Andrei Rodin

Pour la science irréversible

1.) Introduction

Y a t'il des processus irréversibles dans la Nature? L'expérience habituelle dit que c'est certainement le cas: on peut citer par exemple la vaisselle cassée, le bois brûlé et des choses plus importantes telles que notre propre naissance, la vie et la mort. Par contre, la physique nous dit qu'au niveau fondamental tous les processus sont réversibles et nous explique d'où vient l'irréversibilité apparente. Cette coupure entre l'expérience pré-scientifique de l'irréversibilité et la réversible image du monde suggérée par la physique n'est pas récente. Toutes les anciennes théories du type mécanique qui essayaient d'expliquer des processus physiques par les mouvements des particules solides ou d'une matière continue (comme chez Descartes) ont la même conséquence de réversibilité fondamentale: quel que soit le mécanisme on peut toujours imaginer que par un renversement de tous les mouvements le mécanisme est rendu de son état final à son état initial. Ce fait ne dépend que des idéalisations de base liées à l'idée de mécanisme, et surtout des notions d'espace et mouvement dans un espace. Notez que la supposition de réversibilité des mouvements reste la même dans les cas des conceptions d'espaces métaphysiques et mathématiques très différentes, telles que l'espace absolu newtonien, l'espace relationnel leibnizien ou cartésien, l'espace géométrique euclidien ou riemannien.

Dans le cadre spatio-temporelle de la physique d'aujourd'hui, notamment de la relativité restreinte ou générale, la situation est similaire même si la notion de mouvement mécanique ne joue plus dans le nouveau cadre aucun rôle fondamental et devient une notion dérivée. Ce qu'on identifie ici avec le mouvement d'une particule c'est une courbe dans l'espace-temps dite une "ligne d'univers". Chaque point de telle ligne représente un événement qui est un état instantané d'une particule dans son temps propre. Localement il y a toujours exactement deux ordres linéaires des points sur une ligne d'univers qu'on interprète dans la physique comme deux ordres causals des événements, c'est à dire, comme deux processus qui sont inverses relativement un à l'autre. Ce schéma fonctionne de la même manière si l'espace-temps n'est pas vide mais contient certains champs d'interaction. La structure globale des événements peut être différente si une ligne d'univers contient des boucles. Ce dernier cas est problématique en ce qui concerne la causalité, mais moins problématique en ce que concerne la réversibilité: étant donné une ligne d'univers on peut distinguer deux processus réciproques sans parler de causalité par l'orientation géométrique de cette ligne (qui est toujours orientable). Ca marche avec des boucles aussi bien que sans boucle. (Dans le cas de boucles il est possible d'identifier plus que 2 processus associés à la même ligne ; néanmoins chaque processus a un seul processus inverse comme d'habitude.)

La seule manière de penser des processus irréversibles dans le cadre de la physique mathématique existante (soit on prend comme la théorie de base la mécanique newtonienne, soit la relativité einsteinienne) c'est commencer par une schéma réversible, et après introduire un principe supplémentaire selon lequel certains processus vont toujours dans un sens mais pas dans l'autre. Comme les exemples de tels principes on peut mentionner le Second Principe de la thermodynamique ou le principe selon lequel des ondes qui propagent d'une source ponctuelle ne reviennent jamais.

Du point de vue logique, cette manière de penser l'irréversibilité dans la physique est étrange. Que les processus irréversibles existent au niveau fondamental de la physique ou non, la réversibilité d'un processus est indéniablement une propriété aussi forte, alors que l'irréversibilité n'est rien d'autre que l'absence de la réversibilité. Pourquoi donc commencer la construction de la notion de processus par un cas très spécial et essayer obtenir le cas général ensuite ? Ce n'est pas seulement l'élégance conceptuelle qui est mise en question, mais la possibilité de traiter un cas général à partir d'un cas particulier. Si on adopte un principe selon lequel certains processus sont irréversibles, mais tout en continuant à utiliser un schéma spatio-temporel dans lequel chaque processus est réversible par défaut, on arrive, bien attendu, à une incohérence entre ce principe et ce schéma de base. Dans le cas de la théorie cinétique de gaz qui utilise les principes de la mécanique newtonienne, aussi bien que le Second Principe de la thermodynamique, cette incohérence est bien connue depuis le 19 siècle sous le nom de "paradoxe de Loschmidt" (après Loschmidt 1887). Je vais utiliser le nom de Loschmidt pour signifier le problème plus général que j'ai évoqué jusqu'à maintenant.

Pour voir en quoi consiste ce « paradoxe » considérez le cas de "chaos déterministe" qui peut être réalisé dans un système de trois particules massives soumises aux lois de la mécanique newtonienne. Tel modèle est parfaitement déterministe et réversible en théorie mais pas en pratique pour la simple raison que toutes les mesures physiques restent toujours approximatives. Le système en question est sensible aux changements des conditions initiales au sens fort: les changements arbitrairement petits des conditions produisent les changements majeurs du comportement du système. (Notez que cette sensibilité est une propriété mathématique du modèle mais pas quelque chose qu'on observe comme imprévu.) Pour cette raison, en pratique, on ne peut pas ni prédire, ni retraduire les coordonnées des particules de la manière exacte; ce qui signifie que l'évolution du système est pratiquement irréversible même si elle est réversible en théorie. Si on considère qu' "en théorie" est la même chose qu' "en réalité", on est obligé de dire que l'irréversibilité de ce modèle n'est qu'apparente, et d'expliquer cette apparente irréversibilité par des limitations de la connaissance humaine. Donc, au détriment du paradoxe, la théorie nous oblige à considérer tous les processus dans ce modèle comme réversible. Ceci permet de parler de "chaos déterministe" sans aucune contradiction formelle ; on peut bien dire alors qu'il n'y a pas ni paradoxe, ni vraie irréversibilité dans ce cas.

J'ai pris cet exemple, qui est apparemment avantageux pour montrer que l'irréversibilité dans la physique est superflue, à la manière exprès. Il y a plus de raisons physiques de prendre au sérieux le Second Principe de la thermodynamique que l'apparente irréversibilité des modèles du chaos déterministe. Néanmoins, même dans le cas du chaos déterministe, il est légitime de dire que la question de l'irréversibilité n'est pas vraiment bien réglée. Notez que la réversibilité fondamentale postulée pour ce modèle est non observable en principe. C'est une hypothèse qu'on ne peut pas ni confirmer, ni réfuter par une expérience directe. C'est vrai qu'on peut bien confirmer l’hypothèse de réversibilité dans un modèle newtonien d’un système stable. Mais ceci ne donne pas encore le droit de suggérer que telle réversibilité est cachée quelque part dans un système chaotique. C’est notre modèle mathématique de ce système qui nous oblige à voir l’irréversibilité observable comme « épistémique » et l’expliquer en termes de la réversibilité inobservable. On peut bien suggérer que l'identification habituelle des particules physiques avec les points géométrique (avec une masse et l'autre propriétés supplémentaires) dans la situation donnée n'est plus satisfaisante (même si elle marche bien en cas des systèmes stables), et chercher des meilleurs moyens mathématiques pour mieux modéliser ce qu'on observe vraiment.

