

Генетический аксиоматический метод, изоморфизм Карри-Ховарда и Унивалентные основания математики

Andrei Rodin

14 марта 2013 г.

Hilbert and Smirnov on Genetic Method

Euclid: Problems and Theorems

Curry-Howard-Lambek

Martin-Löf's Constructive Type theory (MLTT)

(Higher) Homotopies

Homotopy Type theory

Univalent Foundations

Conclusions

Hilbert&Bernays 1934

Термин “аксиоматический” употребляется иногда и более широком, а иногда и в более узком смысле слова. При самом широком понимании этого термина построение какой-либо теории мы называем аксиоматическим, если основные понятия и основные гипотезы этой теории ставятся как таковые во главу угла, а дальнейшее ее содержание выводится из них с помощью определений и доказательств. Аксиоматически именно в этом смысле слова были построены геометрия Евклида, механика Ньютона, термодинамика Клаузиса.

Hilbert&Bernays 1934

Когда аксиоматика начинает пониматься в наиболее узком смысле слова, в качестве очередного обстоятельства добавляется еще *экзистенциональность его вида*. Этим аксиоматический способ построения какой-либо теории отличается от *конструктивного*, или *генетического* способа. [...] Аксиоматику в такой усиленной форме, возникающую в результате отвлечения от конкретного предметного содержания и сформулированную в экзистенциальном виде, мы кратко будем называть *формальной аксиоматикой*.

Hilbert&Bernays 1934

[о доказательстве непротиворечивости аксиоматической теории]

Ввиду того, что позитивный метод решения в этой ситуации оказывается невозможным, нам остается лишь один путь, путь негативных по своему характеру доказательств непротиворечивости, то есть путь *доказательств невозможности*, для чего оказывается необходимой формализация логического вывода. [...] Мы должны отчетливо осознать, что само такое доказательство уже не может быть осуществлено с помощью методов экзистенциально-аксиоматического вывода.

Hilbert&Bernays 1934

На основе этого обсуждения у нас немедленно возникает следующая идея. Если упомянутое доказательство невозможности [противоречия] мы сможем осуществить без эзистенциально- аксиоматических предположений, может быть тогда мы сможем подобным же образом непосредственно построить и весь анализ в целом, а тем самым сделать упоминавшееся доказательство невозможности вообще излишним?

(Hilbert's answer is in negative because of his worries about infinity.
A topic for future research.)

Smirnov 1962

[after discussing several possibilities to formalize genetic reasoning with axiomatic calculi]

Задача формализации генетической системы мышления может решаться и на другом пути. Не обязательно искать исчисление, адекватно представляющее рассматриваемую систему мышления в форме аксиоматического исчисления, т. е. исчисления, где правила вывода представляют умозаключения (переход от одного высказывания к другому), а доказуемые формулы - законы логики.

Smirnov 1962

Можно嘗試去找尋數學，它就是
直接地被形式化為遞歸技術
(演算法過程)。我們有數學在
形式上是遞歸函數、標準演算法
和圖靈計算的可計算函數，以及其他
修正。

Smirnov 1962

Но такой путь уточнения генетического метода построения научных теорий приводит нас к необходимости расширить область логического и сделать предметом изучения логики такие элементы, как действия, аналогично тому, как это имело место с отношениями), и такие формы мысли, как предписания и системы предписаний (алгоритмы). [...] В таком случае под логическим мы понимаем не только доказательство (обоснование одних высказываний посредством других), но и процесс сведения одних “стратегем действия” (К. Маркс) к другим.

Smirnov 1962

Ни одна теория не может быть развита без тех или иных действий, от данного к чему-то иному можно перейти только совершив определенное действие. Но в аксиоматической системе такими допустимыми действиями являются только логические умозаключения, т.е. действия над высказываниями; в генетической теории допускаются действия над объектами теории.

Anisov 1996

Анализируя способы построения научных теорий, В.А.Смирнов пришел к выводу, что мы имеем две фундаментальные системы мышления. На семантическом уровне первая представлена теоретико-множественным мышлением. Эта система мышления реализована в аксиоматическом методе построения теории. Вторая система основана на генетическом, конструктивном мышлении. Ей соответствует генетический метод построения научной теории.

