Галилеевская наука и конструктивная математика

Andrei Rodin

20 марта 2014 г.

Сокулер 2012-14

В физике Галилея граница между материальным и умозрительным преодолевается с помощью человеческого *действия* (а именно с помощью эксперимента).

Fraassen 1980

The real importance of theory, to the working scientist, is that it is a factor in experimental design.
(Реальное значение теории для работающего ученого состоит в том, что теория играет роль в дизайне экспериментов.)

Тезис 1

Математика играет ключевую роль в дизайне физических экспериментов (начиная с Галилея: ср. эксперимент с наклонной плоскостью)

Cassirer 1907

Die logischen und mathematischen Begriffe sollen nicht länger die Werkzeuge bilden, mit denen wir eine metaphysische “Gedankenwelt” aufbauen: sie haben ihre Funktion und ihre berechtigte Anwendung lediglich innerhalb der Erfahrungs Wissenschaft selbst.
(Логические и математические понятия не должны более служить инструментами для построения метафизических “мысленных миров”; их использование должно быть ограничено областью эмпирических наук.)

Тезис 2

В классической физике экспериментальные установки строятся как реализации (с точностью до доступной точности измерения) специально построенных математических конструкций. (Ср. создание механизмов по математическим чертежам, математическое проектирование архитектурных сооружений, и т. д.). Экспериментальные *действия* реализуют математические *действия*.

Тезис 3

Математические теории используемые в классической физике (и, в частности, в дизайне экспериментов классической физики) должны быть *конструктивными*, т. е. должны включать в себя систематические процедуры построения (конструирования) своих собственных объектов.
Геометрическая теория, которая используется в классической механике (расширенная Евклидова геометрия) удовлетворяет этому требованию (ср. Постулаты 1-3 “Начал”: “циркуль и линейка”)

Тезис 4

Теоретико-множественная математика 20го века НЕ является конструктивной в этом смысле.

Hilbert&Bernays 1934

Термин "аксиоматический" употребляется иногда и более широком, а иногда и в более узком смысле слова. При самом широком понимании этого термина построение какой-либо теории мы называем аксиоматическим, если основные понятия и основные гипотезы этой теории ставятся как таковые во главу угла, а дальнейшее ее содержание выводится из них с помощью определений и доказательств. Аксиоматически именно в этом смысле слова были построены геометрия Евклида, механика Ньютона, термодинамика Клаузиса.

Hilbert&Bernays 1934

Когда аксиоматика начинает пониматься в наиболее узком смысле слова, в качестве очередного обстоятельства добавляется еще *экзистенциональность его вида*. Этим *аксиоматический* способ построения какой-либо теории отличается от *конструктивного*, или *генетического* способа. [..] Аксиоматику в такой усиленной форме, возникающую в результате отвлечения от конкретного предметного содержания и сформулированную в экзистенциальном виде, мы кратко будем называть *формальной аксиоматикой*.

Зачем нужен экзистенциальный метод?

Чтобы наслаждаться "канторовским раем" (который не является конструктивным в привычном смысле слова) используя при этом ТОЛЬКО конструктивные (или даже только финитные) процедуры.
При таком подходе рассматриваются математические объекты двух строго различных типов:

- *реальные* конструктивные объекты = конечные цепочки символов, которые является объектами *мета*-математики
- *идеальные* (канторовские) объекты, которые являются объектами обычной (канторовской) математики.

Утверждение

Выбор состоит не в том, строить ли теории “аксиоматически” (в смысле Гильберта) или генетически (вслед за Евклидом, Ньютоном, и т.д.), а в том, следует ли вслед за Гильбертом *отделять* “экзистенциальную” (семантическую) и дедуктивную структуру теории от ее генетической структуры (и, в частности, различать теорию и мета-теорию). Я утверждаю, что вообще говоря НЕ следует (а значит, и не следует отделять мета-теорию от теории).

Математическая практика

Современные математические теории как ПРАВИЛО включают собственные мета-теории. Пример: теория групп. Основное содержание этой теории это теория (теоретико-множественных) моделей аксиом этой теории. В “чистой” теории групп нельзя даже определить, что такое подгруппа и доказать теорему Лагранжа! (хотя можно доказать единственность единицы и подобные простые вещи). В обычной математической практике эти два класса теорем (теоремы и метатеоремы) не различаются. Значит ли это, что математика не нуждается в логической строгости? Нет. Скорее это значит, что аксиоматический метод Гильберта не отвечает нуждам современной математики. Однако для этого метода пока нет общепринятой замены.