Même si cet exemple ne concerne pas des théories physiques telles que la Relativité générale et la Mécanique Quantique, qui sont normalement vues aujourd’hui comme fondamentales, il montre bien la situation générale. Jusqu'ici, on n'a pas les moyens mathématique pour modéliser les processus irréversibles dans la physique sans passer par les processus réversibles, l’hypothèse selon laquelle les processus irréversibles n'existent pas dans la Nature au niveau fondamental reste une supposition a priori plutôt qu'une constatation empirique. En plus, sans une bonne théorie mathématique de processus irréversibles on n'a pas même de notion claire de réversibilité. Pour cette raison il me semble important de trouver un schéma conceptuel et mathématique dans lequel on pourrait parler de processus en général, c'est-à-dire parler de processus irréversibles, en langage mathématique, et après bien définir la notion de processus réversible comme un cas particulier. Si on découvrira après que les processus irréversibles n'existent pas dans la Nature, tant pis (ce serait un fait empirique à expliquer), mais ce schéma est nécessaire de toutes façons. Dans cet article je vais présenter une ébauche d’un tel schéma. On verra que le problème de modélisation mathématique de l’irréversibilité n'est pas seulement technique, parce que l'hypothèse de la réversibilité fondamentale en physique a un support épistémologique et métaphysique très fort. C’est pour cette raison que l’irréversibilité est très facile à penser dans la vie mais aussi difficile dans la science. Donc, dans la deuxième partie de mon plan je vais montrer comment il faut changer la traditionnelle idée de science pour permettre à la science de rendre compte des processus irréversibles (s'il y en a). On verra que ceci touche la question de développement historique de la science elle-même. Notez que quand je parle d’irréversibilité dans cet article, je parle toujours de l’irréversibilité de certains processus et évite la question de l’irréversibilité du temps. Je suppose qu'on peux bien parler de changements et processus sans parler du temps (mais pas vice versa), et que pour aborder la question de l’irréversibilité il faut bien commencer par des processus et pas par le temps. Ca ne veut pas de dire qu’à mon avis la question de temps est moins importante mais ça signifie que je la laisse pour une autre étude.

2. Problème de Loschmidt en mathématiques

Prenons une simple opération arithmétique: 7+5=12. Pour montrer qu'on parle ici notamment d’opération mais pas d'égalité dans un autre sens je changerai la notation en remplaçant le signe d’égalité par une flèche: 7+5-->12. Est-ce que cette opération est réversible ou non? La réponse dépend de ce qu'on compte ici comme opération et du genre de réversibilité qu'on cherche. Si on parle d'opération binaire (+) qui transforme deux nombres donnés en nouveau nombre, cette opération est irréversible dans ce sens-ci : si on sait que le nombre 12 est obtenu comme une somme de deux nombres, on ne peut pas donner une réponse à la question quels sont ces deux nombres (car 12=7+5=8+4=...). Par contre, si on voit (+5) comme une opération unaire qui transforme 7 en 12 cette opération est bien réversible : l'opération inverse est (-5). Devant ces particularités mathématiques il y a encore un autre sens dans lequel opérations (+) et (+5) (aussi bien que toutes les autre opérations arithmétiques) sont réversibles: opération 7+5-->12 toujours peut être défaite en divisant 12 en ces deux parties inégales, notamment en 7 et 5 ! Je veux dire, qu'entre les plusieurs manières de couper 12 en deux parties il existe une qui est inverse à sommation 7+5-->12, notamment 12-->(7, 5). Si on peut la toujours trouver ou non, c'est une autre question. De toutes façons, quand on ajoute 5 à 7 et obtient 12 les sommants ne sont pas perdus pour toujours, et on peut les révoquer quand on veut.

On peut protester en disant que c'est absurde d'interpréter opération 7+5-->12 comme une procédure qui produit 12 et détruit 7 et 5 aussi bien qu'interpréter la coupure de 12 en 7 et 5 comme une procédure qui tue 12 et restaure 7 et 5. C'est vrai que telle interprétation parait absurde si on la prend de la manière littérale. Mais comment il faut comprendre les opérations avec des nombres ? Si les nombres sont éternels et inchangeables comment peut-on opérer avec eux et obtenir un "nouveau" nombre à partir de deux nombres donnés ? Une réponse possible revient à dire que le mot "opération" n'est qu'une métaphore dans ce contexte ; pour éviter des métaphores il faut plutôt parler des *relations* entre les nombres et écrire +(7, 5, 12) au lieu de 7+5-->12. Je rapporte la discussion de cette objection jusqu'à partie 5 de cet article. En tous cas telle réduction de la notion d'opération n'est pas habituelle. L'écriture habituelle 7+5=12 indique une solution compromise, qui permet de lire cette formule dans les deux sens et dire, qu'à droite et à gauche du signe d'égalité on a la "même chose", qui change de la manière réversible.

On voit qu'en mathématiques on peut parler de réversibilité et irréversibilité dans plusieurs sens spéciaux, et au même temps on y trouve sa propre "réversibilité fondamentale" comme en physique. Malgré le fait que les deux aspects du problème soient bien séparés et qu'il y ait peu de risque de les confondre, je veux poser une question naïve: comment l'irréversibilité mathématique est possible, si en dernière analyse "tout" en mathématiques est réversible ou même éternel? C'est une version mathématique du problème de Loschmidt. Maintenant je vais présenter une version plus spéciale de ce problème en mathématiques ensemblistes.

3. Irréversibilité et réversibilité ensembliste

Prenons maintenant quelques exemples géométriques, qui nous rapprochent plus de la physique. Depuis Klein et son « Programme Erlangen » (Klein 1872) on sait qu'un espace géométrique est caractérisé d'une manière importante par son *groupe* des transformations (groupe des mouvements, des transformations affines, etc.). Notez que toutes les transformations en question sont réversibles: c'est la raison pour laquelle ces transformations forment des groupes par composition (je rappelle que dans un groupe chaque élément a son élément inverse). Notez encore que pour pouvoir composer toutes les transformations il faut qu'elles transforment le même objet tel que l'espace tout entier. Par contre, il y a plein de transformations géométriques irréversibles, par exemple, la contraction continue d'un cercle (ou d'un autre espace topologique) en seul point. Pour montrer la continuité de cette transformation il faut munir le point d'une structure topologique. La façon canonique de le faire est la suivante: on représente un point comme un singleton (un ensemble dont le seul élément est ce point), et postule que tous les deux sous-ensembles de cet ensemble sont ouverts. Il y a une unique contraction continue de chaque espace topologique en un point. Quand les espaces géométriques sont construits à la Bourbaki comme des ensembles des points munis de structures (topologiques, affines, etc.), les transformations de tels espaces sont construites comme les applications de ses ensembles sous-jacents, qui, comme on dit, "préservent" la structure. Les applications des ensembles sont spécifiées comme d'habitude "point par point". En ce cas la réversibilité d'une transformation est définie de la manière évidente: on dit que la transformation donnée est réversible (ou autrement - est un isomorphisme) ssi elle donne une correspondance biunivoque entre les éléments (points) des ensembles sous-jacents. Le même schéma est utilisé pour tout objet mathématique construit comme un "ensemble avec une structure" : groupes, modules, etc. Dans ce schéma un isomorphisme, i.e. une transformation réversible, est un cas spécial de transformation du type général, i.e. une transformation irréversible. L'expression "préservation de structure" est en fait trompeuse, parce qu'elle fait penser à un isomorphisme même en cas général. Quand un cercle se transforme en autre cercle de la manière continue, sa forme ou "structure" est bien préservée ; c'est pourquoi on appelle une telle transformation "isomorphisme". Mais quand un cercle se contracte en point, la "forme" ou "structure" est détruite. Cette dernière transformation n'est pas réversible mais néanmoins elle est aussi continue. On ne l'appelle pas "isomorphisme" mais on dit quand même qu'elle préserve la structure topologique. Ce qui est ambiguë ici, c'est le terme "structure". Tous les cercles partagent la même structure topologique, qui est préservée par les transformations réversibles entre les cercles. Par contre, un cercle et un point ne partagent que le même *type* de structure, notamment le type de structure dite structure topologique, mais les structures topologiques en ces deux cas sont bien différentes. La transformation continue d'un cercle en point transforme une structure topologique en une autre structure topologique. Notez qu'un type de structure n'est pas une structure plus générale, parce que chaque structure est définie à isomorphisme près, tant que les structures du même type se transforment dans une autre, en général, par les transformations irréversibles. On verra qu'un type de structure peut être identifié avec la *catégorie* des structures de ce type. La théorie des catégories permet de décrire cette situation sans utiliser la notion de structure (Rodin 2007), mais si on reste dans le cadre structuraliste, c'est mieux, à mon avis, de parler dans le cas général de "respect" de structure et réserver le terme "préservation" pour le cas d'un isomorphisme.

