ЕВКЛИД НАВСЕГДА

АНДРЕЙ РОДИН

Работа поддержана грантом РГНФ 13-03-00384

Аннотация. For more than two millennia Euclid's *Elements* have been repeatedly revised and re-edited by its publishers who typically aimed at producing an up-to-date mathematical textbook rather than just a fresh copy of the old Classical text. In the 20-th century the idea of revising Euclid's classics was instrumental in developing a new axiomatic approach, which is routinely used in mathematics today. Thus we have got a large corpus of various Elements some of which follow Euclid closely while some other attempt to rebuild mathematics on some new grounds. This collection of related texts is a visible output of continuing efforts, which has been played, for centuries, an important role in the mathematical education and the intellectual culture more broadly. A systematic study and further sustaining of this tradition requires joint efforts of a multi-disciplinary team of researchers and using modern digital technologies.

Аннотация. В течении по крайней мере двух тысячелетий издатели "Начал" Евклида регулярно производили на свет новые версии и редакции этого текста, поскольку обычно их целью было издание современного математического учебника, а не воспроизведение старой классики. В 20-м веке идея переписывания "Начал" Евклида на новых принципах привела к созданию нового аксиоматического метода, который сегодня широко используется в математике. Таким образом мы получили в наше распоряжение большой корпус различных "Начал", некоторые из которых близко следуют Евклиду, тогда как другие пытаются перестроить математику на новых основаниях. Это собрание текстов представляет собой видимый результат продолжающихся по сегодняшний день усилий, которые на протяжении многих веков играли очень существенную роль в математическом образовании и в общей интеллектуальной культуре. Систематическое исследование и дальнейшее развитие этой традиции требует совместной работы большой команды ученых разных специальностей и использования современных цифровых технологий.

1. Автор

О Евклиде Александрийском почти ничего неизвестно, кроме того, что такой человек действительно был. Он жил и работал в Александрии в период между смертью Платона (347 г. до н.э.) и рождением Архимеда (287 г. до н.э.), то есть во время царствования

Птолемея I (367 -283 г. до н.э.). Никаких других точных сведений о биографии Евклида нет. Такой обезличенный характер автора "Начал" мне кажется не вполне случайным; я думаю, что он связан с тем особенным способом передачи, воспроизведения и модернизации этого текста, о котором я буду подробно говорить ниже. Отсутствие биографических свидетельств об Евклиде уже в древности компенсировалось анекдотами. Биографическая ценность этих анекдотов равна нулю хотя бы потому, что те же самые анекдоты другие античные авторы рассказывают о других математиках. Эти анекдоты представляют интерес скорее потому, что они передают характерное отношение к математике и математикам их современников и потомков. Прокл передает такую историю: Птолемей (царь) спрашивает Евклида, как ему побыстрее изучить геометрию, имея в виду, что у царей есть возможности недоступные простым смертным. Евклид отвечает, что царского пути в геометрии нет. Ту же историю Стобей рассказывает об Александре и Менэхме. А об Евклиде Стобей рассказывает другую историю: молодой человек размышляет о том, стоит ли ему тратить время на изучение геометрии, и спрашивает Евклида, какую пользу ему может дать такая учеба. Тогда Евклид говорит своему помощнику: дай этому парню три обола.

"Начала" это не единственное произведение Евклида, которым мы располагаем или о котором мы что-то знаем из других исторических источников. Среди других произведений Евклида я упомяну здесь только "Оптику", в которой геометрическая теория "Начал" используется для как математическое основание для теории зрения. "Оптика" Евклида представляет большой интерес для изучения истории связей между математикой, естественными науками и технологиями. Однако дальше я буду говорить только о "Началах".

2. Жанр

Жанр математических "Начал" не был изобретен Евклидом. Прокл [8] опираясь на утерянную "Историю Геометрии" Эвдема Родосского упоминает о двух более ранних утерянных версиях "Начал" составленных Гиппократом Хиосским (вторая половина 5-го века до н. э.) и Леонтом (о котором больше ничего не известно). Греческое название $\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$, которое на русский язык традиционно переводят как "Начала", это множественное число от $\sigma\tau o\iota\chi\epsilon o\nu$, обозначающего в буквальном смысле букву алфавита и в расширительном смысле - принцип или первое основание. Аналогичным образом построены английские названия вроде "ABC of first aid" (основы неотложной медицинской помощи). Речь в этих случаях идет о самых базовых знаниях без которых невозможно дальнейшее продвижение в данной области знаний - подобно тому, как без знания алфавита невозможно чтение и тем более письмо на греческом или русском языке. Однако в отличие от содержания руководства по неотложной медицинской помощи содержание математических "Начал" определяется не внешним прагматическим контекстом, а внутренним теоретическим порядком самого предмета, то есть внутренним теоретическим порядком математики.

В более конструктивном ключе можно сказать, что математические “Начала” реализуют идею дедуктивного построения математической теории, согласно которой сначала вводятся первые принципы теории (о которых я подробнее скажу ниже), а затем из этих принципов выводятся дальнейшие теоремы и решаются дальнейшие проблемы. Такой способ построения теории называют *аксиоматическим*, используя при этом термин “аксиома” как общее название для первых принципов. Порядок вывода теорем из аксиом при этом как правило отождествляют с логическим порядком, а саму процедуру такого вывода отождествляют с *логическим* выводом. На самом деле такое отождествление проблематично, поскольку оно требует явного критерия демаркации между логической формой и математическим содержанием и других подобных уточнений. Однако для того, чтобы зафиксировать и математически описать дедуктивную структуру “Начал”, такие уточнения делать не обязательно.

Аксиоматическая архитектура математической теории “Начал” Евклида на протяжении всей последующей истории науки служила в качестве образца того, как вообще должны строиться научные теории. Примером использования аксиоматического метода за пределами чистой математики может служить “Оптика” Евклида, о который мы уже упоминали выше. “Математические Начала Натуральной Философии” Ньютона также написаны в аксиоматическом стиле с оглядкой на Евклида. Систематические попытки использовать аксиоматический метод в физике, биологии и других науках предпринимались в 20-м веке начиная с Гильберта и продолжаются сегодня [12]. Однако нужно иметь в виду, что современный аксиоматический метод значительно отличается от метода Евклида. Ниже я коротко скажу, в чем состоят эти отличия.