My claim

(Формальный) аксиоматический и генетический метод построения теорий отвечают НЕ двум различным фундаментальным системам мышления, а двум взаимно-дополнительным аспектам одной и той же системы (которую является и аксиоматической, и генетической, как в примерах Гильберта (Евклид, Ньютон, Клаузис). Жесткое разграничение областей применения этих двух методов (теория и мета-теория), которое мы находим у Гильберта , является искусственным приемом эпистемологическая ценность которого сомнительна (в частности, но не только, в виду ограничительных теорем Гёделя).

My claim

Вопрос состоит не в том, строить ли теории “аксиоматически” (в смысле Гильберта) или генетически (вслед за Евклидом, Ньютоном, и т.д.), а в том, следует ли вслед за Гильбертом отделять “аксиоматическую” дедуктивную структуру теории от ее генетической структуры (и, в частности, различать теорию и мета-теорию). Я утверждаю, что вообще говоря НЕ следует (а значит, и не следует отделять мета-теорию от теории).

Motivating Example

Современные математические теории как ПРАВИЛО включают собственные мета-теории. Пример: теория групп. Основное содержание этой теории это теория (теоретико-множественных) моделей аксиом этой теории. В “чистой” теории групп нельзя даже определить, что такое подгруппа и доказать теорему Лагранжа! (хотя можно доказать единственность единицы и подобные простые вещи). В обычной математической практике эти два класса теорем (теоремы и метатеоремы) не различаются. Значит ли это, что математика не нуждается в логической строгости? Нет. Скорее это значит, что аксиоматический метод Гильберта не отвечает нуждам современной математики.

Structure of the argument

Structure of the argument

- ▶ общая структура проблем и теорем у Евклида

Structure of the argument

- ▶ общая структура проблем и теорем у Евклида
- ▶ изоморфизм моделей вычислений (языков программирования) и дедуктивных систем (Карри-Ховард)

Structure of the argument

- ▶ общая структура проблем и теорем у Евклида
- ▶ изоморфизм моделей вычислений (языков программирования) и дедуктивных систем (Карри-Ховард)
- ▶ общая категорная структура языков программирования и дедуктивных систем (декартово замкнутые категории)

Structure of the argument

- ▶ общая структура проблем и теорем у Евклида
- ▶ изоморфизм моделей вычислений (языков программирования) и дедуктивных систем (Карри-Ховард)
- ▶ общая категорная структура языков программирования и дедуктивных систем (декартово замкнутые категории)
- ▶ гипердоктрины и локально декартово замкнутые категории

Structure of the argument

- ▶ общая структура проблем и теорем у Евклида
- ▶ изоморфизм моделей вычислений (языков программирования) и дедуктивных систем (Карри-Ховард)
- ▶ общая категорная структура языков программирования и дедуктивных систем (декартово замкнутые категории)
- ▶ гипердоктрины и локально декартово замкнутые категории
- ▶ конструктивная теория типов М.-Л. как внутренний язык локально декартово замкнутой категории

Structure of the argument

- ▶ общая структура проблем и теорем у Евклида
- ▶ изоморфизм моделей вычислений (языков программирования) и дедуктивных систем (Карри-Ховард)
- ▶ общая категорная структура языков программирования и дедуктивных систем (декартово замкнутые категории)
- ▶ гипердоктрины и локально декартово замкнутые категории
- ▶ конструктивная теория типов М.-Л. как внутренний язык локально декартово замкнутой категории
- ▶ каноническая гомотопическая модель (интенсиональной) конструктивной теории типов (гомотопическая теория типов)

Structure of the argument

- ▶ общая структура проблем и теорем у Евклида
- ▶ изоморфизм моделей вычислений (языков программирования) и дедуктивных систем (Карри-Ховард)
- ▶ общая категорная структура языков программирования и дедуктивных систем (декартово замкнутые категории)
- ▶ гипердоктрины и локально декартово замкнутые категории
- ▶ конструктивная теория типов М.-Л. как внутренний язык локально декартово замкнутой категории
- ▶ каноническая гомотопическая модель (интенсиональной) конструктивной теории типов (гомотопическая теория типов)
- ▶ унивалентные основания Воеводского как современная

Hilbert and Smirnov on Genetic Method

Euclid: Problems and Theorems

Curry-Howard-Lambek

Martin-Löf's Constructive Type theory (MLTT)