La description structuraliste des transformations irréversibles est claire et efficace. Néanmoins elle me semble insatisfaisante pour la raison suivante. Notez que transformation d'un point A en un autre point B est toujours réversible. Tant qu'on définit les transformations comme applications ensemblistes de certain type, et tant qu'on définit les applications ensemblistes point par point, on arrive à la version ensembliste du problème de Loschmidt : les transformation irréversibles sont définies par les transformations réversibles. Le problème est réglé par l'astuce suivante. On pense de points de deux manières différentes (comme je faisais plus haut) : comme les éléments des ensembles et comme les singletons. Quand on parle de transformations des points singuliers, on pense les points comme singletons, et quand on définit les transformations des ensembles des points en autres ensembles des points, on pense les points comme éléments de ces ensembles. Donc, les applications des ensembles de points (et en particulier les applications des singletons ponctuels) ne sont pas considérées sur le même plan avec les correspondances entre les éléments de ces ensembles, i.e. entre les points.

Voyons où exactement se cache le problème de Loschmidt dans les mathématiques ensemblistes. Pour déterminer l'application f: M-->N de l'ensemble M à l'ensemble N , il faut préciser pour chaque point (élément) A de M un certain point B de N tel que $f(A)=B$. Ceci permet d'identifier f avec l'ensemble $\{(A, B) \mid A \varepsilon M, B \varepsilon N\}$ des paires *ordonnées*, qui vérifie la condition qu'on appelle la condition de fonctionnalité. (On voit bien que l'ordre est essentiel, donc "correspondance" est encore un mot trompeur.) Dans les théories des ensembles du type de ZF la notion de paire ordonnée est construite à la base de la notion de paire simple (non ordonnée), i.e. l'ensemble de deux éléments donnés: par définition $(A, B) = \{A, \{A, B\}\}$ (Fraenkel et al. 1973). L'existence de $\{A, B\}$ et de $\{A, \{A, B\}\}$ est garantit par l'Axiome de Paire selon lequel étant donné A, B on a aussi la paire $\{A, B\}$. Mais l'Axiome de Paire garantit également l'existence de $(B, A) = \{B, \{A,B\}\}$. Donc, étant donné $f=\{(A, B) \mid A \varepsilon M, B \varepsilon N\}$ on peut toujours construire $f'=\{(B, A) \mid A \varepsilon M, B \varepsilon N\}$ par renversement de chaque paire (A, B). En général, f' ne vérifie pas la condition de fonctionnalité, donc f n'est pas, en général, réversible. Par contre, chaque application est définie en termes des paires ordonnées des points, et toute paire ainsi est bien réversible. Donc, l'irréversibilité ensembliste est définie sur une base réversible.

4. Irréversibilité et réversibilité catégorique

L'Axiome de Paire selon lequel dès qu'on a deux choses on a aussi l'ensemble de ces choses, semble être "vrai" et apparemment il ne pose pas aucun problème. Néanmoins cet axiome n'est pas bien justifié du point de vue physique. Si on prend deux étoiles éloignées telles que toutes les interactions entre elles soient négligeables, la paire des cette étoiles représente aucun système physique, qu'on puisse considérer en abstraction d'un système plus large. On peut protester en disant qu'il ne faut pas chercher un sens physique dans les abstractions mathématiques de base telles que la notion d'ensemble. Je ne suis pas d'accord. Même si la théorie des ensembles est une théorie aussi abstraite, elle utilise certaines intuitions habituelles telles que l'intuition selon laquelle étant donné deux objets quelconques on peut toujours les considérer "ensemble". Telles intuitions peuvent devenir trompeuses quand on dépasse le domaine de l'expérience habituelle et pense à des objets tels que les étoiles ou les électrons. Si on utilise la théorie des ensembles comme la base de toutes les mathématiques qu'on veut utiliser en science, il peut bien arriver que les mathématiques soient inadéquates pour ce but. Donc, c'est tout a fait raisonnable de suivre certaines pistes physiques même dans les fondements des mathématiques. Au lieu de prendre comme le concept mathématique de base celui d'ensemble, on peut prendre le concept de *morphisme* qu'on comprend comme une action élémentaire d'un objet sur un autre ou comme une transformation d'un objet en autre. Je ne parle pas d'*inter*action parce que en cas général on n'a pas de raison pour postuler la troisième loi de Newton, selon laquelle chaque action a une réaction égale. Quand je vois une étoile, cette étoile agit sur mon cerveau mais mon cerveau n'agit pas sur l'étoile. On peut également penser cette action comme une transformation de l'étoile en sa représentation dans mon esprit. De toutes façons il n'y pas aucune raison de supposer que tous les morphismes sont réversibles.

Il y a aussi une forte motivation mathématique pour considérer la notion de morphisme ou transformation comme primitive, plutôt que la construire à partir de la notion d'ensemble. On remarque que les applications des ensembles "nus", aussi bien que les transformations des ensembles structures de chaque type, partagent le même schéma dit "catégorie", qui est un schéma des transformations (morphismes) de forme générale, donc, irréversibles. D'ou l'idée de construire les objets mathématiques à partir des notions de catégorie et de morphisme, plutôt qu'à partir de la notion d'ensemble. Dans le cas des ensembles il s'agit d'une théorie des ensembles développés à partir de la notion d'application des ensembles plutôt qu'à partir de la relation d'appartenance entre des ensembles comme en théorie du type de ZF. Clairement, si on ne regarde que les applications réversibles, i.e. que les isomorphismes, ce problème est insoluble. Par contre, quand on prend en compte les applications du type général, donc, irréversibles, le problème a une solution élégante (Lawvere 1964).

Revenons au Programme Erlangen de Klein. Comme je l'ai déjà fait remarquer, dans ce cadre on ne regarde que les transformations réversibles d'un espace ou d'un objet dans un espace en lui-même. En cas de variétés riemanniennes de la forme générale on ne peut pas appliquer cette approche de manière aussi simple qu'en cas euclidien, parce qu'il faut bien distinguer les transformations locales et globales. Notez aussi que l'idée de transformation d'espace tout entier ne correspond à aucune expérience physique possible. Ce qu'on peut réaliser en expérience c'est des transformations locales entres certains objets. Il y a encore certaines autres raisons pour considérer la première généralisation importante du Programme Erlangen: laisser tomber l'hypothèse selon laquelle toutes les transformation géométriques en question se composent entre elles. Du côté algébrique ceci donne la notion de groupoïde : c'est la même chose qu'un groupe sauf que l'opération (de composition des transformations) est que partielle. Un groupoïde contient plusieurs objets qui se transforment par une loi de composition interne. Tant que toutes ces transformations sont réversibles les objets sont isomorphes. Si on identifie les objets à isomorphisme près, le groupoïde se réduit à un groupe.

Notez que malgré ses différences, la vision kleinienne et la vision riemannienne d'espace géométrique partage un point commun: la différence entre un espace et un objet dans un espace est relativisée dans les deux cas. Etant donné un espace A et un espace B on dit que B est un "objet dans un espace A" si le groupe de B est un sous-groupe de groupe de A (en cas kleinien) ou si B se plonge dans A (en cas riemannien). Cette relativité permet parler de transformations d'espaces (plutôt que de transformations d'objets) en tous cas mais il faut bien comprendre que telles transformations ne sont pas nécessairement globales. Je crois que l'ancienne idée d'espace est comme une vaisselle universelle est encore trop influente dans la pensée physique, et qu'il faut la définitivement dépasser en physique après les mathématiques.