3. Текст и его передача

В популярной и даже специальной литературе можно часто встретить утверждение о том, что “Начала” Евклида на протяжении двух тысячелетий служили в качестве стандартного компендиума элементарной математики и использовались в качестве элементарного учебника. На первый взгляд подтверждения для этого тезиса найти не трудно: например, можно сослаться на полемику, которая в 1870-х годах велась в Викторианской Англии, о том, стоит ли продолжать использовать в школе Евклида или нужно переходить на новые учебники. Активное участие в этой полемике на стороне защитников Евклида принимал Чарльз Доджсон более известный под псевдонимом Льюис Кэррол [2]. Однако если посмотреть более внимательно на содержательную сторону этого спора, то сразу станет ясно, что то, что Доджсон называет “Началами Евклида” вовсе не является произведением Евклида в том же смысле, в котором мы говорим о диалогах Платона, трагедиях Еврипида, романах Толстого или рассказах Конан Дойла! Дело в том, что на протяжении своей долгой истории текст “Начал” постоянно и систематически редактировался и переписывался его издателями, цель которых состояла как правило не в том, чтобы буквально воспроизвести старый текст снабдив его новыми комментариями (как это делалось и продолжает делаться с литературными, философскими или религиозными текстами), а в скорее том, чтобы на основе старого

текста (или целого ряда таких текстов) создать новый современный учебник математики. В некоторых случаях такие учебники публиковались под именем составителя, но в других случаях они продолжали называться “Началами Евклида”. Часто трудно сказать, почему тот или иной автор выбирает одну из этих двух опций, хотя более внимательное изучение исторического контекста в каждом конкретном случае иногда может пролить какой-то свет на этот вопрос. Сравнивая содержание популярного в 17-м веке учебника геометрии опубликованного в 1654-м году под именем Андрэ Také (André Taquet) с содержанием “Начал Евклида” опубликованных в 1660-м году Клодом Дешалем (Claude Dechales), я не смог найти никакого разумного ответа на вопрос о том, почему на обложке одного из этих двух учебников есть имя Евклида, а на обложке другого нет. Если какой-то ответ на этот вопрос и можно найти, то он, очевидно, касается не математического содержания этих двух текстов, а скорее обстоятельств, при которых эти книги были составлены и опубликованы. Курьезная часть этой истории состоит в том, что когда упомянутый выше учебник Také был переиздан в 1725-м году (уже через много лет после смерти его автора) имя Евлклида все-таки появилось на его обложке.

Такое вольное отношение к тексту “Начал” и к авторству Евклида покажется менее удивительным, если мы сравним, какую роль играют сегодня старые тексты, с одной стороны, в философии и филологии и, с другой стороны, в точных науках. Хотя классическая ньютонова механика по-прежнему входит в стандартные программы современного физического образования, никому не прийдет в голову изучать ее по “Математическим Началам” Ньютона. Классическую механику современные студенты изучают по новейшим изложениям написанным с современной точки зрения, которые значительно облегчают переход к изучению новейших теорий и исследованию открытых вопросов. Обращение к оригинальным текстам Ньютона может быть уместным только в рамках курсах истории (и, может быть, философии) физики. В то же время идея о том, что основательное изучение трансцендентальной философии Канта требует обращения к первоисточнику, а не только чтения вторичной литературы, до сих пор остается общепринятой в философском образовании (даже если учесть, что в случае философии говорить об общих международных образовательных стандартах гораздо труднее, чем в случае физики). Многовековая история переписывания “Начал Евклида” показывает нам, что такая специфика образовательных практик в различных дисциплинах возникла не вчера: характерная для современных точных наук идея о том, что научный прогресс требует в первую очередь не воспроизведения и комментирования старых текстов, а скорее переосмысления содержания этих текстов и переписывания их на новый лад, уже присутствовала в математике на протяжении последних двух тысячелетий ее истории.

Сказанное не означает, что мы вообще не располагаем никаким определенным текстом “Начал”, который можно с разумной степенью исторической достоверности атрибуировать Евклиду Александрийскому. Такой текст у нас есть благодfря следующим обстоятельствам. Некоторые из старых издателей “Начал” все-таки подходили к делу скорее

как историки и филологи, а не как творческие математики, и стремились восстановить и передать оригинальный текст Евклида по возможности в точном виде. К таким издателям относится, в частности, Симон Гринеус (Simon Grynaeus), который в 1533-м году в Базеле (Basel) выпустил издание “Начал”, которое филологи называют *editio princeps*, имея в виду, что это первое печатное издание данного древнего текста выполненное с наилучшей доступной для того времени степенью историко-филологической достоверности.

Историко-филологический интерес к “Началам” Евклида многократно усилился после того, как во второй половине 19-го века “Начала” перестали повсеместно использоваться в качестве стандартного школьного учебника геометрии и превратились таким образом в исторический памятник. В 1883-1888 годах датский филолог Йохан Людвиг Гейберг (J.L. Heiberg) издал свою версию оригинального греческого текста “Начал” [5], которой исследователи и переводчики Евклида продолжают пользоваться и сегодня. История этого издания, вкратце, состоит в следующем. *Editio princeps* как и все остальные ранние издания оригинального текста “Начал” восходят к редакции Теона Александрийского, которая датируется концом 4 века н.э. При этом достоверно известно, что издание Теона не полностью аутентично; на этот факт указывает в другом месте сам Теон утверждая, что авторство одного из предложений в его редакции “Начал” принадлежит ему, а не Евклиду. В 1808-м году в Ватиканской библиотеке была обнаружена рукопись “Начал”, которой раньше никто специально не интересовался, и в которой указанное Теоном предложение отсутствует. Из этого факта Гейберг делает вывод о том, что эта рукопись восходит к независимому от Теона источнику. Другой подход к восстановлению первоначального текста “Начал” использовал современник Гейберга Морис Кламрот (Morris Clamroth), который пытался восстановить первоначальный текст Евклида опираясь в основном на арабские источники и полагая, что некоторые арабские переводы “Начал” сделаны с ранних версий греческого текста, которые были впоследствии утеряны. Несмотря на то, что исследования арабских изданий Евклида принесли в последние годы ряд новых интересных результатов, большинство специалистов (к которым я себя не отношу) склонны считать, что аргументация Гейберга пока выдерживает всю предъявленную критику. Поэтому говоря далее о “Началах” Евклида, я буду иметь в виду именно текст Гейберга.