(Higher) Homotopies

Homotopy Type theory

Univalent Foundations

Conclusions

3 Kinds of First Principles in Euclid's ELEMENTS::

3 Kinds of First Principles in Euclid's ELEMENTS::

- ▶ Definitions:

play the same role as *axioms* in the modern sense; ex. *radii of a circle are equal*

3 Kinds of First Principles in Euclid's ELEMENTS::

- ▶ Definitions:
play the same role as *axioms* in the modern sense; ex. *radii of a circle are equal*
- ▶ Axioms (Common Notions):
play the role similar to that of logical rules restricted to mathematics: cf. the use of the term by Aristotle

3 Kinds of First Principles in Euclid's ELEMENTS::

- ▶ Definitions:
play the same role as *axioms* in the modern sense; ex. *radii of a circle are equal*
- ▶ Axioms (Common Notions):
play the role similar to that of logical rules restricted to mathematics: cf. the use of the term by Aristotle
- ▶ Postulates:
non-logical constructive rules

Axioms (Common Notions)

- A1. Things equal to the same thing are also equal to one another.
- A2. And if equal things are added to equal things then the wholes are equal.
- A3. And if equal things are subtracted from equal things then the remainders are equal.
- A4. And things coinciding with one another are equal to one another.
- A5. And the whole [is] greater than the part.

Postulates 1-3:

P1: to draw a straight-line from any point to any point.

P2: to produce a finite straight-line continuously in a straight-line.

P3: to draw a circle with any center and radius.

Postulates 1-3 (continued):

Postulates 1-3 are NOT propositions! They are not first truths.
They are basic (non-logical?) *operations*. Cf. Smirnov on “logic in a wider sense”.
Existential and modal interpretations of Postulates are possible but not necessary. They provide biased representations of Euclid’s geometry.

Operational interpretation of Postulates

Postulates	input	output
P1	two points	straight segment
P2	straight segment	straight segment
P3	straight segment and its endpoint	circle

Theorem 1.5 of Euclid's ELEMENTS:

[*enunciation:*]

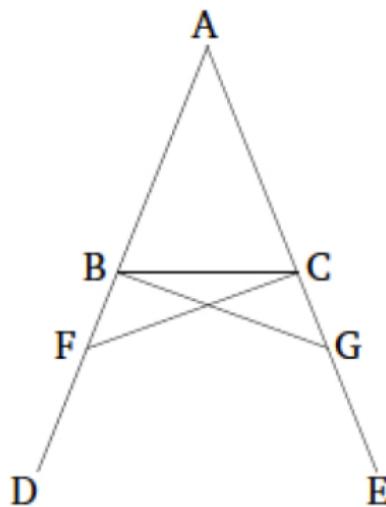
For isosceles triangles, the angles at the base are equal to one another, and if the equal straight lines are produced then the angles under the base will be equal to one another.

Theorem 1.5 (continued):

[*exposition*]:

Let ABC be an isosceles triangle having the side AB equal to the side AC ; and let the straight lines BD and CE have been produced further in a straight line with AB and AC (respectively). [Post. 2].

Theorem 1.5 (continued):



Theorem 1.5 (continued):

[*specification:*]

I say that the angle ABC is equal to ACB , and (angle) CBD to BCE .

Theorem 1.5 (continued):

[*specification*:]

I say that the angle ABC is equal to ACB , and (angle) CBD to BCE .

[*construction*:]

For let a point F be taken somewhere on BD , and let AG have been cut off from the greater AE , equal to the lesser AF [Prop. 1.3]. Also, let the straight lines FC , GB have been joined. [Post. 1]

Theorem 1.5 (continued):

[*proof*.]

In fact, since AF is equal to AG , and AB to AC , the two (straight lines) FA , AC are equal to the two (straight lines) GA , AB , respectively. They also encompass a common angle FAG . Thus, the base FC is equal to the base GB , and the triangle AFC will be equal to the triangle AGB , and the remaining angles subtended by the equal sides will be equal to the corresponding remaining angles [Prop. 1.4]. (That is) ACF to ABG , and AFC to AGB . And since the whole of AF is equal to the whole of AG , within which AB is equal to AC , the remainder BF is thus equal to the remainder CG [Ax.3]. But FC was also shown (to be) equal to GB .