La deuxième généralisation Programme Erlangen permet d'aller encore plus loin et effectivement reconstruire plusieurs notions d'espace différentes en termes de ces transformations (ce qu'on n'arrive pas à faire dans le cadre kleinien classique). Il s'agit de prendre en compte les transformations irréversibles. Du côté algébrique on arrive à la notion de catégorie que je vais définir ensuite ; après on peut poser une question, quel type de catégories on pourrait appeler les catégories des espaces. Lorsqu'on pense d'espace-temps physique comme une catégorie des espaces (plutôt qu'un seul espace géométrique comme d'habitude), le problème de Loschmidt ne se pose plus en sa forme ordinaire parce que la notion de transformation irréversible (morphisme) devient la base de notre théorie, tandis que la notion de transformation réversible est bien définie par ces propriétés "transformatives". Voilà les définitions précises.

Une catégorie contient une classe d'objets; pour chaque paire ordonnée (A, B) des objets de cette classe il y a une classe de morphismes de forme $f{:}A\text{-->}B$. On appelle A le domaine ou la source, et on appelle B le codomaine ou le but de morphisme f. Etant donné des morphismes $f{:}A\text{-->}B$ et $g{:}B\text{-->}C$ il existe un morphisme composé $fg=h{:}A\text{-->}C$. Notez que la composition des morphismes est partielle: les morphismes f et g se composent (dans l'ordre approprié) ssi le but de f coïncide avec le source de g. Quand on pense aux morphismes comme des transformations, cette condition est tout à fait naturelle. La composition des morphismes est associative. Tout objet A a un morphisme spécial en lui-même id_A dit "identité", tel qu'il ne change pas les morphismes de forme $\text{-->}A$ (morphismes arrivants) et de forme $A\text{-->}$ (morphismes sortants) ; c'est-à-dire, que pour tout morphisme f de forme $\text{-->}A$ et chaque morphisme g de forme $A\text{-->}$ on a $f\, id_A=f$ et $id_A g=g$). C'est la fin de la définition d'une catégorie. Notez que l'identité id_A n'est pas une relation mais un morphisme. Les morphismes ne sont pas des relations au sens mathématique habituel, parce que chaque morphisme est définit pour une certaine paire d'objets, donc on ne peut pas dire qu'une autre paire d'objets a le même morphisme comme on le dit dans le cas d'une relation. Tant que chaque objet n'a qu'un seul morphisme d'identité (c'est une conséquence immédiate de sa définition), on peut toujours remplacer un objet par son identité. Donc, dans la définition d'une catégorie énoncée précédemment la notion d'objet ne joue pas qu'un rôle auxiliaire. Elle est également utile pour formuler la notion de catégorie de la manière « itérative »: on va penser des objets d'une catégorie comme des catégories (comme dans les théories axiomatique des ensembles, on pense des éléments d'un ensemble comme des ensembles). Ceci permet de clarifier la notion de morphisme (qu'on appelle souvent par le nom de "foncteur" dans un tel contexte): il est demandé que les foncteurs respectent les identités et les compositions des morphismes du niveau plus bas.

Maintenant on est près de définir la réversibilité. On dit qu'un morphisme $f{:}A\text{-->}B$ est réversible (ou isomorphisme) ss'il existe morphisme $g{:}B\text{-->}A$ tel que (1) $fg=id_A$ et (2) $gf=id_B$. De cette définition découle que si le morphisme inverse existe, il est unique. Dans la catégorie des ensembles cette notion d'isomorphisme coïncide avec celle de correspondance biunivoque. Par contre, la définition catégorique d'isomorphisme suggère une analyse aussi différente de cette notion. En particulier, les conditions (1) et (2) suggèrent deux notions différentes de "semi-réversibilité" qu'on obtient quand on prend une des deux conditions et laisse tomber l'autre, et qui sont moins évidentes dans la perspective ensembliste.

La théorie des catégories permet de développer des théories mathématiques et physiques où toutes les transformations sont irréversibles par défaut (tant que la réversibilité est un cas spécial) mais il ne résout pas le problème de Loschmidt en sens le plus général. Si j'écris la composition de deux morphismes comme d'habitude $fg=h$ je peux attribuer à cette opération le même type de réversibilité fondamentale comme dans le cas d'opération 7+5=12. D'où l'idée de remplacer l'égalité par un morphisme (entre des morphismes): $fg \dashrightarrow h$. Une façon de le faire est la suivante. On *enrichit* la catégorie $\boldsymbol{C}$ en remplaçant chaque classe des morphismes entre objets A, B de $\boldsymbol{C}$ par une catégorie des morphismes $\boldsymbol{Hom}(A,B)$ avec les morphismes de $\boldsymbol{C}$ comme objets et nouveaux morphismes (entre les morphismes de $\boldsymbol{C}$) dites 2-morphismes. Ce permet de penser de composition de morphismes $f:A\dashrightarrow B$ et $g:B\dashrightarrow C$ en $\boldsymbol{C}$ en termes de foncteurs entre les $\boldsymbol{Hom}$-catégories. Dans catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C})$ de toutes les $\boldsymbol{Hom}$-catégories de $\boldsymbol{C}$ on définit la catégorie-produit $\boldsymbol{Hom}(A,B)\mathrm{x}\boldsymbol{Hom}(B,C)$ et on prend le foncteur $S_{ABC}:\boldsymbol{Hom}(A,B)\mathrm{x}\boldsymbol{Hom}(B,C)\dashrightarrow\boldsymbol{Hom}(B,C)$ qui envoie chaque paire (f, g) en sa composition $fg=h:A\dashrightarrow C$. Avec cet outil foncteuriel on n'est plus obligé de penser de $\boldsymbol{C}$ comme une catégorie "normale" mais on peut la penser comme une catégorie "faible", i.e. comme quelque chose de plus général qu'une catégorie: au lieu de composition $fg=h$ on a un foncteur S_{ABC} avec ses composants de forme $(f, g)\dashrightarrow h$ qu'on peut également écrire comme $fg\dashrightarrow h$; au lieu de la loi associative $(fg)h=f(gh)$ on a les morphismes d'associativité de forme $(fg)h\dashrightarrow f(gh)$, etc. (Benabou 1967). Par contre, cette construction bien évidemment reste dépendante de la notion de catégorie habituelle, et ce n'est pas tout à fait clair, si la stratégie d'affaiblissement permet de "remplacer les égalités par les morphismes" (et surtout par les morphismes irréversibles) de la manière systématique même si à cette fin on utilise les catégories supérieures (n- et omega-catégories). A mon avis, ce problème n'est pas purement technique. Donc, je passe à une analyse épistémologique.

5. Science et éternité

Dans son dialogue "Phédon" Platon critique la physique et les mathématiques de la manière très forte. Parle Socrate (dans la prison quelques heures avant sa mort) ; il commence en donnant une image grotesque de la physique:

" Pendant ma jeunesse, j'étais enflammé d'un désir incroyable d'apprendre cette science qu'on appelle la physique ; car je trouvais admirable de savoir les causes de chaque chose, ce qui la fait naître, ce qui la fait mourir, ce qui la fait être; et il n'y a point de peine que je n'aie prise, pour examiner premièrement, si c'est du chaud et du froid, après qu'ils ont subi une sorte de corruption, comme quelques-uns le prétendent, que les animaux viennent a naître; si c'est le sang qui fait la pensée, ou si c'est l'air, ou le feu, ou si ce n'est aucune de ces choses, mais seulement le cerveau qui est la cause de nos sens, de la vue, de l'ouie, de l'odorat ; si de ces sens résultent la mémoire et de l'opinion; et si de la mémoire et de l'opinion reposées naît enfin la science. <...> A la fin, je me trouvai aussi malhabile qu'on le puisse être en ces recherches."

et après il passe aux mathématiques:

"Par Jupiter, je suis si éloigné de penser connaître les causes d'aucune de ces choses, que je ne crois pas même savoir, quand on a ajoute un a un, si c'est cet un auquel on en a ajouté qui devient deux, ou si c'est celui qui est ajouté et celui auquel il est ajouté, qui ensemble deviennent deux, à cause de cette addition de l'un à l'autre. Car ce qui me surprend, c'est que pendant qu'ils étaient séparés, chacun d'eux était un, et n'était pas deux, et après qu'ils soient rapprochés il sont devenus deux, parce qu'on les a mis l'un près de l'autre. Je ne vois pas non plus pourquoi, quand on partage une chose, ce partage fait que cette chose, qui était une avant que être séparée, devient deux dès le moment de cette séparation; car voilà une cause toute contraire à celle qui fait qu'un et un font deux. Là, cet un et un deviennent deux, parce qu'on les rapproche et qu'on les ajoute l'un à l'autre; et ici, cette chose qui est une devient deux parce qu'on la divise et qu'on la sépare. "

Comparez ce passage avec nos remarques sur l'Axiome de Paire. Et voici ce que Socrate propose comme solution (dans sa forme préférée de question rhétorique):

"Quand on ajoute un à un, ou coupe un en deux, ne ferais-tu pas difficulté de dire que dans le premier cas, c'est l'addition qui fait qu'un et un font deux, et que dans le dernier c'est la division qui fait qu'un devient deux ? N'affirmerais-tu pas plutôt que tu ne sais d'autre cause de l'existence des choses, que leur participation de l'essence propre à chaque sujet, et que par conséquent tu ne sais d'autre raison de ce qu'un et un font deux, que la participation à la dualité et de ce qu'un est un, que la participation a l'unité. N'abandonnerais-tu pas ces additions, ces divisions et toutes ces autres belles réponses ?"

Pour la physique Socrate propose une solution plus nuancée mais l'idée est la même: expliquer ce qu'on pense normalement comme processus, en termes de "participation" des choses en essences éternelles et inchangeables dites "idées" telles que dualité (idée de 2) et unité (idée de 1). Notez que ça ne marche qu'en cas de processus réversibles. "Participation à la même idée" est clairement une relation équivalence, (i.e. une relation réflexive, symétrique et transitive). L'isomorphisme c'est aussi une équivalence. (On dit que A et B sont isomorphe s'il existe une réversible transformation A<-->B. Cette relation qu'on appelle par le même nom d' "isomorphisme" que la transformation, mais ce n'est pas la même chose !) Donc, on peut identifier les deux relations en disant que A et B participent à la même idée. Par exemple, on peut dire que 1+1 et 2 participent à la même idée de dualité. Par contre, l'existence de morphisme quelconque A-->B n'est pas une relation équivalence parce qu'elle n'est pas symétrique. Donc, l'existence d'une transformation de forme générale A-->B ne permet pas de dire que A et B participe à la même idée.

Stipulation des choses éternelles pour expliquer des processus avec des choses changeables, je l'appelle *éternisation*. La mode d'éternisation qu'on a vu jusqu'à maintenant chez Platon, je l'appelle l'éternisation *formelle*. On peut la décrire d'une manière suivante: étant donné un isomorphisme A<-->B on identifie A et B à un isomorphisme près ; de cette identification résulte un nouvel objet abstrait (idée, forme ou structure) F qui est invariant sous cette transformation. Evidemment telle identification n'est possible que si le morphisme A-->B est un isomorphisme (i.e. est réversible).
On peut penser à un autre mode d'éternisation qui fonctionne avec des processus de tout type, qu'on peut appeler éternisation *historique*. Brutus a tué César à Rome à l'Ides de mars de l'année 44 avant J.-C.. Cet événement est toujours là ; ce n'est pas possible qu'il (cet unique événement!) bouge de Rome a Paris ou qu'il change sa date. (On peut toujours faire une erreur de date ou de place mais c'est une toute autre question.) Donc, le meurtre de César est parfaitement éternel et inchangeable. Pourquoi, alors, chercher l' éternité avec Platon sur le ciel si on le trouve facilement parmi les choses terrestres avec un petit changement de perspective ? Dans la cosmologie contemporaine, qui présente l'univers comme une variété d'événements, on trouve l'éternité éventuelle au ciel aussi bien que sur terre.
Est-ce qu'il est justifié de penser une variété d'événements comme une collection de choses éternelle prises en bloc? C'est vrai qu'on peut répéter l'histoire de meurtre de César dans notre esprit en passant du début à la fin et vice versa. On peut appeler cet effet "rétention" après Husserl. Mais c'est la manière de penser les processus et événements (je ne fais pas ici de différence entre les deux) la plus générale: pas d'événement sans rétention ! L'apparente éternité des événements montre seulement que le concept naïf de changement n'est pas itératif: il n y a pas de changements de changements dans ce schéma. En jargon mathématique il revient à dire que l'opérateur de changement dans ce schéma est nilpotent. C'est pour cette raison qu'un événement est un changement qui ne change pas. Par contre, si on interprète un morphisme catégorique comme un changement, on peut toujours construire changements des changements. Je ne crois pas qu'il faille prendre le fait d'absence de changements de changements dans la pensée commune comme une vérité métaphysique ultime. Dans cette perspective on peut comme même considérer l'hypothèse selon laquelle les événements ne changent pas comme une manière de les éternaliser.
En fait, il faut bien distinguer (d'après les théologiens) deux type d'éternité: (1) la durabilité infinie et (2) atemporalité, i.e. le fait être en dehors des schémas temporels possibles. Comme beaucoup de lecteurs de Platon (et surtout de théologiens chrétiens) ont déjà remarqué, Platon pensait éternité plutôt dans le sens (1) que (2). Notez que l'éternité (1) n'implique pas d'immuabilité (l'absence de changements): une chose peut changer mais exister toujours. En particulier, si toutes les transformations de forme A-->B sont réversibles, et si on compte la disparition de A et B comme transformations, alors A et B sont forcément éternelles. Dans cette situation il est déjà facile de stipuler forme F, qui est immuable aussi bien qu'éternelle, comme on le trouve chez Platon. Donc, l'hypothèse selon laquelle au niveau fondamental tous les processus sont réversibles, est une condition cruciale d'éternisation formelle.
Par contre, si on assume que chaque changement peut être encadré dans un schéma temporel, alors l'éternité