Несколько слов о существующих переводах “Начал” Евклида на современные языки (я здесь ограничусь только английским и русским). Из сказанного выше ясно, что переводами “Начал” в точном смысле слова следует считать только переводы сделанные с текста Гейберга - более ранние “переводы” было бы точнее называть изложениями или переложениями. Вскоре после издания текста Гейберга, а имено в 1908 году, Томасом Хисом (Thomas Heath) опубликовал свой английский комментированный перевод “Начал” сделанный по тексту Гейберга [6]. Это издание до сих пор используется в англоязычной научной литературе в качестве стандартной ссылки. Русского комментированного Евклида [11] мы имеем благодря упорному труду Дмитрия Дмитриевича Мордухая-Болтовского, которым он продолжал заниматься в тяжелых условиях во

время войны. Это на сегодняшний день единственный русский перевод “Начал” сделанный по тексту Гейберга. В своих комментариях к “Началам” Евклида Мордухай-Болтовский пытается проследить, каким образом теория Евклида трансформируется в последующих редакциях этого текста. Однако проделанную им в этом направлении работу нельзя, на мой взгляд, считать достаточной, поскольку наблюдения Мордухая-Болтовского ограничиваются несколькими выбранными им учебниками, по которым он прослеживает историю отдельных математических понятий и утверждений. Кроме того, как я сейчас постараюсь показать, эта важная задача вообще не может быть удовлетворительно решена в рамках комментария к единственному тексту выбранному в качестве канонического.

Когда мы говорим о “Началах Евклида” и их истории, проблема восстановления и интерпретации оригинального текста “Начал” имеет, на мой взгляд, только частное значение. Как я уже сказал, “Начала Евклида” это не один конкретный текст, который в неизменном или почти неизменном виде воспроизводился на протяжении веков и тысячелетий подобно христианской Библии или поэмам Гомера, а большой массив разных текстов написанных в разное время при разных обстоятельствах и связанных друг с другом разного рода отношениями, которые мы обозначаем такими словами как “редакция”, “переиздание”, “перевод” (в том числе с одного “математического языка” на другой), “модернизация” и т.д. Основной интерес для истории математики, на мой взгляд, представляет весь этот массив текстов в целом, поскольку он отражает очень важную часть этой истории, которую можно назвать историей оснований. Евклид также как и все последующие издатели и редакторы его главного труда, в свою очередь использовал более ранние версии “Начал”. Тот факт, что именно имя Евклида оказалось прочно связанным с жанром “Начал” в последующей истории, не означает, что другие математики, которые писали в этом жанре до и после Евклида, заслуживают меньше внимания - независимо от того, называют ли они себя при этом переводчиками и редакторами Евклида или считают себя самостоятельными авторами. Конечно, чтобы подробно описать исторический процесс эволюции математических “Начал” от Евклида (или раньше) до сегодняшнего дня, совершенно необходимо разбираться как с точной хронологией, так и с авторством. В этом отношении филологические результаты Гейберга являются очень важным достижением. Однако, на мой взгляд, подобного внимательного исследования заслуживают все без исключения старые и новые варианты математических “Начал”, а не только те, которые могут нас каким-то образом приблизить к решению задачи отождествления оригинального текста Евклида.

Задача описания и исследования всего массива относящихся к “Началам” исторических документов с единой точки зрения остается на сегодняшний день нерешенной. Я сомневаюсь что такая задача может быть решена с помощью историко-филологических методов 19-го века, которыми большинство исследователей продолжает пользоваться и сегодня, но думаю, что новые электронные технологии работы с большими (по филологическим меркам) объемами текстовых данных делают эту задачу разрешимой. Кроме новых технологий филологической и исторической работы такой исследовательский проект потребует и более современных форм организации исследований. Я

думаю, что историкам стоит в этой связи присмотреться к новым организационным формам научных проектов, которые используются в современной экспериментальной физике, где в одном проекте могут сотрудничать сотни и даже тысячи участников (как, например, в недавних экспериментах на Большом Андронном Коллайдере, которые привели к открытию бозона Хиггса). Мне хочется надеяться на то, что подобного рода большой коллективный проект, а еще лучше несколько таких конкурирующих проектов, ставящих своей целью сохранение, описание и исследование всего доступного нам исторического наследия связанного с "Началами" Евклида, в скором времени станут реальностью и принесут новые интересные открытия.

В заключение этого раздела я упомяну еще об одном курьезном случае, который показывает, что историко-филологический и собственно математический интерес к "Началам" Евклида не всегда сочетаются самым удачным образом. В 1655-м году Исаак Барроу (Isaac Barrow) издал свою редакцию "Начал" считая, что это издание возвращает читателям оригинальный текст Евклида очищенный от ошибок внесенных в этот текст предшествующими поколениями его редакторов и издателей. Однако в качестве метода своей работы с текстами Барроу избирает не историко-филологические штудии, а самую радикальную модернизацию имеющихся в его распоряжении вариантов "Начал" с применением новейших достижений математики 17-го века (часть из которых являются его собственной заслугой)! По-видимому, Барроу считает, что прояснение математической сути дела решает задачу восстановления античного математического памятника автоматически. Подобное сочетание серьезного интереса к истории своей дисциплины с полным непониманием методов исторической науки, к сожалению, нередко встречается среди математиков и сегодня.

4. Аксиоматическая архитектура

Поскольку у меня сейчас нет возможности рассказать о всем математическим содержании "Начал" Евклида, я скажу только несколько слов об аксиоматической архитектуре и специфическом характере дедукции в теории Евклида. При этом я не буду предполагать, что "Начала" действительно представляют собой единую теорию, а не несколько отдельных теорий. В современной логике теорией принято называть систему *высказываний* (также называемых *пропозициями*) некоторым из которых присвоен специальный статус *аксиомы*; всякое принадлежащее данной теории высказывание, которое само не является аксиомой, выводится из аксиом теории по заранее фиксированным правилам логического вывода и называется *теоремой*. Таким образом, теория в этом смысле представляет собой список аксиом (который может быть бесконечным) дополненный всеми возможными логическими следствиями этих аксиом (что иногда называют *дедуктивным замыканием* данного списка аксиом). Нужно иметь в виду, что правила логического вывода, вообще говоря, не имеют алгоритмического характера, то есть, характера точного предписания. Эти правила аналогичны не компьютерной программе, которая однозначно предписывает компьютеру каждый последующий шаг вычисления, а правилам игры в шахматы, которые говорят нам, какие ходы являются

разрешенными, а какие нет, но при этом только в исключительных случаях оставляют игроку единственный возможный ход. Это понятие теории является, конечно, идеализированным - хотя бы потому, что предполагает, что количество теорем данной теории может быть бесконечным.