Theorem 1.5 (continued):

[*proof* (continued):]

So the two (straight lines) BF , FC are equal to the two (straight lines) CG , GB respectively, and the angle BFC (is) equal to the angle CGB , while the base BC is common to them. Thus the triangle BFC will be equal to the triangle CGB , and the remaining angles subtended by the equal sides will be equal to the corresponding remaining angles [Prop. 1.4]. Thus FBC is equal to GCB , and BCF to CBG . Therefore, since the whole angle ABG was shown (to be) equal to the whole angle ACF , within which CBG is equal to BCF , the remainder ABC is thus equal to the remainder ACB [Ax. 3]. And they are at the base of triangle ABC . And FBC was also shown (to be) equal to GCB . And they are under the base.

Theorem 1.5 (continued):

[*conclusion:*]

Thus, for isosceles triangles, the angles at the base are equal to one another, and if the equal sides are produced then the angles under the base will be equal to one another. (Which is) the very thing it was required to show.

Problem 1.1 of Euclid's ELEMENTS:

[*enunciation:*]

To construct an equilateral triangle on a given finite straight-line.

Problem 1.1 (continued):

[*exposition:*]

Let AB be the given finite straight-line.

specification:

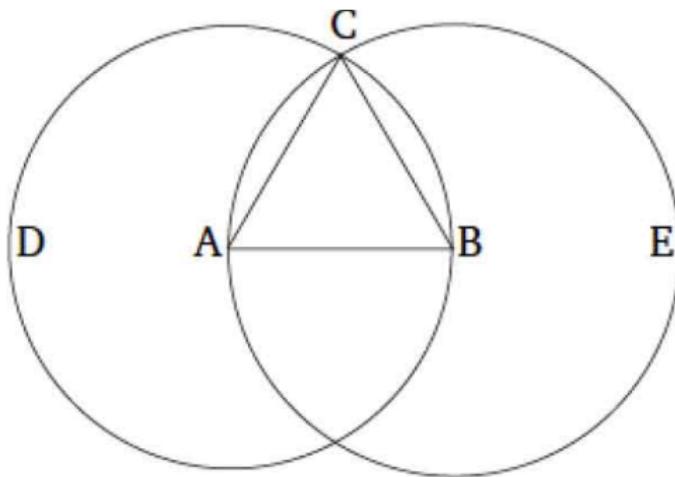
So it is required to construct an equilateral triangle on the straight-line AB .

Problem 1.1 (continued):

[construction:]

Let the circle BCD with center A and radius AB have been drawn [Post. 3], and again let the circle ACE with center B and radius BA have been drawn [Post. 3]. And let the straight-lines CA and CB have been joined from the point C , where the circles cut one another, to the points A and B [Post. 1].

Problem 1.1 (continued):



Problem 1.1 (continued):

[*proof.*]

And since the point A is the center of the circle CDB , AC is equal to AB [Def. 1.15]. Again, since the point B is the center of the circle CAE , BC is equal to BA [Def. 1.15]. But CA was also shown (to be) equal to AB . Thus, CA and CB are each equal to AB . But things equal to the same thing are also equal to one another [Axiom 1]. Thus, CA is also equal to CB . Thus, the three (straight-lines) CA , AB , and BC are equal to one another.

Problem 1.1 (continued):

[*conclusion:*]

Thus, the triangle ABC is equilateral, and has been constructed on the given finite straight-line AB . (Which is) the very thing it was required to do.

Conclusion on Euclid

Logical (propositional) deduction and geometrical *production* are intertwined. One does NOT work without the other. No production without deduction (contra the existential interpretation). No deduction without production.

Friedman on Kant on Euclid

Euclidean geometry [...] is not to be compared with Hilbert's axiomatization [of Euclidean geometry], say, but rather with Frege's *Begriffsschrift*. It is not a substantive doctrine, but a form of rational representation: a form of rational argument and inference. Accordingly, its propositions are established, not by quasi-perceptual acquaintance with some particular subject matter, but, as far as possible, by the most rigorous methods of proof - by the proof-procedures of Euclid, Book I, for example.