(2) implique immuabilité. En ce sens l'éternité (2) est plus forte que l'éternité (1). Cette forte notion d'éternité est importante pour l'histoire des mathématiques de 20ème siècle aussi bien que pour la pensée chrétienne. Je parle de l'idée selon laquelle les concepts mathématiques de base ne dépendent pas de ceux d'espace, temps et changement. Certains mathématiciens cherchaient cette base dans le domaine de la logique, beaucoup d'entre eux pensaient de l'avoir trouvé dans la théorie des ensembles. Le concept d'espace (ou plutôt plusieurs concepts d'espace) a été ultérieurement reconstruit sur cette base, tant que les concepts de temps et de changement étaient jusqu'a récemment largement négligés, au mois dans les mathématiques pures. Notez que l'espace-temps de la Relativité générale du point de vu mathématique est bien un espace.
Quel est l'intérêt pour choses éternelles dans la science? Si on parle de l'éternisation formelle, l'intérêt apparemment vient de l'idée traditionnelle de science comme une collections des vérités éternelles et immuables. Telle science a besoin d'un sujet qui soit également éternel et immutable, parce que si le sujet change, ce que la science dit à propos de ce sujet peut devenir faux. Cette image de la science est bien démodée mais elle reste encore aussi influente parce qu on n'a pas une image alternative claire. Quand on parle du développement de la science comme une "approximation progressive" de la science idéale qui porterait le complet savoir de tout, et qu'on n'aurait plus ni besoin, ni possibilité de la développer plus loin, on ne propose rien de nouveau sauf une excuse pour continuer les recherches et les avancées, qui ne sont pas du tout convaincantes. C'est clair que le but d'arriver à tel point n'est pas vraiment vu comme souhaitable et comme faisable par la majorité des savants ; néanmoins la majorité apparemment tient à l'idée de science comme l'approximation de vérité éternelle. Cette double pensée empêche de répondre à la question du futur de la science sérieusement. Notez que les doctrines religieuses et idéologiques sont souvent plus durables que les doctrines scientifiques, donc on ne peut pas les distinguer par ce critère. Il me semble évident que la science ne peut pas exister sans développement ; il n'y a pas aucun mécanisme qui permettrait de la conserver un moment donné sans la tuer. Dans la partie suivante de cet article je vais montrer par quoi on peut remplacer l'idée de vérité éternelle sans abandonner l'idée de vérité comme telle. Ici je remarque que l'omniprésence des transformations réversibles en mathématiques et physique traditionnelles, peut-être bien expliquée par la chasse d'éternité épistémique (sinon toujours ontologique).
A propos éternité (2) j'ai une objection qui est aussi épistémologique plutôt que métaphysique. Le désir d'abandonner les intuitions temporelles (en particulier l'intuition de changement) sauf son traditionnel support platonicien a été motivé par les problèmes de fondements d'Analyse où telles intuitions jouaient un rôle important depuis Newton. L'éclaircissement des fondements d'Analyse achevé par Cauchy et Weierstrass au 19ème siècle est l'interprétation d'Analyse à l'ancienne où les nouveau concepts dynamiques, tels que le "fluxion" de Newton, sont abandonnés comme « vagues » (même si le concept dynamique de série reste encore à sa place). Après la découverte des géométries non-Euclidiennes beaucoup de mathématiciens sont devenus suspicieux à l'intuition spatiale aussi bien qu à l'intuition temporelle (même si les fondateurs de la géométrie non-Euclidienne tels que Lobatchevski et Riemann pensaient à l'élargissement de l'intuition euclidienne plutôt que de refus de l'intuition spatiale comme telle). A la fin de 19ème siècle Hilbert a suggéré

que la manière la plus rigoureuse (même si pas la plus utile dans le travail de mathématiciens) de penser des choses géométriques consiste à abandonner les intuitions spatiales après les intuitions temporelles (Hilbert 1899). Au 20ème siècle ce point de vue est devenu aussi influent. Je ne vais pas discuter ici tous les aspects de ce grand problème mais une chose me semble claire: ces développements n'ont pas aidé à appliquer les nouvelles mathématiques en physique et même créent certaines barrières artificielles entre ces disciplines. Je crois que Bergson a eu raison, quand il a dis à propos de la relativité einsteinienne, que si on représente l'espace-temps physique par un espace géométrique, quelque chose ne va pas. Si l'espace-temps est vraiment un nouveau concept fondamental en physique, on a besoin d' un nouveau concept mathématique pour le gérer, car le concept de variété riemannienne c'est un concept bien spatial. Mais contrairement à Bergson qui cherchait la solution ailleurs, j'estime que le problème est soluble (et doit être forcement résolu) en science et mathématiques. Le problème de modélisation des processus irréversibles est une partie du problème plus général de représentation mathématique de l'espace-temps physique. Il me semble évident que pour mieux résoudre ce problème il faut penser aux choses spatio-temporelles déjà dans les fondements des mathématiques plutôt que développer les mathématiques d'une manière abstraite et après chercher des applications des mathématiques dans la physique.

6. Réversibilité et objectivité; objectivité invariante et covariante

Jusqu'à ici nous avons parlé de réversibilité et irréversibilité des transformations mathématiques avec l'idée que ces transformations puissent représenter certains processus physiques. Quand une transformation mathématique représente un processus physique, c'est à dire un changement objectif, les physiciens parlent de transformations "actives". Il y a une autre manière importante d'utiliser les transformations mathématiques dans la physique, notamment pour représenter les transformations des "points de vue" en situation physique donnée. Le concept de point de vue associé à un observateur (ou l'état d'un observateur en moment donné) est important dans la physique depuis Galilée; l'idée de la relativité en physique s'agit à reconstruction d'une seule image dite objective à partir d'un nombre d'images obtenues de points de vue différents en termes des relations entre ces différentes images. Je parle ici de points de vue, d'images et de relations au sens philosophique large. En pratique, les points de vue sont identifiés avec des systèmes de références permettant faire des mesures, les images sont identifiées avec des ensembles des mesures, et le rôle des "relations" est joué par les transformations entre ces systèmes de références et, donc, entre les mesures. Dans les cas de mécanique galiléenne ou relativité einsteinienne dans sa forme classique il s'agit, du côté mathématique, de transformations entre différents systèmes des coordonnées. Les transformations de ce type sont appelées "passives" par les physiciens.

La différence entre transformations actives et passives n'a pas beaucoup de sens mathématique mais elle est très importante pour la physique parce qu'elle permet de définir la notion d'objet physique (dans le sens précis d'"objet" comme une chose objective). Dans la relativité galiléenne et la relativité einsteinienne restreinte l'objectivité est identifiée avec l'invariance sous les transformations passives d'un certain groupe (le groupe galiléen en premier cas et le groupe lorentzien en deuxième cas). Dans la mécanique galiléenne les vitesses des particules ne sont pas préservées par les transformations passives: elles dépendent du choix du système de référence. Donc, elles ne sont pas objectives mais conventionnelles. Par contre, les accélérations des particules sont invariantes sous ces transformations (si les unités des mesures sont fixes), donc les accélérations sont objectives. En cas de la relativité restreinte l'invariant principal est l'intervalle spatio-temporel entre des événements. Donc, tel intervalles sont objectifs. Notez que ce schéma d'objectivation ne fonctionne que dans le cas où les transformations en question sont réversibles. Il n'est pas possible le facilement généraliser pour le cas irréversible parce que dans ce cas on n'a pas des invariants. La raison est la même qu'en cas de l'éternisation formelle: les transformations irréversibles ne permettent pas de définir des classes d'équivalence, qui pourraient être interprétées comme les classes d'équivalentes images du même objet. Quand on dit qu'une certaine magnitude, par exemple l'intervalle spatio-temporel, est invariante sous les transformations de certain groupe, on pense toujours à une classe de valeurs possibles de cette magnitude (normalement c'est l'ensembles des nombres réels ou complexes). Chaque valeur de telle magnitude correspond à une classe de ses représentations (images) dans les différents systèmes de référence. Cette classe est une classe d'équivalence par l'isomorphisme rendu par les transformations en question. Mais si les transformations sont irréversibles elles ne correspondent à aucun isomorphisme. Nous voyons que la condition de réversibilité des transformations passives à une portée épistémologique majeure (comme en cas d'éternisation). J'appelerai objectivation *invariante* la construction d'objet physique comme un invariant des transformations de certain groupe.

Le cas de la relativité générale est plus délicat même si toutes les transformations passives sont ici également réversibles. Localement l'objectivation invariante fonctionne ici comme avant. Mais il y a aussi des propriétés globales d'espace-temps (surtout les propriétés topologiques) qu'on veut compter comme objectives mais on ne peut pas le faire par l'objectivation locale. Ces propriétés globales sont invariantes sous certaines transformations, notamment sous les difféomorphismes globaux d'espace-temps, mais tant qu'on ne peut pas immédiatement interpréter ces transformations globales comme des changements de point de vue, on est obligé les considérer comme actives et dire que les modèles d'espace-temps donnés par cette théorie sont sous-déterminés. Le "Paradoxe du Trou" est une formulation particulière de ce problème général. Voilà sa solution structuraliste proposée par Iftime&Stachel (2006):

...in order to avoid ... the hole argument we define a quotient space of classes of models, so that each class of models corresponds to a unique physical model.

