Андрей Родин

Кант и новая математика сто лет спустя

(Работа поддержана исследовательским грантом РФФИ N13-06-00515)

Аннотация:
Критика Кассирером философии математики Рассела и неокантианская философия науки и математики в целом приобретает особую актуальность в контексте современной математики и математической физики. То обстоятельство, что современная стандартная аксиоматическая архитектура математических теорий не учитывает предметного характера математического знания, на которое вслед за Кантом указывает Кассирер, затрудняет использование новых математических знаний в естественных науках и технике. В частности, в этом может состоять одна из причин того, что физическая теория струн в ее современном виде оказывается принципиально недоступной для опытной проверки, поскольку ее можно согласовать практически с любыми возможными результатами наблюдений и экспериментов. Однако есть основания считать, что некоторые новейшие подходы в основаниях математики включая теорию категорий, теорию топосов и "унивалентные основания" могут позволить исправить этот недостаток в обозримом будущем. Проблема использования в естественных науках и в технике новых математических знаний показывает, что кантианский подход в философии математики остается по крайней мере частично релевантным современному состоянию этой науки.

Ключевые слова: Кассирер, Рассел, философия математики, формальная логика, предметное знание, теория категорий

Kant and new mathematics 100 years after

Abstract:
Cassirer's critique of Russell's philosophy of mathematics and Neo-Kantian philosophy of science and mathematics more generally becomes particularly pertinent in the context of today's mathematics and mathematical physics. The fact that the modern standard axiomatic architecture of mathematical theories does not take into account the object-based character of mathematical knowledge, which has been stressed by Cassirer after Kant, obstructs prospective applications of new mathematical theories in natural sciences and technology. In particular this can be a reason why the physical String theory in its present state turns to be empirically uncheckable because it can be adjusted to a very wide range of possible outcomes of observations and experiments. At the same time there are reasons to believe that certain recent approaches in foundations of mathematics such as Category theory, Topos theory and Univalent Foundations may help to improve the situation in the foreseeable future. The problem of applicability of new mathematical knowledge in science and technology shows that the Kantian approach in philosophy of mathematics remains at least partly relevant to today's mathematics.

Keywords: Cassirer, Russell, philosophy of mathematics, formal logic, object-based knowledge, Category theory

Название этой статьи частично воспроизводит название работы Э. Кассирера опубликованной в 1907 году (Cassirer 1907). Я попытаюсь ответить на некоторые вопросы заданные Кассирером в контексте современной новой математики, которая уже очень значительно отличается от той "новой" математики, о которой более века назад писал Кассирер. Следуя Кассиреру я не буду при этом пытаться дать полный обзор текущих математических исследований, а буду иметь в виду только некоторые новые направления в основаниях математики, которые позволяют по-новому посмотреть на математику в целом и переосмыслить роль этой дисциплины в физике и других естественных науках. Опираясь на работу Кассирера я постараюсь показать, какие именно идеи Канта о математике и ее роли в естественных науках остаются релевантными современным исследованиям в этих дисциплинах.

Чтобы понять замысел статьи Кассирера 1907-го года необходимо хотя бы очень кратко восстановить исторический контекст, в котором была написана эта работа. В 19-м веке в математике были сделаны революционные открытия, которые очень существенно изменили характер этой дисциплины. В частности, были открыты и затем получили широкое признание *неевклидовы геометрии* (Бонола 2010). Эти геометрические теории отказываются от традиционной предпосылки о том, что пространство евклидовой геометрии является единственным возможным геометрическим понятием пространства, и вводят в рассмотрение новые широкие классы геометрических пространств (гиперболические, эллиптические, римановы многообразия, проективные пространства и некоторые другие). Допущение о множественности геометрических пространств (и соответствующих теорий этих пространств) очевидным образом несовместимо с известным тезисом Канта о том, что пространство (какое?) это априорная форма чувственности, которую можно эксплицировать с помощью именно евклидовой геометрии.

