Андрей Родин
(Институт Философии РАН и Санкт-Петербургский государственный универсистет)

Концепция перманентной научной революции и основания математики
(возвращаясь к спору между Кроу и Даубеном)

Аннотация:
В докладе представлен обзор продолжающейся дискуссии о возможности научных революций в математики. В этом контексте предложена оригинальная модель исторического развития математики, которая позволяет совместить прогрессивный накопительный рост математического знания с возможностью радикальных понятийных инноваций и пересмотров оснований. Применение этой модели к истории математики продемонстрировано на примере различных формулировок теоремы Пифагора.

Conception of Permanent Scientific Revolution and Foundations of Mathematics (revisiting the Crowe-Dauben debate)

Abstract:
In my talk I review the continuing discussion on the possibility of scientific revolutions in mathematics. In this context I propose an original model of historical development of mathematics, which allows for combining a progressive cummulative growth of mathematical knowledge with radical conceptual innovations and revisions of foundations. Application of this model to the history of mathematics is demonstrated at the example of the Pythagorean theorem in its different formulations.

В 70-х годах прошлого века в философии науки возникла дискуссия на тему о том, применима ли предложенная Томасом Куном теория научных революций к математике [1]. История математики не позволяет ответить вопрос однозначно. *С одной стороны,* в математике на протяжении ее истории так же как и в естественных науках неоднократно делались новые открытия и изобретения, которые имели глобальные последствия для последующего развития математики и кардинальным образом меняли ее облик. Во многих случаях эти революционные изменения шли параллельно с научными революциями в физике и были в некотором смысле их частью. Джозеф Даубен (Joseph D. Dauben) опираясь на более ранние оценки Фонтенелля находит все необходимые признаки научной революции в изобретении исчисления бесконечно малых, которое сыграло фундаментальную роль в развитии физики Нового времени [1, p. 49-82]. Таким образом, Даубен отвечает на вопрос о возможности революций в математике положительно. В качестве других очевидных примеров математических новаций, которые могут претендентовать на революционный статус, можно указать (не уходя далеко в историю) на открытие Николаем Ивановичем Лобачевским неевклидовых геометрий и создание теории множеств Георгом Кантором.

С другой стороны, в отличие от истории естественных наук, в истории математики не известны случаи дисквалификации значительных объемов ранее полученного и признанного научным сообществом математического знания, при том что исправление отдельных ошибок, а также изменения исследовательских приоритетов происходит в математике постоянно, как и в других науках. Несмотря на радикальные понятийные новации, которые многократно происходили в математике в прошлом и скорее всего будут происходить в будущем, всю известную историю математики можно убедительно описать в терминах получения и прогрессивного накопления новых знаний. Несмотря на свой солидный исторический возраст теорема Пифагора остается элементом современного математического знания. “Начала” Евклида и сегодня читаются как содержательный научный текст, хотя и использующий устаревшие математические понятия и содержащий логические погрешности. “Начала” Евклида полезно сравнить в этом отношении с “Физикой” Аристотеля, содержание которой в основном не релевантно современной физической науке. С точки зрения теории Куна (времени написания “Структуры научных революций”) это означает, что вся известная нам историческая и современная математика принадлежит к одной и той же научной парадигме, которая никогда не менялась. На этих основаниях Майкл Кроу (Michael J. Crow) утверждает, что “революции в математике никогда не происходят” [1, p. 15-20].

Значение спора между Кроу и Даубеном имеет значение не только для истории и философии математики, но и для философии науки в целом, поскольку этот спор позволил более глубоко проанализировать куновское понятие о научной революции и поставить это понятие под вопрос. Возвращаясь к этому спору, я хотел бы предложить возможное решение проблемы с помощью понятия о “перманентной революции” в науке, которое позволяет совместить представление о непрерывном прогрессивном развитии науки, с одной стороны, с возможностью радикальных понятийных новаций в науке, с другой стороны. Предлагаемое в этом докладе понятие о перманентной научной революции, очевидно, требует критического пересмотра теории Куна, однако я оставляю такую критику для другого случая и ограничиваюсь здесь только кратким описанием моего подхода. Я также ограничусь в данном докладе анализом истории математики, оставляя открытым вопрос о том, в какой мере данный подход применим для анализа исторического развития науки в целом.