Hilbert and Smirnov on Genetic Method

Euclid: Problems and Theorems

Curry-Howard-Lambek

Martin-Löf's Constructive Type theory (MLTT)

(Higher) Homotopies

Homotopy Type theory

Univalent Foundations

Conclusions

Cyrry or Howard? (wiki)

Cyrry or Howard? (wiki)

- ▶ the observation in 1934 by Curry that the types of the combinators could be seen as axiom-schemes for intuitionistic implicational logic.

Cyrry or Howard? (wiki)

- ▶ the observation in 1934 by Curry that the types of the combinators could be seen as axiom-schemes for intuitionistic implicational logic.
- ▶ the observation in 1958 by Curry that Hilbert-style deduction systems, coincides on some fragment to the typed fragment of a standard model of computation known as combinatory logic,

Cyrry or Howard? (wiki)

- ▶ the observation in 1934 by Curry that the types of the combinators could be seen as axiom-schemes for intuitionistic implicational logic.
- ▶ the observation in 1958 by Curry that Hilbert-style deduction systems, coincides on some fragment to the typed fragment of a standard model of computation known as combinatory logic,
- ▶ the observation in 1969 (published later in 1980) by Howard that the natural deduction can be directly interpreted in its intuitionistic version as typed lambda calculus.

Historical remark

Foundational consideration played a crucial role in this story from the outset (Schönfinkel, Curry, Church, Kolmogorov, Lawvere, Lambek). The expression “Curry-Howard isomorphism”, which suggests that we have here an unexplained/surprising formal coincidence, is due to Howard 1969. The *true* history (and the true meaning) still waits to be explored.

Simply typed lambda calculus (type system for \times , \rightarrow)

Variable: $\overline{\Gamma, x : T \vdash x : T}$

Product:
$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \vdash t : T \quad \Gamma \vdash u : U \\ \hline \Gamma \vdash \langle t, u \rangle : T \times U \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash v : T \times U \quad \Gamma \vdash v : T \times U \\ \hline \Gamma \vdash \pi_1 v : T \qquad \Gamma \vdash \pi_2 v : U \end{array}}$$

Function:
$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, x : U \vdash t : T \\ \hline \Gamma \vdash \lambda x. t : U \rightarrow T \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash t : U \rightarrow T \quad \Gamma \vdash u : U \\ \hline \Gamma \vdash tu : T \end{array}}$$

Natural deduction (system for $\&$, \supset)

Identity: $\overline{\Gamma, A \vdash A}$ (Id)

Conjunction:
$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \text{ (& - intro)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \text{ (& - elim1)}; \quad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B} \text{ (& - elim2)}$$

Implication:
$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} \text{ (\supset-intro)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \supset B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{ (\supset-elim aka } modus\ ponens\text{)}$$

Curry-Howard Isomorphism

$\&$ \equiv \times

\supseteq \equiv \rightarrow

Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK interpretation)

- ▶ proof of $A \supset B$ is a procedure that transforms each proof of A into a proof of B ;
- ▶ proof of $A \& B$ is a pair consisting of a proof of A and a proof of B

Lawvere and Lambek 1969

The structure behind the Curry-Howard isomorphism is precisely captured by the notion of *Cartesian closed category* (CCC), which is an (abstract) category with the terminal object, products and exponentials.

Examples: Sets, Boolean algebras

Simply typed lambda-calculus / natural deduction is the *internal language* of CCC.

- ▶ Objects: types / propositions
- ▶ Morphisms: terms / proofs

Higher-order generalization: Hyperdoctrines (Lawvere)

- ▶ Quantifiers as adjoints to substitution; hyperdoctrines (1969)
- ▶ Toposes (1970)
- ▶ *Locally Cartesian closed categories* (LCCC) (1996)

Hilbert and Smirnov on Genetic Method

Euclid: Problems and Theorems

Curry-Howard-Lambek

Martin-Löf's Constructive Type theory (MLTT)

(Higher) Homotopies

Homotopy Type theory

Univalent Foundations

Conclusions

MLTT (Martin-Löf 1980): key features

MLTT (Martin-Löf 1980): key features

- ▶ double interpretation of types: “sets” and propositions

MLTT (Martin-Löf 1980): key features

- ▶ double interpretation of types: “sets” and propositions
- ▶ double interpretation of terms: elements of sets and proofs of propositions

MLTT (Martin-Löf 1980): key features

- ▶ double interpretation of types: “sets” and propositions
- ▶ double interpretation of terms: elements of sets and proofs of propositions
- ▶ higher orders: dependent types (sums and products of families of sets)