Таким образом к концу 19-го века уже было вполне очевидно, что философия математики Канта в своей исходной форме неадекватна современному состоянию этой науки. Реакция на такое положение вещей была двоякой. Ряд авторов включая Когена, Наторпа Кассирера пытались найти способ модернизировать философию Канта в контексте новых математических теорий (Jonson 2105). (ПРИМ. Эти попытки породили то направление в философии, которое сегодня называют исторической эпистемологией: согласно этому подходу история науки является существенным элементом эпистемологии, а задача философии науки состоит не в том, чтобы установить какие-то вечные принципы научного познания, а скорее в том, чтобы следить за развитием научной мысли и делать эту мысль предметом постоянной философской критики (Rheinberger 2010). ПРИМ) Другие авторы включая Фреге и Рассела развивали альтернативные подходы к анализу современной им математики на этой основе пытались полностью опровергнуть, а не просто скорректировать Канта (Pulkkinen 2005).

В 1903-м году Рассел опубликовал свои "Принципы математики" (Russell 1903), где он впервые предпринял попытку систематического философского обоснования математики включая как ее традиционные разделы (в частности, традиционную арифметику и евклидову геометрию), так и новые математические теории, возникшие на рубеже 19-20-го веков: неевклидову геометрию, проективную геометрию, теорию множеств, теорию действительных чисел и теорию комплексных чисел. По словам самого Рассела это новая философия математики “диаметрально противоположна Канту” (op. cit. p. 456). Основной аргумент Рассела против Канта состоит в следующем: Кант использовал устаревшее и неадекватное понятие о *формальной* логике (которую сам Кант называл “общей” логикой и считал законченной дисциплиной не допускающей никакого существенной ревизии своих основных положений) и именно поэтому для анализа математических рассуждений был вынужден пользоваться понятием интуиции и говорить об особой *трансцендентальной* логике. Рассел утверждает, что новый аппарат формальной логики описанный им в “Принципах математики” решает проблему логического анализа математических рассуждений более убедительно без использования понятия интуиции и других понятий, которыми пользовался Кант. Еще раз подчеркну, что подход Рассела в отличие от подхода Канта распространяется не только на традиционные, но и на новые (на 1903 год) математические теории.

Новый логический аппарат, которым пользуется Рассел в своих “Принципах”, не является полностью его оригинальным изобретением, но существенно опирается на достижения британской школы математической логики 19-го века (Буль, Морган, Венн), а также на новые для того времени логические работы Фреге и Пеано. В эпистемологическом плане Рассел опирается на Лейбница, которого в отличие от Канта он оценивает очень высоко. В написанном в 1937-м году предисловии к новому изданию своей ранней работы о Лейбнице 1900-го года Рассел говорит о Лейбнице так:

В области логики и оснований математики многие мечты Лейбница сегодня реализованы; сегодня стало ясно, что это не были пустые фантазии, как казалось всем наследникам Лейбница вплоть до самого недавнего времени. (Russell 1996, p. xviii)

Таким образом Рассел предлагает нам такую историческую перспективу. Лейбниц правильно сформулировал проект обоснования математики с помощью формальной логики, но не смог реализовать этот проект, потому что у него не было для этого подходящего формально-логического аппарата. Кант не мог реализовать проект Лейбница по той же причине, но вместо того, чтобы искать замену аристотелевской формальной логике, вовсе отказался о этого проекта и направил свои усилия в ошибочном направлении. Дальнейший прогресс в области формальной логики позволил в 20-м веке реализовать проект Лейбница и таким образом сделал очевидным ошибочность подхода Канта.

Хотя некоторые предложения Рассела представленные в “Принципах математики” 1903-го года позже были отвергнуты большинством логиков философов (в частности, это касается идеи Рассела о полной редукции математики к логике), именно подход представленный в этой работе подход стал важным элементом аналитической философии математики 20-го века, которая остается доминирующей в мировом научном и философском сообществе и сегодня. Поскольку мы говорим сейчас не о философии вообще, а о философии математики, дело здесь не сводится только к культурному доминированию определенной философской традиции. Современные стандартные основания математики построенные с помощью аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля в общих чертах (хотя и не в деталях) реализуют именно ту архитектуру математики, которая описана Расселом в “Принципах” и замысел которой можно найти у Лейбница. Таким образом сегодня есть очевидные основания для того чтобы утверждать, что положение дел в современной математике подтверждает правоту Рассела в его заочном споре с Кантом и Кассирером.