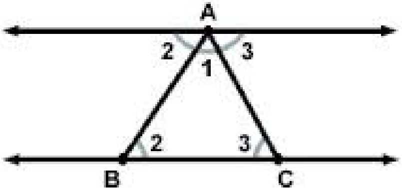
Проблема

Итак, мэйнстримная математика 20го века не является конструктивной и поэтому не годится для дизайна физических экспериментов по классическому образцу. Является ли этот классический образец по-прежнему релевантным физике 20го века? Вслед за ван-Фраасеном я отвечаю на этот вопрос положительно (оставляя в стороне аргументацию). Тогда проблема состоит в том, чтобы перестроить современную математику на новых конструктивных основаниях.

Кант о конструктивном математическом рассуждении

Дайте философу понятие треугольника и спросите его какое отношение имеет сумма внутренних углов треугольника к прямому углу. Как бы долго философ не размышлял над понятием треугольника, он никогда не сможет ответить на этот вопрос. Он сможет выделить в понятии треугольника понятия прямой линии, угла, числа три, но он никогда не сможет обнаружить ни одного нового свойства треугольника, которое не содержится в самом его понятии. Пусть теперь геометр попробует ответить на этот вопрос. Он начнет с того, что построит треугольник. .. Таким образом посредством цепи выводов, которые всегда направляются интуицией, геометр приходит к ясному и в то же время общему ответу на поставленный вопрос. (КЧР, A 716 / B 744, моя перефраза)

Треугольник



Возможно ли доказательство через (не чисто синтаксическое) построение в современной математике? ДА!

Simply typed lambda calculus (type system for $\times$, $\rightarrow$)

Variable: $\dfrac{}{\Gamma, x : T \vdash x : T}$

Product: $\dfrac{\Gamma \vdash t : T \quad \Gamma \vdash u : U}{\Gamma \vdash \langle t, u \rangle : T \times U}$

$\dfrac{\Gamma \vdash v : T \times U}{\Gamma \vdash \pi_1 v : T}$ $\dfrac{\Gamma \vdash v : T \times U}{\Gamma \vdash \pi_2 v : U}$

Function: $\dfrac{\Gamma, x : U \vdash t : T}{\Gamma \vdash \lambda x.t : U \rightarrow T}$

$\dfrac{\Gamma \vdash t : U \rightarrow T \quad \Gamma \vdash u : U}{\Gamma \vdash tu : T}$

Natural deduction (system for &, ⊃)

Identity: $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}$ (Id)

Conjunction: $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}$(& - intro)

$\dfrac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash A}$ (& - elim1); $\dfrac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash B}$ (& - elim2)

Implication: $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$ (⊃-intro)

$\dfrac{\Gamma \vdash A \supset B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$ (⊃-elim aka *modus ponens*)

Curry-Howard Isomorphism

$$\& \equiv \times$$

$$\supset \equiv \rightarrow$$

Изоморфизм Карри-Ховарда как мост между математикой и мета-математикой

Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK interpretation)

- доказательство предложения $A \supset B$ это процедура, которая преобразует доказательство A в доказательство B;
- доказательство $A \& B$ это пара, состоящая из доказательства A и доказательства B

Voevodsky 2011

The broad motivation behind univalent foundations is a desire to have a system in which mathematics can be formalized in a manner which is as natural as possible. Whilst it is possible to encode all of mathematics into Zermelo-Fraenkel set theory, the manner in which this is done is frequently ugly; worse, when one does so, there remain many statements of ZF which are mathematically meaningless. This problem becomes particularly pressing in attempting a computer formalization of mathematics; in the standard foundations, to write down in full even the most basic definitions - of isomorphism between sets, or of group structure on a set - requires many pages of symbols.

Voevodsky 2011

Univalent foundations seeks to improve on this situation by providing a system, based on Martin-Löf's dependent type theory whose syntax is tightly wedded to the intended semantical interpretation in the world of everyday mathematics. In particular, it allows the direct formalization of the world of homotopy types; indeed, these are the basic entities dealt with by the system.

Старый-Новый аксиоматический метод

Гомотопическая модель теории типов Мартина-Лефа интерпретирует (геометрически) логические символы наряду с нелогическими. Одни и те же операции интерпретируются и как логические (т.е. как операции над пропозициями), и как геометрические (как операции над геометрическими объектами). Пример: путь и тождество. Поэтому аксиоматический метод Воеводского больше похож на метод Евклида, чем на метод Гильберта.

Современная математика (в отличие от математики первой половины 20го века) есть средства, которые в перспективе могут позволить перестроить математику на конструктивных основаниях. Эта математика может быть использована в качестве языка новой физической теории галилеевского (т.е. классического) типа. Это позволяет надеяться на то, что разрыв между основаниями математики и основаниями физики, который возник в начале 20го века, будет преодолен в скором будущем. Таким образом галилеевская наука на сегодняшний день остается привлекательной в качестве эпистемологической модели.
DISCLAIMER: В этом докладе я привел только аргументы, относящиеся к математическому аспекту галилеевской науки. Чтобы полностью обосновать сделанный вывод, необходимо принять во внимание также и чисто физические аспекты вопроса.

THE END