MLTT (Martin-Löf 1980): key features

- ▶ double interpretation of types: “sets” and propositions
- ▶ double interpretation of terms: elements of sets and proofs of propositions
- ▶ higher orders: dependent types (sums and products of families of sets)
- ▶ MLTT is the internal language of LCCC (Seely 1983)

Hilbert and Smirnov on Genetic Method
Euclid: Problems and Theorems
Curry-Howard-Lambek
Martin-Löf's Constructive Type theory (MLTT)
(Higher) Homotopies
Homotopy Type theory
Univalent Foundations
Conclusions

MLTT: two identities

MLTT: two identities

- ▶ Definitional identity of terms (of the same type) and of types:
 $x = y : A; A = B : \text{type}$ (substitutivity)

MLTT: two identities

- ▶ Definitional identity of terms (of the same type) and of types:
 $x = y : A; A = B : \text{type}$ (substitutivity)
- ▶ Propositional identity of terms x, y of (definitionally) the same type A :
 $Id_A(x, y) : \text{type}$;
Remark: propositional identity is a (dependent) type on its own.

MLTT: Higher Identity Types

- ▶ $x', y' : Id_A(x, y)$
- ▶ $Id_{Id_A}(x', y') : type$
- ▶ and so on

Fundamental group

Fundamental group G_T^0 of a topological space T :

- ▶ a base point P ;
- ▶ loops through P (loops are circular paths $I : I \rightarrow T$);
- ▶ composition of the loops (up to homotopy only! - see below);
- ▶ identification of homotopic loops;
- ▶ independence of the choice of the base point.

Fundamental (1-) groupoid

G_T^1 :

- ▶ all points of T (no arbitrary choice);
- ▶ paths between the points (embeddings $s : I \rightarrow T$);
- ▶ composition of the *consecutive* paths (up to homotopy only! - see below);
- ▶ identification of homotopic paths;

Since not all paths are consecutive G_T^1 contains more information about T than G_T^0 !

Path Homotopy and Higher Homotopies

$s : I \rightarrow T, p : I \rightarrow T$ where $I = [0, 1]$: paths in T

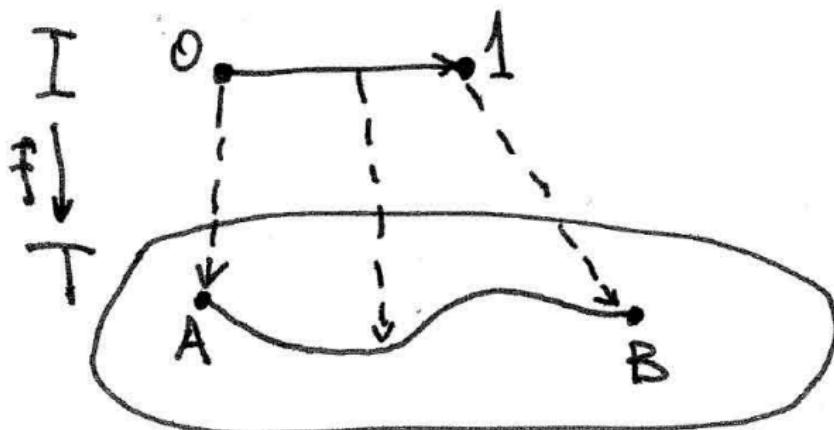
$h : I \times I \rightarrow T$: homotopy of paths s, t if $h(0 \times I) = s, h(1 \times I) = t$

$h^n : I \times I^{n-1} \rightarrow T$: n -homotopy of $n-1$ -homotopies h_0^{n-1}, h_1^{n-1} if

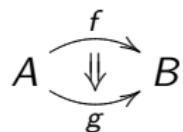
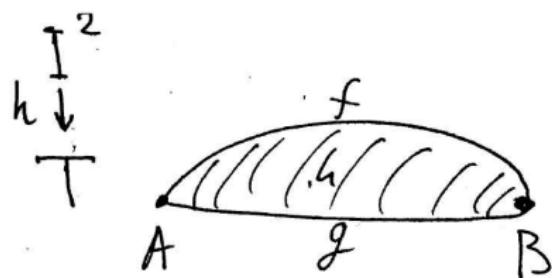
$h^n(0 \times I^{n-1}) = h_0^{n-1}, h^n(1 \times I^{n-1}) = h_1^{n-1}$;