На основании всего вышесказанного можно как будто сделать вывод о том, что кантианская философия математики является полностью устаревшей и таким образом представляет сегодня лишь чисто исторический интерес. Хотя ряд современных философов математики вполне согласны с таким выводом, мне он представляется недостаточно обоснованным. Ценность работы Кассирера 1907-го года состоит в том, что в отличие от некоторых других последователей Канта в 20-м веке Кассирер не пытается преуменьшить значение новых математических и физических теорий, а так же как и Рассел делает их предметом подробного анализа (Heis 2010), (Heis 2011), (Friedman 2005) Это позволяет Кассиреру переформулировать некоторые проблемы и тезисы кантианской философии математики в виде, который делает их полностью релевантными науке 20-го века. Ниже я постараюсь показать, что основной эпистемологический вопрос, который вслед за Кантом ставит по отношению к математике Кассирер, остается открытым и сегодня, причем от ответа на этот вопрос зависит дальнейший прогресс физики, технологии (включая информационные технологии) и других теоретических и прикладных дисциплин, в которых используется математика.

Кассирер комментирует позицию Рассела в “Принципах математики” следующим образом (вслед за Кутюра (Couturat 1906) называя при этом аппарат формальной символической логики, который использовал Рассел, *логистикой*)

“Тут возникает проблема, которая целиком лежит вне поля зрения “логистики”. Все эмпирические суждения принадлежат своей области: они должны соблюдать границы опыта. Логистика развивает систему гипотетических предпосылок, про которые нельзя узнать, установлены ли они на опыте и могут ли они иметь непосредственные или опосредованные конкретные применения. Согласно Расселу даже общее понятие о величине не относится к чистой математике, но включает в себя эмпирический аспект доступный только для чувственного восприятия. Для логистики задача мысли ограничивается тем, что она устанавливает точную дедуктивную связь между всеми своими построениями. Таким образом вопрос о закономерностях мира объектов остается на усмотрение только прямому наблюдению, которое своими собственными ограниченными средствами должно позволить нам установить, есть ли тут какие-то законы или, напротив, царит полный хаос. С точки зрения Рассела логика и математика имеют дело только с порядком понятий и не должны заботиться о порядке или беспорядке объектов. Если оставаться в рамках такого анализа понятий, то эмпирические вещи будут всегда ускальзать от всякого рационального понимания. Чем более очевидными будут для нас достоинства и мощь дедукции в математике, тем менее понятной будет роль дедукции в естественных науках. [...] Логические и математические утверждения могут иметь чисто гипотетическую ценность. Но только ли по счастливой случайности эти гипотезы позволяют нам описывать и предсказывать эмпирические факты? [...] Задача критической философии, начинается там, где заканчивается логистика. Эта задача состоит в том, чтобы найти логику *предметного* (gegenstaendliche) познания." (Cassirer 1907 p. 43-44, перевод мой)

Вопрос, который ставит Кассирер в конце этого пассажа, является частично риторическим. Говоря в этом контексте о критической философии Кассирер, конечно, имеет в виду теорию Канта об априорных математических формах чувственности (трансцендентальную эстетику) и связанную с ней теорию трансцендентальной логики (то есть логики предметного познания), которая обясняет каким именно образом математические понятия применяются в физике для описания и предсказания эмпирических фактов и событий. При этом для Канта образцом математизированной физической теории служат "Математические Начала натуральной философии" Ньютона (Friedman 1992). Кассирер ясно отдает себе отчет в том, что трансцендентальная эстетика и логика Канта неадекватна новым математическим теориям включая неевклидовы геометрии и теорию множеств. В своей работе 1907-го года и в более поздних работах Кассирер пытается совместить "логистику" Рассела с новой формой трансцендендентальной логики, однако обсуждение этой части проекта Кассирера выходит за рамки этой статьи.