Donc, l'apparente sous-détermination de la théorie n'est rien d'autre qu'une sur-détermination (redondance) du schéma mathématique. Iftime&Stachel utilisent une formulation de la relativité générale et de l'argument de trou sans coordonnées, et ils ne parle pas de transformations actives et passives dans ce contexte. Néanmoins ils adoptent le schéma de l'objectivité invariante à la relativité générale en disant que certaines différences entre modèles mathématiques ne correspondent pas à aucune différence objective comme en cas de différences entre points de vue.

Même si ça marche pour le Paradoxe du Trou, je veux proposer une autre notion d'objectivité suggérée par la Relativité générale, qui est très différente. Je vais l'appeler "objectivité covariante". Je montrerai que l'objectivité covariante est plus adéquate à l'idée de relativité que l'objectivité invariante. Wikipedia (2007) définit la covariance en physique comme "l'invariance des lois physiques sous une transformation arbitraire des coordonnées". On voit que la notion de covariance est comprise ici comme une invariance en sens large, qui n'est pas nécessairement associée avec une magnitude constante. Par contre, la théorie des catégories donne la notion de covariance comme foncteurielité. Le foncteur F:A-->B au sens de la définition énoncée précédemment est un foncteur covariant; tandis qu'un foncteur contravariant est un foncteur (covariant) de forme F':A-->B^{op} ou B^{op} est la catégorie obtenue de catégorie B par le renversement de tous ses morphismes. La covariance au sens de la relativité générale est formulée en langage foncteuriel d'une manière immédiate : ce n'est rien d'autre que la foncteurielité des observables (l'existence d'un foncteur d'une catégorie des observables au groupoïde des systèmes locaux de référence). Par contre, la covariance catégorique (foncteurielité) ne se réduit pas en covariance comme une invariance généralisé pour la simple raison que dans le cas général les morphismes de catégorie A ne sont pas réversibles, et donc, ils n'ont aucun invariant ! Etant donné un foncteur F:A-->B il faut penser les catégories A, B comme deux choses qui changent, et penser au foncteur F comme une transformation (parmi les autres) des changements de A en changements de B. Pour mieux voir, comment ceci permet de construire une notion d'objectivité, qui est plus générale que la notion d'objectivité invariante, prenons un exemple de la vie courante. Si je dis qu'il pleut où et quand il pleut, et dis, qu'il ne pleut pas où et quand il ne pleut pas, alors je toujours dis la vérité. Mais cette vérité n'est pas ni éternelle, ni invariante, et elle ne correspond pas à aucune chose éternelle ou invariante. Voici ce qu'il se passe: les changements du temps et de place se transforment en changements de mes annoncés d'une manière « correcte ». Je rappelle que du point de vue frégéen annoncé "il pleut" est mal construite par ce qu'elle n'a pas la valeur de vérité fixe; pour construire une bonne annonce frégéenne à partir de l'expression "il pleut" il faudrait l'éterniser en mode historique, i.e. mentionner la place et le temps précis de l'événement en question.

Dans le contexte de la relativité générale il devient clair que l'éternélisation frégéenne est inutile dans la physique où on n'a pas du système de référence fixe. Par contre, on peut bien faire la science sans passer par l'éternisation. C'est vrai que des affirmations éternelles sont plus facile à gérer par la logique traditionnelle, mais ce n'est pas un bon argument en leur faveur. On verra comment la théorie des catégories permet de résoudre ce problème technique.

Pour mieux voir la différence entre l'objectivité invariante et l'objectivité covariante considérez encore cette métaphore. Un objet invariant ressemble une statue qu'on observe de points de vue différents. Dans le cas classique, où la géométrie d'espace est euclidienne, on suppose que tous les observateurs ont la capacité de vision magique, qui leur permet de voir la statue tout entière de chaque point d'observation. En cas de la géométrie riemannienne on suppose, au contraire, que les observateurs peuvent être myopes et ne voir rien qu'un petit morceau de la statue. Mais en tous cas on suppose que toutes les transformations entre des points de vue différents sont réversibles: quand un observateur bouge sa tête (ou un observateur myope bouge son corps) il peut toujours revoir la statue du point de vue précédent sans aucun changement (car la statue elle-même ne bouge pas). Donc, la statue est un invariant des toutes les possibles changements de point de vue. Par contre, si l'observateur constate qu'il pleut, après fait une promenade et revient au même endroit, il peut bien arriver que là il ne pleuve plus. En fait, pour parler de retour en cette situation il faut déjà bien couper l'espace-temps en l'espace et le temps, ce permet de dire qu'on revient au même endroit à un autre moment de temps. Mais si on veut éviter telle coupure, il faut laisser tomber l'idée de réversibilité universelle. Ce qui n'empêche pas de dire qu'il pleut quand il pleut, aussi bien que dire, qu'il ne pleut pas, quand il ne pleut pas. En permettant des changements des points de vue irréversibles on n'est plus obligé de limiter la notion d'objet (chose objective) au cas d'objet immuable comme une statue. Donc, un objet covariant peut être bien dynamique. Notez finalement que la notion d'invariance n'est pas vraiment adéquate à l'idée de relativité, parce qu'elle révoque les notions de constance absolue et de changement absolu. (Dans les mathématiques habituelles cette distinction est bien rigide: une constante (un nombre) est constant et une variable est variable. A mon avis, c'est une limitation majeure qui ne permet pas de construire des théories relativistes en physique d'une manière plus cohérente.) Ceci montre que l'objectivité covariante est mieux adaptée à la relativité que l'objectivité invariante.