Хотя применение такого понятия теории к "Началам" Евклида и дает некоторые осмысленные результаты, я считаю важным подчеркнуть, что строго говоря, теория Евклида в эту стандартную схему не вписывается. Дело в том, что помимо пяти аксиом, которые Евклид называет *общими понятиями* (имея в виду, что они применяются как к геометрической, так и арифметической части его теории), в число первых принципов "Начал" входят также пять *постулатов*, которые имеют значение только для геометрической части теории, и по крайней мере некоторые из которых в логическом смысле вовсе не являются высказываниями. Главная логическая характеристика высказывания - это допустимость истинностной оценки; если иметь в виду классическую двузначную логику, то дело сводится к тому, что всякое высказывание может быть либо истинным, либо ложным. Первые три постулата "Начал" описывают базовые геометрические операции, которые обычно называют построениями циркулем и линейкой, и которые вовсе не являются высказываниями в этом смысле. Например, Первый Постулат сформулирован так:

> От всякой точки до всякой точки провести прямую линию. (П1)

При анализе этой формулировки нужно иметь в виду, что инфинитивная форма глагола в греческом языке в отличие от русского не имеет императивной коннотации. Таким образом П1 является описанием операции, которая включает в себя спецификацию операндов (две данные точки) и спецификацию результата (построенный отрезок). Это описание не может быть истинным или ложным. Разумеется, можно легко подобрать высказывание имеющее аналогичное содержание, например:

> От всякой точки до всякой другой точки можно провести прямую линию

или

> Для всякой точки и всякой другой точки существует прямая линия, которая соединяет эти точки.

однако надо иметь в виду, что с логической точки зрения такое перефразирование не является безобидным, поскольку оно превращает в высказывание выражение, которое в исходном виде высказыванием вовсе не является. Помимо аксиом и постулатов к числу первых принципов геометрической теории Евклида также относятся и его *определения*, которые я сейчас оставляю в стороне. О роли определений в этой теории можно прочитать в моей монографии [13].

Специфическая черта аксиоматической архитектуры "Начал", на которую я здесь указываю, касается не только первых принципов, но всей теории Евклида. Эта теория включает в себя не только теоремы (высказывания доказанные с помощью аксиом),

но и *проблемы*, которые в школьных учебниках геометрии называют “задачами на построение циркулем и линейкой”. Только у Евклида мы находим такие задачи уже “в решенном виде” в одном ряду с доказанными теоремами. Проблемы формулируются у Евклида в той же форме, что и первые три постулата - в виде описания некоторого действия вроде “построить правильный треугольник по данной стороне”. Только в отличие от постулатов, которые описывают элементарные операции не предполагающие дальнейшего анализа, формулировки проблем требуют сведения соответствующих операций (вроде построения треугольника) к элементарным операциям, то есть к постулатам.

Можно было бы предположить, что дедуктивная структура теории Евклида (точнее ее геометрической части) распадается на две самостоятельные части: теоремы выводятся из (или “доказываются с помощью”) аксиом, а проблемы выводятся из (или “решаются с помощью”) постулатов. Однако на самом деле такого расщепления дедуктивной структуры у Евклида нет: ранее решенные проблемы используются в доказательствах последующих теорем, а ранее доказанные теоремы в свою очередь используются в решениях последующих проблем. Таким образом проблемы и теоремы у Евклида составляют общий дедуктивный порядок. Чтобы увидеть, как это работает, нужно принять во внимание два момента. В доказательствах геометрических теорем у Евклида важную роль играют геометрические построения, которые в школьных учебниках принято называть “дополнительными”. Взаимным образом, решение геометрических проблем требует доказательств: например, чтобы решить задачу построения правильного треугольника по данной стороне, недостаточно просто указать на подходящую последовательность операций с использованием циркуля и линейки; нужно еще *доказать*, что получаемая в результате этих операций геометрическая конструкция действительно представляет собой правильный треугольник. Таким образом, геометрические построения участвуют в доказательствах теорем, а доказательства, в свою очередь, участвуют в решении проблем. Все это вместе создает специфическую дедуктивную структуру, которую я попытался описать более подробно в другом месте [14]. Адекватный формальный анализ аксиоматической архитектуры “Начал” Евклида современными средствами, на мой вгляд, остается открытой проблемой. Как мы увидим, эта традиционная архитектура имеет общие черты с некоторыми новейшими подходами в области оснований математики.

5. Неевклидова революция

С геометрической теории изложенной в “Началах” Евклида связаны несколько знаменитых геометрических проблем, которые были поставлены еще в античности, затем на протяжении многих веков оставались открытыми и, наконец, были окончательно решены в 19-м веке. Самыми известными являются три задачи: разделить данный угол на три равные части (трисекция угла), построить куб вдвое больше данного (удвоение куба) и построить квадрат равный (по площади) данному кругу (квадратура круга).

Подразумевается, что эти задачи должны быть решены на основании принципов изложенных в “Началах”, то есть “циркулем и линейкой”. Решение состоит в том, что циркулем и линейкой эти задачи не могут быть решены в принципе; доказательства этих фактов потребовали создания совершенно новой математической теории, которая далеко выходит за рамки элементарной геометрии и которую сегодня называют именем Галуа.

Проблема, на которую я сейчас хочу обратить внимание, отличается по своему характеру от этих задач, но связана с “Началами” еще более тесно. Окончательное решение этой проблемы было также получено только в 19-м веке. Речь идет о проблеме Пятого Постулата “Начал” (П5). Этот постулат описывает следующую операцию. Пусть две прямые a, b пересечены третьей прямой c так, что сумма внутренних углов образованных при этом пересечении с одной и той же стороны (назовем для определенности эту сторону *правой*) от с строго меньше двух прямых углов. П5 гарантирует, что если теперь неограниченно продолжать прямые a, b вправо, то они обязательно пересекутся в некоторой точке . Легко видеть, что этот постулат эквивалентен утверждению о том, что через данную точку не лежащую на данной прямой проходит единственная прямая параллельная этой данной прямой.