Интересно отметить, что тот же самый вопрос был заново поставлен и популяризирован в 1960-м году Е. Вигнером в его знаменитой статье "Непостижимая эффективность математики в естественных науках" (Wigner 1960) Как можно догадаться по названию этой статьи ее автор не дает на вопрос о причине эффективности математики в физике никакого рационального ответа. Вместо этого Вигнер в конце своей статьи пытается закрыть проблему называя эффективность математики "чудесным даром" который мы заведомо не в состоянии понять, но можем и должны с благодарностью принять и научиться им хорошо пользоваться. (Впрочем такое "решение" можно понять и как чисто риторическую провокацию, поскольку в действительности статья Вигнера 1960-го года породила обширную дискуссию, которая продолжается до сих пор (Родин 2015).)

Я со своей стороны вслед за Кассирером утверждаю, что вопрос об эффективности математики в эмпирических приложениях (которые включают в себя не только физику и другие естественные науки, но также и инженерное дело в самом широком смысле слова включая информационные технологии) остается и в настоящее время открытой проблемой, которая настоятельно требует решения (по крайней мере временного и предположительного), причем именно в контексте самой современной математики, естественных наук и техники. Действительно, из самых общих философских соображений можно утверждать, что ситуация, при которой рациональная конструкция теоретической науки содержит внерациональный "чудесный" элемент ответственный за обеспечение идеальной гармонии между математическими и эмпирическими понятиями, является нетерпимой. Вместо того, чтобы разворачивать здесь эти общие соображения, которые увели бы нас слишком далеко от предмета данной статьи, я сейчас приведу некоторые независимые и более конкретные подтверждения данного тезиса указывающие на то, что такое положение вещей действительно сегодня тормозит развитие науки. Затем я укажу на возможный путь решения этой проблемы.

Заметим, что эффективное применение новых математических методов в физике во многих случаях (хотя и не всегда) происходит только спустя значительное время после того как эти методы разрабатываются в рамках чистой математики. Так, например, основы римановой геометрии были заложены Риманом примерно за 60 лет до того, как Эйнштейн применил эту геометрию для описания физического пространства-времени в своей Общей теории относительности (ОТО). Большая часть математического аппарата физики 20-го века (Риманова геометрия, теория дифференциальных уравнений, комплексный анализ) была в основном построена еще в 19-м веке совершенно независимо от тех новых оснований математики, которые в начале 20-го века обсуждали Рассел и Кассирер. И сегодня теоретико-множественные основания математики, о которых я упоминал выше, практически никогда не попадают в поле зрения исследователей, работающих в области математической физики.

Поэтому “чудо” эффективности математики в физике первой половины 20-го века, можно по крайней мере частично объяснить своего рода понятийной инерцией: те математические понятия и теории, которые были изначально построены по классическом образцу в тесной связи с физическими интуициями (как в случае Римановой геометрии) смогли полностью реализовать свой физический потенциал только в 20-м веке (как в случае ОТО). Однако сегодня есть свидетельства того, что этот исторический ресурс уже исчерпан или близок к исчерпанию. Я сошлюсь в этой связи на авторитетное мнение Смолина, который указывает на то, что многие фундаментальные физических теории построенные в последние десятилетия 20го века (включая *струнную теорию*) оказываются принципиально эмпирически непроверяемыми, поскольку они могут быть согласованы с любыми результатами наблюдений и экспериментов. Это, разумеется, ставит под вопрос статус этих теорий как именно физических теорий (Smolin 2006). Смолин говорит в этом контексте о физических теориях, в которых используется новейшая математика развитая уже изначально на современных основаниях. Разумеется “неприятности с физикой”, на которые указывает Смолин, могут иметь самые разные причины включая те недостатки организации научных исследований, о которых он пишет в своей книге. Но я рискну предположить, что по крайней мере часть этой проблемы состоит в том, что “официальная” логическая архитектура современной математики никак не учитывает эпистемологическое требование, которое Кассирер вслед за Кантом формулирует так:

“Математические и логические понятия не должны больше служить нам инструментами для построения метафизических ‘мысленных миров’; их функция и их применение должны быть ограничены пределами эмпирических наук.” (Cassirer 1907) , стр. 43, перевод мой) а наоборот обеспечивает ничем неограниченную свободу мысленного аксиоматического конструирования математических теорий. В этой связи можно вспомнить знаменитое высказывание Кантора согласно которому “сущность математики - в ее свободе” (Кантор 1985, стр. 80). Такая особенность аксиоматической архитектуры затрудняет применение новых математических теорий в физике, а когда такие применения все-таки находятся, то возникает вопрос, можно ли получившуюся в результате теорию считать в полном смысле слова физической или же ее скорее нужно отнести к области математизированной спекулятивной метафизики (как в случае струнной теории).

Интересно заметить, что некоторые работающие математики готовы согласиться с только что упомянутым ограничительным требованием Кассирера. Так, например, В.И. Арнольду принадлежит знаменитая фраза о том, что “математика это часть физики, в которой эксперименты стоят дешево” (Арнольд 1998). Многие современные выдающиеся математики включая тех, которые не делают такого рода публичных высказываний, в своей ежедневной работе тем не менее активно и сознательно пользуются физическими и другие эмпирическими мотивировками и при этом стараются по возможности не придавать большого значения “официальным” теоретико-множественным основаниям своих рабочих теорий (Ю.И. Манин, М. Концевич, А. Конн и многие другие). Однако для нашего обсуждения вопрос об архитектуре математических теорий является более существенным, чем те или иные индивидуальные философские предпочтения и стили математического мышления отдельных ученых. Ведь именно эта архитектура используется для окончательного представления полученных математических знаний в учебниках и передачи этих знаний новым поколениям исследователей. Поэтому проблемы в основаниях и архитектуре математических теорий не могут быть раз и навсегда решены за счет простого отказа от всяких определенных оснований и всякой стандартной архитектуры в пользу особенностей индивидуального стиля работы отдельных выдающихся математиков.

Поэтому мне кажется интересным и продуктивным в современном контексте вернуться к той постановке вопроса об основаниях математики, о которой в 1907-м году писал Кассирер, и попытаться поискать альтернативные решения, которые более детально описывали бы возможности применения математики в эмпирических теориях, а не оставляли бы этот вопрос на волю случая, “чудесного дара” и т.д. Эта задача имеет как философский, так и чисто математический аспект. В философском плане решение этой задачи может не сводиться к новой попытке модернизации философии Канта - подходящее решение может иметь и другие источники. Тем не менее я хочу подчеркнуть, что сама постановка данной проблемы в современном контексте вновь делает кантианскую философию математики актуальной областью исследований, а не анахронизмом, какой ее себе представлял Рассел и его многочисленные последователи.

Что же касается математической стороны дела, то я хочу указать здесь на некоторые новые направления в исследованиях по основаниям математики, которые, как мне представляется, могут помочь сделать современную математику более дружественной по отношению к физике и технике. Это прежде всего теория категорий и связанная с ней теория топосов. Идея использования этих теорий в основаниях математики в качестве альтернативы аксиоматической теории множеств принадлежит Лаверу, который впервые высказал эту идею еще в конце 1960-х годов. Первые попытки применения теории топосов в математической физике были предприняты в 1990-х годах Ишамом и Дорингом (Christian Isham and Andreas Doering). Попытки более широкого применения категорного языка в математическое физике (в том числе за рамками классической теории топосов) предпринимаются начиная с 2000-х годов Баесом (John Baez) и уже вызвали большой продолжающийся поток научных публикаций в области математической физики. Обзор, библиографические ссылки и философское обсуждение этой литературы можно найти в моей статье (Родин 2010). Самой свежей в этом ряду (и поэтому не вошедшей в только что указанный обзор) является принадлежащая Воеводскому идея Унивалентных оснований математики (Voevodsky 2013), которая также уже нашла приложения в математической физике (Shreiber 2013). Обсуждение возможностей применения этой последней теории в физике с эпистемологической точки зрения можно найти в моей монографии (Rodin 2014, pp. 210-214)