Remark: Paths are zero-homotopies

Path Homotopy and Higher Homotopies



Homotopy categorically and Categories homotopically



Higher Groupoids and Omega-Groupoids (Grothendieck 1983)

- ▶ all points of T (no arbitrary choice);
- ▶ paths between the points ;
- ▶ homotopies of paths
- ▶ homotopies of homotopies (2-homotopies)
- ▶ higher homotopies up to n -homotopies
- ▶ higher homotopies ad infinitum

G_T^n contains more information about T than $G_T^{n-1}!$

Composition of Paths

Concatenation of paths produces a map of the form $2I \rightarrow T$ but not of the form $I \rightarrow T$, i.e., not a path. We have the whole space of paths $I \rightarrow 2I$ to play with! But all those paths are homotopical. Similarly for higher homotopies (but beware that n -homotopies are composed in n different ways!)

On each level when we say that $a \oplus b = c$ the sign $=$ hides an infinite-dimensional topological structure!

Grothendieck Conjecture:

G_T^ω contains all relevant information about T ; an omega-groupoid is a complete algebraic presentation of a topological space.

Homotopy Type theory

- ▶ Groupoid model of MLTT: basic types are groupoids, terms are their elements, dependent types are fibrations of groupoids (families of groupoids indexed by groupoids - rather than families of sets indexed by sets). Extensionality one dimension up. (Streicher 1993).
- ▶ Higher (homotopical) groupoids model higher identity types. Intensionality all way up (Voevodsky circa 2008).

Voevodsky 2011

The broad motivation behind univalent foundations is a desire to have a system in which mathematics can be formalized in a manner which is as natural as possible. Whilst it is possible to encode all of mathematics into Zermelo-Fraenkel set theory, the manner in which this is done is frequently ugly; worse, when one does so, there remain many statements of ZF which are mathematically meaningless. This problem becomes particularly pressing in attempting a computer formalization of mathematics; in the standard foundations, to write down in full even the most basic definitions - of isomorphism between sets, or of group structure on a set - requires many pages of symbols.

Voevodsky 2011

Univalent foundations seeks to improve on this situation by providing a system, based on Martin-Löf's dependent type theory whose syntax is tightly wedded to the intended semantical interpretation in the world of everyday mathematics. In particular, it allows the direct formalization of the world of homotopy types; indeed, these are the basic entities dealt with by the system.

New Axiomatic Method

Гомотопическая модель теории типов Мартина-Лефа интерпретирует (геометрически) логические символы наряду с нелогическими. Одни и те же операции интерпретируются и как логические (т.е. как операции над пропозициями), и как геометрические (как операции над геометрическими объектами). Пример: путь и тождество. Поэтому аксиоматический метод Воеводского больше похож на метод Евклида, чем на метод Гильберта.

h-levels

- ▶ (i) Given space is called *A contractible* (aka space of *h*-level 0) when there is point $x : A$ connected by a path with each point $y : A$ in such a way that all these paths are homotopic.
- ▶ (ii) We say that A is a space of *h*-level $n + 1$ if for all its points x, y path spaces $\text{paths}_A(x, y)$ are of *h*-level n .

Hilbert and Smirnov on Genetic Method
Euclid: Problems and Theorems
Curry-Howard-Lambek
Martin-Löf's Constructive Type theory (MLTT)
(Higher) Homotopies
Homotopy Type theory
Univalent Foundations
Conclusions

h-universe

h-universe

- ▶ Level 0: up to homotopy equivalence there is just one contractible space that we call “point” and denote *pt*;

h-universe

- ▶ Level 0: up to homotopy equivalence there is just one contractible space that we call “point” and denote *pt*;
- ▶ Level 1: up to homotopy equivalence there are two spaces here: the empty space \emptyset and the point *pt*. (For \emptyset condition (ii) is satisfied vacuously; for *pt* (ii) is satisfied because in *pt* there exists only one path, which consists of this very point.) We call \emptyset, pt *truth values*; we also refer to types of this level as *properties* and *propositions*. Notice that *h*-level *n* corresponds to the logical level *n* – 1: the propositional logic (i.e., the propositional segment of our type theory) lives at *h*-level 1.