Проблема состоит в том, что П5 в отличие от других первых принципов теории Евклида имеет достаточно сложную формулировку и не является интуитивно совершенно очевидным. Это дает основания для того, чтобы утверждать, что П5 плохо подходит на роль первого принципа. Это последнее утверждение имеет, конечно, не чисто математический, а скорее эпистемологический характер. Чтобы его как следует обосновать, необходимо сформулировать (и в свою очередь обосновать) какие-то критерии, по которым мы будем отсеивать негодных кандидатов на роль первых принципов и выбирать подходящих. В отличие от математических или исторических фактов такие эпистемологические критерии не являются жесткими и меняются на протяжении историии. Благодаря Проклу мы знаем, что попытки исправить ситуацию с П5 предпринимались уже в античности. Вопрос о том, в чем именно античные математики видели связанную с П5 проблему, является сложным и мало исследованным. Чтобы на него ответить, полезно, в частности, привлечь к делу “Вторую Аналитику” Аристотеля, где этот автор подробно разбирает эпистемологические вопросы связанные с первыми принципами различных теорий. Но даже если не входить в такие тонкости, можно все-таки с разумной степенью правдоподобия утверждать, что проблема состояла в том, что П5 казался слишком сложным и совсем не очевидным.

В то же время уже Евклиду было понятно, что без П5 или какого-то эквивалентного принципа невозможно строго (в смысле принятого в “Началах” критерия строгости) доказать многие важные геометрические теоремы вроде теоремы Пифагора. Исправить эту ситуацию можно было двумя способами: 1) доказать П5 как теорему на основе остальных первых принципов “Начал” или 2) доказать П5 как теорему используя при этом дополнительный принцип (или принципы), который подходит на роль первого принципа лучше, чем П5 (или, говоря другими словами, заменить П5 эквивалентным

принципом, который лучше чем П5 удовлетворяет принятым эпистемологическим критериям). Что касается 2), то тут, на мой взгляд, очень важный результат был получен в 17м веке Джоном Валлисом (John Wallis), который доказал, что П5 является следствием существования на Евклидовой плоскости подобных треугольников. Хотя существование подобных треугольников, возможно, и не является интуитивно полностью очевидным, я считаю этот результат Валлиса важным, поскольку понятие подобия, которое в своем обычном виде реализуется только в Евклидовой геометрии, лежит в основе техники масштабирования, которая используется в большинстве инженерных приложений этой геометрической теории. Именно это специальное свойство Евклидовой геометрии позволяет нам сначала спроектировать здание с помощью небольших по своим размерам чертежей, а уже затем по этим чертежам это здание построить. Таким образом Валлису, на мой взгляд, удалось существенно продвинуться в понимании того, что стоит за Пятым Постулатом Евклида, и почему именно Евклидова геометрия имеет для нас особенное значение.

Тот факт, что исследования проблемы П5 продолжались и в 18-м, и в 19-м веке трудно объяснить простым желанием найти какое-то элементарное доказательство этого утверждения, которое ускользнуло от внимания всех предыдущих поколений исследователей. Скорее можно предположить, что геометры ранга Ламберта (J.H. Lambert 1728-1777) и Гаусса правильно догадывались, что с этой проблемой связана какая-то новая интересная математика, но не знали еще как превратить эти догадки в точные математические результаты. Как хорошо известно, решающий шаг в исследовании проблемы параллельных был сделан в 1830х годах Н.И. Лобачевским, который впервые построил нетривиальную геометрическую теорию, в которой П5 не выполняется. При этом у Лобачевского не было четкого понимания того, каким именно образом нужно переформатировать общую теоретическую схему и аксиоматическую архитектуру геометрии, чтобы включить в нее эти новые результаты. С одной стороны, он считал, что нашел обобщение Евлидовой геометрии и называл свою теорию “пангеометрией” (то есть всеобщей геометрией). С другой стороны, Лобачевский понимал, что имеет дело не просто с одной общей геометрической теорией, но с целым семейством аналогичных, но при этом различных (и не совместимых друг с другом в обычном смысле) теорий. Эта ситуация для математики была совершенно новой и необычной.

Во второй половине 19-го века еще можно было продолжать пользоваться модернизированными вариантами “Начал” Евклида в школе, как это делал Кэрролл, но для того, чтобы “Начала” могли также играть свою обычную роль основания современной математики (или хотя бы только геометрии), их уже требовалось полностью переписать заново. Попытки такого рода в 19-м веке предпринимали многие математики включая Лобачевского (у которого, между прочим, были и другие интересные идеи в основаниях геометрии не связанные напрямую с проблемой П5). Самыми успешными и влиятельными в этом ряду оказались “Основания геометрии” Давида Гильберта 1899-го года [7].

6. “Начала” в математике 20-го века: Гильберт и Бурбаки

Было бы неправильно утверждать, что “Основания Геометрии” Гильберта занимают в математике 20-го века то же самое место, которое в античной греческой математике занимали “Начала” Евклида или в математике рубежа 16-17-го веков занимали “Начала Евклида” 1574-го года в редакции Клавия (Clavius). В отличие от Евклида и Клавия Гильберт в этой работе не пытается изложить базовые понятия и теоремы геометрии своего времени (которая уже включала в себя не только геометрию Лобачевского, но и проективную геометрию, Риманову геометрию и другие важные разделы),а ограничивается только старой доброй Евклидовой геометрией. Значение “Оснований” Гильберта состоит в том, что на традиционная геометрическая теория представлена в этой работе совершенно нетрадиционным образом, а именно с помощью нового аксиоматического метода, который с таких же успехом можно применить и к геометрии Лобачевского, и к любой другой математической теории. Именно благодря этому новому аксиоматическому методу, который вслед за Гильбертом сегодня называют “формальным”, “Основания Геометрии” Гильберта стали современной математической классикой. Теория Евклидовой геометрии, в том виде, как ее представил Гильберт в этой работе, до сих пор служит образцом того, как вообще должны быть устроены современные математические теории. В этом отношении “Основания геометрии” Гильберта действительно играют сегодня ту же роль, которую “Начала” Евклида и модернизированные варианты “Начал” играли в предыдущие века.