Voilà une ébauche d'un schéma qui permet de réaliser le concept d'objet covariant avec des moyens catégoriques. On commence par une catégorie C qu'on interprète comme une "catégorie des points de vues" ou "catégorie des observateurs" ou "catégorie subjective". Dans le cas de la relativité générale cette catégorie est le groupoïde des systèmes locaux de référence. Mais en général la catégorie subjective peut être une catégorie quelconque sauf que pour une raison technique, qui sera éclaircie ensuite, on suppose qu'elle est petite, i.e. que tous ces morphismes forment un ensemble. Cela déjà signifie un important changement du cadre épistémologique habituel : dès que des points de vue différents sont transformés l'un en l'autre par des transformations irréversibles, ils ne sont plus équivalents ou, pour le dire d'une manière plus précise, ces transformations ne permettent plus de définir une relation d'équivalence entre eux. Pour cette raison on ne peut plus construire l'objectivité à la base d'équivalence entre les différents points de vue comme en cas de l'objectivité invariante. Néanmoins le cadre catégorique donne plusieurs possibilités de le faire autrement. Un objet covariant, qui n'est pas invariant mais ressemble le plus à ça, c'est l'objet *terminal* défini comme objet O de catégorie donnée tel qu'il y a précisément un morphisme de tout objet A de cette catégorie en O; c'est immédiat que O est unique à isomorphisme près (et même unique à *unique* isomorphisme près), s'il existe. Soit C une petite catégorie subjective sans l'objet terminal. On peut introduire un tel objet (aussi bien que beaucoup d'autres objets importants) en C par ce moyen standard: on prend une catégorie $\boldsymbol{C} = (C, Ens)$ de tous les foncteurs de C en catégorie des ensembles Ens comme objets et les morphismes entre ces objets dits transformations naturelles. On identifie C avec une sous-catégorie de $\boldsymbol{C}$ par le plongement d'Yoneda. Ceci permet de voir $\boldsymbol{C}$ comme une extension de C et en même temps bien distinguer les deux. Maintenant on peut interprèter un morphisme de forme O-->A comme une "apperception" de O par observateur A de C: un observateur A peut avoir plusieurs apperceptions ou rien du tout. Néanmoins A a une unique représentation de O que j'identifie avec morphisme A-->O. Ceci permet de voir O comme un objet (au sens de "chose objective"), qui est vu par les différents observateurs de plusieurs manières différentes, et néanmoins chaque observateur forme une seule représentation de cet objet. Donc, on peut voir O (et dans un autre sens - $\boldsymbol{C}$ toute entière) comme une catégorie "objective". Notez que O est immuable comme un événement dans le cadre relativiste habituel, parce que il a y un seul morphisme de forme O-->O, notamment le morphisme d'identité. Tant que C est petite, $\boldsymbol{C}$ est un topos, ce qui permet de le voir comme un schéma logique avec ses propres valeurs de vérité, qui dépendent de C. Si C est munie par une structure spatio-temporelle comme c'est le cas de la relativité générale, (plus généralement cela peut être fait avec une structure topologique au sens de Grothendieck), les valeurs de vérité comportent "comme il faut", c'est à dire comme dans l'exemple d'annonce "il pleut" sauf qu'en plus des valeurs "vrai" et "faux" on obtient des valeurs de vérité supplémentaires du type de "pas encore". En ce cas on peut appeler C l'espace-temps subjectif et $\boldsymbol{C}$ l'espace-temps objectif. Notez que dans cette construction l'espace-temps subjectif fait partie de l'espace-temps objectif. Maintenant on peut utiliser topos $\boldsymbol{C}$ pour vérifier si une théorie donnée T est covariante relativement à $\boldsymbol{C}$, et pour construire des modèles de T en $\boldsymbol{C}$. Tant qu'on va considérer comme les modèles de T en $\boldsymbol{C}$ certains foncteurs de forme T-->$\boldsymbol{C}$ ces deux parties du programme reviennent à la même chose. A cette fin on a besoin, bien entendu, de présenter la théorie T comme une catégorie (Makkai&Reyes 1977). Donc, l'existence d'un modèle, i.e. d'un foncteur T-->$\boldsymbol{C}$, signifie que T est covariante relativement à $\boldsymbol{C}$. Il est évident que la covariance en ce sens est une propriété encore trop faible pour bien déterminer un modèle ; donc il faut spécifier quelle sorte de foncteur on va compter comme un modèle. Je laisse ici cette question de côté, parce qu'une solution concrète peut dépendre de T et de C. De toutes façons il ne faut pas attendre d'obtenir un seul modèle de T en $\boldsymbol{C}$ même si "seul" est compris comme "à unique isomorphisme près". Donc, on obtient une certaine catégorie M des modèles (une sous-catégorie de catégorie foncteurielle complète (T , $\boldsymbol{C}$)) qui après Stachel peut être vue comme un unique modèle physique. La différence principale entre notre approche et celle de Stachel est celle-ci: chez nous M est une catégorie tandis que chez Stachel elle est juste une classe (des modèles). Cette différence est plus que technique. Quand une classe des modèles isomorphes correspond au même modèle physique, on peut bien suggérer que les différences entre ces modèles sont anodines et que ce qui compte, c'est la structure partagée par tous les modèles de la classe. Autrement dit, on peut voir ces modèles comme identiques à isomorphisme près. Par contre, on ne peut pas penser de la même manière une catégorie des modèles quelconque, parce que en général ces objets ne sont pas isomorphes. Notez que ce schéma très général utilise une catégorie *Ens* des ensembles comme un "fond" ("background") ; ce qui permet de construire un espace-temps objectif $\boldsymbol{C}$ comme un topos. Néanmoins, ce schéma est très souple parce qu'il permet d'adapter le langage (c'est-à-dire la logique) à C et à T. Si C est une structure aussi riche on pourra éviter d'utiliser *Ens* comme fond et travailler dans un cadre plus général que celui de topos ou construire un topos à partir de *C* sans passer par *Ens*.

7. Conclusion : la science irréversible

On a vu que la question d'irréversibilité touche l'épistémologie des sciences et des mathématiques, et que sans une profonde révision épistémologique on n'arrive pas à encadrer la notion d'un processus irréversible dans une théorie physique. On a vu que l'hypothèse de la réversibilité fondamentale dans la Nature est fortement liée avec la vision traditionnelle de science comme un système des vérités éternelles. Quand on parle de modélisation des processus dans un schéma théorique, et quand on parle de changement des schémas théoriques, c'est aussi deux choses différentes. Néanmoins elles ne sont pas indépendantes. Les vérités éternelles ont besoin des objets éternels. Par contre, la notion d'objectivité covariante est bien compatible avec la notion de science comme un processus plutôt qu'un schéma fixe; il n'y a pas aucune raison pour voir ce processus comme réversible au sens global. Même si tous les savoirs humains un jour disparaissaient avec l'humanité - même sans aucune trace, cela ne signifierait pas encore la réversibilité de la science, parce qu'il faut également garantir la possibilité de reproduire toute son histoire. Donc, voir la science comme irréversible ne revient à rien d'autre que la voir comme un processus sans l'hypothèse étrange de la réversibilité globale. C'est clair que chaque théorie a besoin d'une identité bien définie mais cela n'empêche pas une telle théorie d'être changée en elle-même ou en d'autres théories. L'idée selon laquelle chaque nouvelle théorie soit remplace une théorie ancienne, soit se place à côté de toutes les théories précédentes, est évidemment trop simpliste pour voir ce qu'il passe dans l'histoire de la science et pour bien planifier le développement de science dans le futur. Le "principe de correspondance" de Bohr, selon lequel la mécanique quantique à une certaine limite se réduit à la mécanique classique (mais pas vice versa), est un simple exemple d'une relation entre une ancienne et une nouvelle théorie qui n'est pas ni neutre, ni strictement antagoniste. En général, on peut toujours penser une relation entre des théories comme une traduction, et postuler l'existence de certaines traductions comme une condition méthodologique (ce qui n'exclut pas la possibilité de réfutation de certaines théories comme fausses.) Ceci permet d'appliquer l'appareil de la théorie des catégories pas seulement pour construire des théories singulières mais aussi pour construire un cadre plus large dans lequel ces théories se développent. Donc, on n'a pas vraiment besoin de supposer que sous toutes les constructions conceptuelles qu'on peut appeler irréversibles au sens restreint il y a toujours un schéma réversible de base. L'idée qu'en dernière analyse « tout » est réversible n'est vraie qu'au sens local où on voit une théorie comme un schéma éternel. Mais le contexte plus large dans lequel de tels schémas s'inscrivent est encore bien dynamique et irréversible.

Dans cette perspective on peut penser les sciences humaines comme un processus qui fait partie d'un processus plus large qui est l'histoire de notre monde. Le progrès des sciences peut être vu comme une exploration progressive du monde, qui va ensemble avec l'élargissement de notre expérience, plutôt qu'un mouvement progressif vers l'idéal du savoir total. Ceci permet de penser au rôle des sciences dans les affaires humaines d'une manière plus responsable.

<u>Bibliographie :</u>

Bénabou, Jean, 1967, “Introduction to bicategories” in : [Bénabou et al. (eds.) Reports of the Midwest Category Seminar (Lecture Notes in Mathematics, 47), Berlin : Springer,] 1–77.

Fraenkel, Abraham et al., 1973,.*Foundations of Set Theory*, North-Holland

Hilbert, David., 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner;

Iftime, Mihaela et Stachel, John, 2006, “The Hole Argument for Covariant Theories” *General Relativity and Gravitation*, 38 (2006) pp. 1241-1252; preprint: arXiv:gr-qc/0512021v2

Klein, Felix, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Verlag von Andreas Deichert, Erlangen, 1872.

Lawvere, W., 1964, "Elementary Theory of the Category of Sets", *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 52, N6, p.1506-1511

Loschmidt, Johann,1876, *Uber das Wärmegleichgewicht eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwere*, Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Classe **73**, 128-142 ; et : **75** (1877), 67.

Makkai, Michael. and Reyes, Gonzalo, 1977*, First Order Categorical Logic*, Springer (Lecture Notes in Mathematics 611)

Rodin, Andrei, 2007, “Towards Categorical Theory-Building: Beyond the Formal”, arXiv:0707.3745v1 [math.HO]