Hilbert and Smirnov on Genetic Method
Euclid: Problems and Theorems
Curry-Howard-Lambek
Martin-Löf's Constructive Type theory (MLTT)
(Higher) Homotopies
Homotopy Type theory
Univalent Foundations
Conclusions

h-universe

h -universe

- ▶ Level 2: Types of this level are characterized by the following property: their path spaces are either empty or contractible. So such types are disjoint unions of contractible components (points), or in other words *sets* of points. This will be our working notion of set available in this framework.

h -universe

- ▶ Level 2: Types of this level are characterized by the following property: their path spaces are either empty or contractible. So such types are disjoint unions of contractible components (points), or in other words *sets* of points. This will be our working notion of set available in this framework.
- ▶ Level 3: Types of this level are characterized by the following property: their path spaces are sets (up to homotopy equivalence). These are obviously (ordinary flat) *groupoids* (with path spaces hom-sets).

h -universe

- ▶ Level 2: Types of this level are characterized by the following property: their path spaces are either empty or contractible. So such types are disjoint unions of contractible components (points), or in other words *sets* of points. This will be our working notion of set available in this framework.
- ▶ Level 3: Types of this level are characterized by the following property: their path spaces are sets (up to homotopy equivalence). These are obviously (ordinary flat) *groupoids* (with path spaces hom-sets).
- ▶ Level 4: 2-groupoids

h-universe

- ▶ ..
- ▶ Level $n+2$: n -groupoids
- ▶ ..
- ▶ ω -groupoids
- ▶ ω -groupoids ($\omega + 1 = \omega$)

How it works

Let $\text{iscontr}(A)$ and $\text{isaprop}(A)$ be formally constructed types “ A is contractible” and “ A is a proposition” (for formal definitions see Voevodsky:2011, p. 8). Then one formally deduces (= further constructs according to the same general rules) types $\text{isaprop}(\text{iscontr}(A))$ and $\text{isaprop}(\text{isaprop}(A))$, which are non-empty and thus “hold true” for each type A ; informally these latter types tell us that for all A “ A is contractible” is a proposition and “ A is a proposition” is again a proposition.

How it works

With the same technique one defines in this setting type $\text{weq}(A, B)$ of *weak equivalences* (i.e., homotopy equivalences) of given types A, B (as a type of maps $e : A \rightarrow B$ of appropriate sort) and formally proves its expected properties. These formal proves involve a *different* type $\text{isweq}(A, B)$ of h -level 2, which is a proposition saying that A, B are homotopy equivalent, i.e., that type $\text{weq}(A, B)$ is inhabited.)

Axiom of Univalence

Homotopically equivalent types are (propositionally) identical. This means that the universe *TYPE* of homotopy types is construed like a homotopy type (and also modeled by ω -groupoid).

Axiom of Univalence is the only axiom of Univalent Foundations on the top of MLTT.

Conclusion1

Формальный аксиоматический метод предложенный Гильбертом может быть использован в качестве особого приема “математической рефлексии”, но не в качестве универсального метода построения математических (и других) теорий. Проблема состоит в том, что этот метод неадекватно учитывает конструктивный аспект математики (и естественных наук), исходя из неверной предпосылки, согласно которой этот конструктивный аспект можно ограничить пределами “метаматематики”. Формальные “экзистенциальные” аксиоматические теории неадекватно представляют “наивные” математические теории.

Conclusion2

Жесткое разделение разделение дедуктивных и генетических структур в духе Гильберта не является необходимым и не дает очевидных эпистемических преимуществ. Объединение этих структур в духе Евклида возможно в контексте современной математики (Мартин-Лчф, Воеводский) и позволяет эффективно применять современные логические методы (включая компьютерные методы) в самых разных областях математики. (Соq был создан для решения проблемы четырех красок!)

Open problem

Есть основания предполагать, что новый аксиоматический подход позволит также более эффективно и более широко использовать современные логические методы в физике и других естественных науках.

Hilbert and Smirnov on Genetic Method
Euclid: Problems and Theorems
Curry-Howard-Lambek
Martin-Löf's Constructive Type theory (MLTT)
(Higher) Homotopies
Homotopy Type theory
Univalent Foundations
Conclusions

THE END