Основная черта, которая отличает аксиоматический метод Гильберта от аксиоматического метода Евклида - это, говоря современным языком, явное различение синтаксиса и семантики теории. С этим различением связано понятие о модели данной теории, которым Гильберт уже активно пользуется (хотя и не пользуется еще этим термином). Не входя в подробности, я покажу специфику аксиоматического метода Гильберта, который сегодня обычно называют просто современным аксиоматическим методом, на примере аналога Первого Постулата Евклида, который Гильберт в использует в стандартной пропозициональной форме

> Для всякой точки и всякой другой точки существует прямая линия, которая соединяет эти точки. (П1Г)

Обычно, читая такую фразу, читатель предполагает, что каждое слово в ней имеет определенное значение, которое необходимо либо знать заранее, либо как-то восстановить по контексту. Поэтому, в частности, Евклид предпосылает П1 *определения* точки и прямой линии, которые уточняют значения этих слов. Гильберт в свою очередь предложил использовать такие традиционные лингвистические выражения для другой логико-математической игры. Предположим, что в П1Г мы понимаем только *логический* словарь, то есть только такие слова как “всякий”, “другой”, “эти” и “существует”, которые не являются специфическими для данной теории и вообще для математики, тогда как значения нелогических терминов, то есть терминов специфических для нашей теории, таких как “точка”, “прямая линия” и “соединяет”, остаются для

нас полностью неопределенными. Поскольку значения этих терминов не определены, П1Г не является полноценным высказыванием имеющим определенное истинностное значение. Однако придавая этим терминам подходящие конкретные значения (включая обычные значения этих терминов в традиционной геометрии), мы можем получить истинное или ложное высказывание. Такие "недоопределенные" высказывания Рассел предложил называть *пропозициональными формами*. Если мы теперь предположим, что вместе с логическим словарем мы фиксируем правила логического вывода, мы получаем возможность выводить одни пропозициональные формы из других. Таким образом мы получаем дедуктивную аксиоматическую структуру дедукция (вывод) в которой имеет "чисто логический" характер и никак не связан со значениями нелогических терминов. По эпистемологическим соображениям Гильберт считал, что такой характер дедукции в математических теориях имеет фундаментальное преимущество перед традиционной геометрической дедукцией в духе Евклида, поскольку он никак не опирается на геометрическую интуицию. Важным свидетельством ненадежности традиционной геометрической интуиции для Гильберта как и для многих его современников служила история Пятого Постулата Евклида и изобретение неевклидовых геометрий, о которой мы говорили выше.

Процедура приписывания нелогическим терминам определенных значений называется *интерпретацией*. При этом сами эти термины относят к *синтаксису* теории, а их значения - к *семантике*. Это разделение также применяется и к логическим терминам, но вопрос о семантике логических терминов является более тонким, и я его сейчас оставляю в стороне. Следующий этап развития аксиоматического подхода Гильберта состоял в том, чтобы задавать синтаксис теории не с помощью слов и выражений естественного языка как в приведенном выше примере (П1Г), а с помощью подходящей системы символической логики, которая включает в себя четко определенный алфавит символов, критериев по которым выделяются корректно построенные символические выражения и правил, которые позволяют преобразовывать корректно построенные символические выражения в другие такие выражения. Такие процедуры, которые с синтаксической точки зрения могут иметь чисто комбинаторный и, как часто говорят, "механический" характер, затем интерпретируются как логические выводы. Впрочем, говоря о механическом характере логического вывода в символических исчислениях, нужно принять во внимание то замечание, которое мы сделали выше о логическом выводе вообще: такой вывод, вообще говоря, не является алгоритмической процедурой и поэтому сравнение символического вывода с работой механического автомата очень сильно хромает. Если настаивать на такого рода сравнении, то символический вывод можно скорее сравнить с механическим устройством вроде велосипеда или скейтборда, которое не работает само по себе, а требует очень тонкого управления. Такой еще более формальный подход к построению математических теорий используется сегодня в аксиоматической теории множеств, которую до сих принято считать "официальным" основанием современной математики, однако в отличие от "полуформального" аксиоматического метода представленного в гильбертовых "Основаниях Геометрии" он на

самом деле не играет почти никакой практической роли в современной математике за пределами математической логики и теории множеств.

Интерпретации, которые превращают пропозициональные формы выражающие аксиомы данной теории в истинные высказывания, называют *моделями* данной теории. Считая, что Первый Постулат выполнен на Евклидовой плоскости, мы можем интерпретировать все нелогические термины в П1Г обычным образом и говорить о "традиционной" или "стандартной" интуитивной модели Евклидовой геометрии. Но это не единственная возможная интерпретация П1Г. Интерпретируя "точки" в П1Г и других аксиомах данной теории как пары чисел (и интерпретируя аналогичным образом другие нелогические термины термины теории) можно получить арифметическую модель Евклидовой геометрии; соответствие между арифметической и стандартной моделями объясняется знакомым из школы понятием о координатной системе (но требует прояснения ряда деталей, которые я сейчас оставляю в стороне). Подобная формальная теория и ее арифметическая модель могут быть построены и в случае геометрии Лобачевского.

Если под словом "точка" мы будем понимать обычную Евклидову прямую, под словом "прямая" - обычную точку, а слово "соединяет" будем понимать в обычном смысле, то П1Г на Евклидовой плоскости уже не будет выполняться, поскольку на ней существуют параллельные прямые, которые не "соединяются" друг с другом ни в какой точке. Однако если мы волевым усилием припишем каждому пучку параллельных прямых на Евклидовой плоскости идеальную "бесконечно удаленную" точку, в которой все прямые этого пучка будут пересекаются (по нашему соглашению), то мы получим так называемую *проективную плоскость*, на которой П1Г будет истинным и при такой нестандартной интерпретации. Хотя этот последний пример может показаться искусственным, на самом деле он хорошо демонстрирует возможности формального аксиоматического метода, поскольку понятие о проективной плоскости первоначально возникло в математике и получило важное теоретическое значение совершенно независимо от этого метода. Только что описанный математический феномен известен по крайней мере с 17-го века и называется проективной двойственностью. Формальный аксиоматический метод и связанная с этим методом теория моделей позволяет описать этот важный математический феномен просто, коротко и коцептуально прозрачно.