Чтобы объяснить суть предлагаемого подхода, я оттолкнусь от примера теоремы Пифагора. Если сравнить, как эта теорема сформулирована и доказана в “Началах” Евклида, и как она изложена в любом современном учебнике элементарной геометрии, то можно заметить интересные различия. Современный учебник предлагает формулировку “в прямоугольном треугольника сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы”. Речь тут идет о длинах сторон, то есть о вещественных числах, а “квадрат” означает “возведение в квадрат”, то есть арифметическую операцию умножения числа на себя. В фомулировке Евклида речь идет о квадратах как геометрических фигурах, которые строятся на катетах и на гипотенузе данного треугольника; операция сложения квадратов в явном виде у Евклида не определена, но ее несложно реконструировать: автор имеет в виду, что квадраты построенные на катетах вместе *равносоставлены* квадрату построенному на гипотенузе, то есть могут быть сложены из одних и тех же многоугольников. Эти различия в формулировке теоремы Пифагора приводят к более глубоким различиям в способах ее доказательства, которые я оставляю сейчас в стороне.

Отождествление представленного разными способами содержания существенно используется в накопительной модели роста математического знания: как мы только что показали, оно необходимо для утверждения о том, что геометрическая теорема, которая была известна нашим предкам уже более 2000 лет назад, также содержится в наших современных школьных учебниках. Математики в таких случаях говорят, что одно и то же математическое содержание выражено на “разных языках”, имея при этом в виду не естественные языки, а языки базовых математических понятий. Такого рода различия можно посчитать несущественными, поскольку перевод старой математики на современный математический язык как правило является простым и очевидным. Впрочем, такая оценка напрямую зависит от критерия, согласно которому перевод между старым и новым математическим языком считается адекватным. Усиливая или ослабляя такой критерий, можно получить любую наперед заданную оценку.

Однако если посмотреть на различия между различными “математическими языками” с более широкой исторической и теоретической точек зрения, то станет очевидно, что простота в данном случае только кажущаяся. Если говорить более строго, то речь должна идти о различных (понятийных, логических и аксиоматических) *основаниях* метматики, с помощью которых формулируется то или иное математическое содержание. Современная элементарная формулировка теоремы Пифагора использует аналитических подход, впервые предложенный в явном виде в математике Декартом; этот подход был для своего времени революционной новацией, которая самым фундаментальным образом повлияла на все последующее развитие математики и, в частности, позволила уже в 19-м веке окончательно закрыть (с помощью алгебраического доказательства *невозможности* их решения в исходной формулировке) все так называемые “великие геометрическе проблемы древности”: квадратуру круга, трисекцию угла и удвоение куба с помощью только циркуля и линейки. С этой более широкой точки зрения различие между геометрическим языком Евклида и языком аналитической геометрии Декарта нужно считать фундаментальным, а исторический переход от одного к другому - в полном смысле слова революционным.

Итак, пример теоремы Пифагора в различных формулировках демонстрирует нам следующий любопытный феномен: такая революционная новация в математике как изобретение символической алгебры и аналитической геометрии не только обеспечивает прорыв в науке, решая важные старые проблемы и открывая новые перспективы исследований на несколько веков вперед, но и сохраняет в новой форме старое знание (теорему Пифагора в нашем примере), обеспечивая таким образом прогрессивный накопительный рост математического знания. Радикальность понятийной новации в данном случае оказывается полностью совместимой с непрерывным прогрессом и накопительным ростом знания. Открывая или создавая новое в математике, мы не забываем (а только переформулируем) старое.

В случае "теоретико-множественной революции" и других радикальных новаций в области оснований математики, которые могут претендовать на статус научной революции, дело обстоит подобным образом. Термин "революция" мне представляется особенно подходящим для описания данного феномена, поскольку он в данном случае выражает не только радикальный характер новации, но и момент *воспроизведения* старого знания в новой форме. Поскольку революции, о которых сейчас идет речь, вообще говоря, не связаны с дисквалификацией и потерей старого знания, такие революции не обязательно связаны с какими-то разрывами в процессе исторического развития науки. Хотя в реальной истории радикальные изменения оснований математики часто можно ассоциировать с определенными историческими периодами (вроде периода "кризиса оснований" в начале 20-го века), менее значительные изменения подобного характера могут происходить и действительно происходят в истории математики постоянно. Это, в частности, касается практики постоянной модернизации школьных и университетских математических учебников, при которой старое содержание пересказывается на новый лад. В этой связи описанное выше понятие о научной революции в математике я предлагаю называть *перманентной* революцией.

Модель развития науки основанная на понятии перманентной революции кажется мне привлекательной тем, что такая модель совмещает возможность непрерывного прогрессивного роста научного знания с возможностью радикального пересмотра оснований данной научной дисциплины. Если эта модель выдержит более систематическую эмпирическую проверку на материале истории математики, а также окажется применимой для моделирования развития других научных дисциплин, она может найти в будущем интересные применения в системах компьютерного представления знаний.

Литература:

[1] Gillies, D. (ed.), Revolutions in Mathematics, Clarendon Press: Oxford 1992