасных произведениях математической литературы. Эта задача сводится к логическому анализу наших пространственных интуиций.

Grundlagen der Mathematik 1927

Как и любая другая наука математика не может быть основана только на логике. Скорее наоборот, чтобы делать логические выводы и совершать логические операции, должны быть до всякой мысли непосредственно в опыте интуитивно даны некоторые внелогические объекты. Чтобы логические выводы были надежными, нужно иметь возможность просматривать эти объекты во всех их частях. В математике в качестве таких объектов мы рассматриваем конкретные хорошо различимые и узнаваемые знаки.

Quantifiers and sheaves 1970

“Топология” Гротендика естественным образом может быть представлена в виде модального оператора “локально верно то, что”, обычные логические операторы такие как $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ имеют естественные аналоги, которые применяются не к пропозициональным функциям, а к семействам геометрических объектов, а важный прием состоит в том, что конструкции первоначально изученные в категории $\underline{S}$ абстрактных множеств переносятся на произвольный топос. [..] В некотором смысле <u>логика это частный случай геометрии</u>.

Homotopy type theory: Univalent foundations of mathematics 2013

Когда типы понимают как высказывания, они содержат больше информации чем только истинность и ложность, и любые “”логические” конструкции с этими типами должны принимать во внимание эту дополнительную информацию. Более привычную логику можно получить, если понимать под высказываниями только такие типы, которые не содержат никакой другой информации кроме истинностных значений, и ограничить рассмотрение только этими типами. Такой тип будет “истинным” если он не пуст, и будет ложным в противоположном случае. Это соображение мотивирует следующее определение:

Определение:

Тип называется *голым высказыванием* если для всех $x, y : A$ имеем $x = y$.

В теории гомотопий пространство (гомотопически) эквивалентное точке называется *стягиваемым*. Таким образом любое истинное голое высказывание стягиваемо.

Логика - часть геометрии?

Логика - часть геометрии?

- Гомотопическая *модель* (??) теории типов.

Логика - часть геометрии?

- Гомотопическая *модель* (??) теории типов.
- Теория типов как *внутренний язык* (??) теории гомотопий. Внутренняя и внешняя логика.

Логика - часть геометрии?

- Гомотопическая *модель* (??) теории типов.
- Теория типов как *внутренний язык* (??) теории гомотопий. Внутренняя и внешняя логика.
- Что такое высказывание? Что такое суждение? Что такое истинностное значение? Что такое доказательство?

Логика - часть геометрии?

- Гомотопическая *модель* (??) теории типов.
- Теория типов как *внутренний язык* (??) теории гомотопий. Внутренняя и внешняя логика.
- Что такое высказывание? Что такое суждение? Что такое истинностное значение? Что такое доказательство?
- Классический и конструктивный словари недостаточны, необходима ревизия основных логических понятий в духе идеи геометрической характеристики.

СПАСИБО!