Математическое понятие категории, которое используется во всех этих теориях, в отличие от абстрактного понятия бесконечного множества, допускает многообразные конкретные геометрические и физические интерпретации. Это позволяет связать воедино основания математических и физических теорий и развивать математическую физику таким же синтетическим способом, которым пользовались Ньютон и Эйнштейн, а не пытаться подбирать подходящий математический аппарат для данной физической теории наугад не имея при этом никакого ответа на вопрос о том, почему та или иная математическая теория вдруг оказывается подходящей. Если теоретико-множественная математика говоря словами Кассирера конструирует “метафизические мысленные миры”, которые только иногда “по счастливой случайности” оказываются похожими на реальный физический мир, то категорная математика подобно старой доброй евклидовой геометрии предоставляет возможности физической интерпретации уже на уровне своих оснований.

Нужно подчеркнуть, что новые исследования в области математической физики, о которых я только что упомянул пока не привели к созданию новых законченных и проверенных на опыте физических теорий. Сказанное выше о категорных основаниях основаниях математики и связи таких оснований с физикой также не является на сегодняшний день общепринятой точкой зрения и требует более подробного и более технического обсуждения. Однако именно поэтому, как мне представляется, эти новые направления математических и физических исследований особенно интересны для философского обсуждения. Сейчас кажется очевидным, что Рассел и Кассирер были оба совершенно правы в том, что новейшие исследования и результаты в основаниях математики и физики начала прошлого 20-го века имели большое значение для философии. Я думаю, что наша современная ситуация начала 21-го века является в этом отношении совершенно аналогичной. При этом, как это очень часто случается в истории философии, новый философский взгляд на науку может неожиданно оказаться хорошо забытым старым.

Список литературы:

Арнольд В.И., О преподавании математики // Успехи математических наук 53:1 (1998), с. 229–234

Бонола Р., Неевклидова геометрия, Москва, Либроком, 2010

Кантор Г., Основы общего учения о многообразиях // Труды по теории множеств, Москва, Наука, 1985, с. 63-106

Родин А., Программный реализм в физике и основания математики // Вопросы философии N4-5 за 2015 год (в печати)

Родин А., Теория категорий и поиск новых математических оснований физики // Вопросы философии N6 за 2010 год, с. 67–82

Cassirer E., Kant und die moderne mathematik. Kant-Studien, 12 (1907), S. 1-40

Friedman M., Ernst Cassirer and Contemporary Philosophy of Science // Angelaki, 10 (2005), pp. 119-128

Friedman M., Kant and the Exact Sciences, Harvard University Press, Cambridge, 1992

Heis J., Ernst Cassirer's Neo-Kantian Philosophy of Geometry // British Journal for the History of Philosophy, 19:4 (2011), pp. 759-794

Heis J., “Critical philosophy begins at the very point where logistic leaves off”: Cassirer’s Response to Frege and Russell // Perspectives on Science, 18:4 (2010) pp. 383-408

Jonson A.K., Neo-Kantianism, Internet Encyclopedia of Philosophy, http://www.iep.utm.edu/neo-kant/ (просмотрено 19.01.2015)

Pulkkinen J., Thought and Logic: The Debates Between German-Speaking Philosophers and Symbolic Logicians at the Turn of the 20th Century, P. Lang, 2005

Rheinberger H.-J., On Historicizing Epistemology. Stanford University Press, 2010

Rodin A., Axiomatic Method and Category Theory (Synthese Library vol. 364), Springer, 2014.

Russell B., Principles of Mathematics, Allen and Unwin, London, 1903

Russell B., A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz , London and New York, Routledge, 1996

Schreiber U., Classical field theory via Cohesive homotopy types, arXiv:1311.1172 (2013) (просмотрено 19.01.2015)

Smolin L., The Trouble With Physics, Houghton Mifflin Harcourt, 2006

Voevodsky V. et al., Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Institute for Advanced Studies (Princeton) 2013

Wigner E., The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences // Commun. Pure Appl. Math. 13, pp. 1-14 (1960)