Если иметь в виду то обстоятельство, что область применения формального аксиоматического метода распространяется далеко за пределы традиционной Евклидовой геометрии, то может показаться странным, что в своих "Основаниях Геометрии" Гильберт ограничился именно этим предметом (упоминая о неевклидовых геометриях только в связи с вопросом о независимости аксиом). Однако в исторической перспективе такой выбор Гильберта мне представляется удачным и осмысленным, поскольку он позволил обеспечить историческую преемственность математики 20-го века по отношению к математике 19-го века и более ранней математике. Такая преемственность является необходимым условием для прогресса любой научной дисциплины. Действительно,

прогресс науки предполагает, чтобы новые знания добавляются к старым, при том что эти старые знания в каком-то смысле сохраняются, а не утрачиваются и не преобразуются во что-то новое, не имеющее никакого отношения к старому. В этом, если угодно, состоит консервативная сторона прогресса, в которой я, впрочем, не вижу никакого сложного диалектического противоречия. При этом совершенно очевидно, что сохранение старых математических знаний не может быть обеспечено только за счет буквального воспроизведения старых текстов и поддержания традиции интерпретации и комментирования старых текстов подобно тому как это делается, в частности, в философии (где в отличие от математики говорить о долговременном прогрессе трудно если вообще возможно). Чтобы продолжать оставаться частью нового актуального математического знания, старые знания должны быть очень существенно переформатированы и вписаны в новый математический контекст. В математике такое переформатирование происходит постоянно (вместе с постоянным прогрессом) и не может быть ограничено только особыми моментами "научных революций". Именно с этим связано продолжавшееся два тысячелетия постоянное переписывание "Начал" Евклида, о котором мы уже говорили. В своих "Основаниях Геометрии" Гильберт по сути решает ту же задачу в контексте математики 20-го века. Когда Гильберт начинал работать над этим проектом в конце 1880-х годов, этот новый контекст еще далеко не был очевидным; благодаря своей работе и своему авторитету Гильберт смог не просто предугадать этот новый контекст, но смог сам его в значительной степени сформировать.

Как я уже сказал, в "Основаниях геометрии" Гильберт не ставил перед собой задачу написать общее введение в современную ему математику или даже только в современную геометрию. В 20-м веке такой проект задумал и реализовал коллектив математиков, в основном французов, которые объединились в 1935-м году под псеводнимом Николя Бурбаки (Nicolas Bourbaki). Название для своего труда [1] они напрямую заимствовали у Евклида; на русский язык название этого труда принято переводить как "Элементы математики" (хотя чтобы передать очевидную для французского читателя отсылку к Евклиду это название можно перевести и как "Начала математики"). Первые результаты работы этой группы были опубликованы в 1939-м году; последний появившийся в печати том (точнее глава тома, выпущенная отдельным изданием) датируется 1998-м годом. Всего к настоящему времени выпущено 27 томов (не считая переизданий и переводов). Скорее всего проект публикации "Элементов" Бурбаки нужно считать законченным. Однако семинар группы Бурбаки действует до сих пор и продолжает регулярно публиковать свои труды.

Идея Бурбаков (я позволю себе использовать здесь это русское склонение множественного числа принятое в отечественном математическом жаргоне) состояла в том, чтобы использовать формальный аксиоматический метод в духе Гильберта для систематического построения базовых математических теорий, на основе которых могут быть построены более специальные теории и в идеале - вся современная математика. Для этого Бурбаки в первом томе своего труда дают свой вариант аксиоматической теории множеств, а затем пользуются теорией множеств как универсальным средством

для построения моделей дальнейших теорий; такие теоретико-множественные модели Бурбаки называют (математическим) *структурами*. Для того, чтобы использовать формальный аксиоматический метод в качестве рабочего инструмента представления математических теорий в учебниках и научных публикаций, а не только в качестве инструмента логического анализа этих теорий, Бурбакам пришлось пойти на очень значительные компромиссы между требованиями логической строгости и требованиями математической практики (то есть, практики математического образования и математических исследований). Поэтому, в частности, Бурбаки никогда не проводят различия между данной формальной теорией и теорией моделей этой формальной теории. Несмотря на этот практический компромисс многие крупные математики 20-го века считали и продолжают считать "Элементы математики" Бурбаки скорее карикатурой на современную математику, а не основанием или общим введением в эту дисциплину. К числу таких яростных критиков Бурбаки и "бурбакизма" принадлежал, в частности, Владимир Игоревич Арнольд [10].

Со своей стороны я хочу отметить, что несмотря на критику и попытки использовать для представления математических теорий другие подходы (о некоторых из которых я скажу несколько слов ниже) в 20-м веке у Бурбаки не было конкурентов, которые предложили бы другое решение той же задачи, то есть, попытались бы систематически изложить основы всей современной математики каким-то другим способом. Разумеется, осмысленность этой задачи не является самоочевидной и нуждается в эпистемологическом обосновании. Можно аргументировать, что современная математика в отличие от математики прошлых веков уже не представляет собой единого целого, и что в ней нет никакого содержательного ядра, которое могло бы составить содержание новых математических "Начал" аналогичных "Началам" Евклида. С исторической точки зрения этот аргумент не кажется мне убедительным, поскольку подобная пролиферация математики в той или иной степени характерна для любой исторической эпохи, что вовсе не исключает возможности ее теоретической унификации.

Оставляя сейчас в стороне общую дискуссию о логическом и эпистемологическом значении и смысле такой унификации, я укажу только на некоторые ее образовательные и прагматические аспекты. Общий для всех математиков теоретический и образовательный бэкграунд нужен по крайней мере для того, чтобы математики разных специальностей могли обмениваться своими идеями и своими результатами; это особенно важно, если иметь в виду, что именно такой обмен математическими идеями часто приводит к новым результатам и, в частности, к решению старых задач, как в случае доказательства Великой теоремы Ферма Эндрю Уайлсом (Andrew Wiles) в 1994-м году. Базовый математический бэкграунд необходим также любому исследователю или специалисту, который хочет использовать математику в своей специальной области - физике, компьютерной науке, инженерии, экономике или любой другой. Для этого нужны современные элементарные учебники с более или менее стандартным содержанием, на основе которого можно получать более специальные математические знания и заниматься связанными с математикой специальными исследованиями. Поэтому я не считаю, что задача, которую раньше решали "Начала" Евклида, в какой-то степени

сегодня утратила свою актуальность. “Элементы” Бурбаки прямо или косвенно оказали на математическое образование 20-го века очень существенное влияние. Аргументы Арнольда и других критиков бурбакизма в математическом образовании заслуживают самого серьезного внимания и, с моей точки зрения (которую я не буду сейчас пытаться обосновать), являются вполне убедительными. Вместе с тем я не думаю, что отдельные замечательные учебники по отдельным математическим дисциплинам такие как, например, знаменитый учебник Арнольда по теории дифференциальных уравнений [9], могут полностью решить проблему. Я скорее склонен считать, что хорошие современные “Начала” просто еще не написаны.

7. Перспективы “Начал” в 21-м веке

В самый разгар работы Бурбаки над “Элементами математики” в 1963-м году Билл Лавер (Bill Lawvere) в своей диссертации выдвинул идею новых оснований математики на основе *теории категорий*, которая была ранее предложена Мак-Лейном (MacLane) и Эйленбергом (Eilenberg) в качестве общей теории математических структур. Хотя идея категорных оснований математики до сих пор остается дискуссионной, “язык категорий” стал в современной математике общеупотребительным. Тот факт, что Бурбаки сознательно решили оставить эту теорию в стороне, очень существенно ограничивает возможность использовать “Элементы математики” в качестве современного общего введения в дисциплину. Другой новый проект построения новых оснований математики уже в 21-м веке предложил Владимир Воеводский. Его проект “Унивалентных Оснований” в качестве базовой теории использует *гомотопическую теорию типов*, которая является геометрической моделью конструктивной теории типов Мартина-Лёфа (Martin-Löf) и делает возможной запись математических доказательств в виде программного кода [4].

Хотя эти новые направления исследований в области оснований математики не имеют никакого непосредственного отношения к “Началам” Евклида, исторический взгляд на проблему оснований математики позволяет сделать некоторые интересные наблюдения. Как мы уже видели, аксиоматический подход Гильберта к основаниям геометрии основан на идее *логического анализа геометрии*. Гильберт в духе логических позитивистов рассматривает логику как априорно заданную и жестко фиксированную систему формальных правил; задача аксиоматического построения геометрической теории сводится с этой точки зрения к тому, чтобы опираясь на пространственную интуицию, опыт и любые другие внелогические факторы (включая психологические) построить по этим правилам логическую схему рассуждений (которую можно представить в символической форме) допускающую нужную содержательную интерпретацию и, возможно, имеющую помимо стандартной интерпретации также интересные нестандартные интерпретации. Гомотопическая теория типов плохо вписывается в такую эпистемологическую рамку, поскольку она представляет собой альтернативную геометрическую интерпретацию синтаксиса, который в обычной теории типов интерпретируется с помощью логических понятий. Это обстоятельство позволяет думать о гомотопической

теории типов как о *геометрическом анализе логики*, что дает нам понятие об аксиоматической теории, которое сильно отличается от гильбертовского. В этом отношении только что упомянутый гомотопический подход к основаниям математики связанное с ним новое понятие аксиоматической теории более похож на традиционный подход Евклида, у которого геометрическое построение также может играть роль логического шага доказательства.

Я думаю, что теория категорий, унивалентные основания и, возможно, другие новые подходы к основаниям математики могут и должны быть использованы для нового "переписывания Евклида" и создания новых "Начал" для математики 21-го века. Формат "Начал" мне кажется привлекательным в первую очередь тем, что он позволяет совместить теоретическую основательность с практической и педагогической пользой. Этот формат позволяет также решить проблему исторической преемственности, о которой я уже говорил в связи с "Основаниями Геометрии" Гильберта. Быстрый прогресс современной математики делает роль исторической рефлексии в этой науке еще более важной. Поэтому я думаю, что задачу сохранения и изучения всего исторического наследия связанного с "Началами" Евклида и задачу создания новых оснований и новых элементарных учебников математики 21-го века имеет смысл решать вместе. Этот проект требует большой совместной работы историков, филологов, лингвистов, математиков, логиков, философов, компьютерных специалистов и специалистов по образованию. Как недавно заметил Саймон Блэкбурн (Simon Blackburn) с соавторами "Мы можем только мечтать об идеальном образовании, которое сочетало бы естественные науки и математику с пониманием их истории и философии" [3]. Я думаю, что коллективная работа над историей и теорией математических "Начал" от Евклида до наших дней может приблизить нас к этому идеалу.

Список литературы

[1] N. Bourbaki. *Eléments de Mathématique.* Paris:Hermann, 1939-1998.

[2] Ch. Dodgson. *Euclid and his Modern Rivals.* London: MACMILLAN, 1885.

[3] S. Blackburn et al. Can philosophy survive in an academy driven by impact and employability?, December 10, 2015.

[4] V. Voevodsky et al. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics.* Institute for Advanced Study (Princeton); available at http://homotopytypetheory.org/book/, 2013.

[5] Euclides. *Heiberg (ed.) Euclidis Opera Omnia, Elementa (vol. 1-4).* Lipsiae, 1883-1886.

[6] Thomas L. Heath. *The Thirteen Books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary.* Cambridge University Press, 1908.

[7] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig, 1899.

[8] Proclus. *A commentary on the first book of Euclid's elements. Translated by G. R. Morrow.* Princeton Univ Press, 1970.

[9] В.И. Арнольд. *Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4-е издание.* Ижевск: издательство Удмурдского гос. университета, 2000.

[10] В.И. Арнольд. Математическая дуэль вокруг Бурбаки. *Вестник Российской Академии Наук*, 72(3):245–250, 2002.

[11] Евклид. *Начала Евклида. Перевод и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. В 3-х томах.* Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1948-1950.

[12] С.П. Ковалёв и А.В. Родин. Аксиоматический метод в современной науке и технике: прагматические аспекты (в печати). *Эпистемология и философия науки*, 2016.
[13] А.В. Родин. *Начала Евклида в свете философии Платона и Аристотеля.* Москва: Наука, 2003.
[14] А.В. Родин. *Делать и показывать.* Москва: издательство МГУ, 2013.