АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ: ПРАГМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

СЕРГЕЙ КОВАЛЁВ И АНДРЕЙ РОДИН

1. Введение

Хотя история формальных логико-математических методов восходит по крайней мере к Лейбницу, только в 20-м веке математическая логика оформилась как самостоятельная дисциплина, а формальные символические методы стали широко применяться в логике вообще и в философской логике в частности. Компьютерная революция последних нескольких десятилетий дала дополнительный толчок для развития формальных логических исчислений и теории таких исчислений; в наши дни значительная часть такого рода исследований имеет практическую направленность и производится в дисциплинарных рамках компьютерной науки (Computer Science). Несмотря на эти безусловные успехи, более внимательный взгляд на историю показывает, что далеко не все надежды связанные с применением формальных средств в науке и технике на сегодняшний день оправдались. В научной и научно-популярной литературе в этой связи часто ссылаются на математические результаты Геделя, Тюринга и Тарского, которые устанавливают важные теоретические пределы возможностей формализации [1]. Эти фундаментальные ограничения формального аксиоматического метода широко обсуждалась и продолжают обсуждаться в философской литературе, и мы не будем больше к ним возвращаться в этой статье. Вместо этого мы сосредоточим наше внимание на тех пока нереализованных (или только частично реализованных) возможностях формальных методов, которые, как мы постараемся показать, смогут быть реализованы в ближайшем будущем. Наша цель состоит в том, чтобы проанализировать те трудности, с которыми столкнулись попытки реализации этих проектов в прошлом, и обсудить перспективные способы преодоления этих трудностей. Мы покажем, что часть этих трудностей имеет не чисто технический, а скорее концептуальный характер, что делает уместным не только логико-математический, но и более широкий философский подход к данной проблеме.

Говоря о прагматике аксиоматического метода мы имеем в виду не формальный аспект логических исчислений наряду с синтаксисом и семантикой, а проблему применения

Работа поддержана грантом РГНФ 13-03-00384.

[1]В частности, из этих результатов следует невозможность для формальной теории содержащей арифметику формально доказать собственную непротиворечивость, а также отсутствие универсального алгоритма проверяющего любой данный алгоритм на возможность “зацикливания”.

аксиоматического метода на практике. Под практикой мы здесь имеем в виду в первую очередь практику научной работы - в математике, естестественных и компьютерных науках - а также инженерию и информационные технологии.

2. Формальный аксиоматический метод и его применения

Представляя публике свою программу формализации математики в 1927 году, Гильберт [25] высказал надежду на то, что в недалеком будущем формальный аксиоматический метод станет "основным инструментом всякого теоретического исследования". Под теоретическими исследованиями Гильберт имеет здесь в виду не только чистую математику, но и естественные науки, прежде всего физику. Об этом можно судить с уверенностью постольку, поскольку вопросами аксиоматизации физики Гильберт занимался на протяжении большей части своей научной карьеры [10] - а в 1900 году включил задачу аксиоматизации физики в свой знаменитый список из 23-х важнейших открытых математических проблем [24] (6-я проблема Гильберта).

В какой мере этот проект формализации математики и естественных наук можно сегодня считать реализованным? Мы попробуем ответить на этот вопрос рассматривая отдельно ситуацию в математике, естественных науках, а также информационных технологиях и компьютерных науках.

2.1. **Математика.** Когда заходит речь об исследованиях на стыке логики и математики, обычно сразу обращают внимание на *математическую логику*. Эта относительно молодая дисциплина возникла в результате успешного применения в традиционной логике математических методов. Ранние попытки такого рода делал Лейбниц на рубеже 17-18 веков и Дж. Буль в 19-м веке. Сегодня математическая логика (включая теорию моделей) - это развитая математическая дисциплина, в которой как и в любой другой научной дисциплине есть свои классические результаты (включая результаты Геделя, о которых мы упоминали во Введении), открытые проблемы и конкурирующие исследовательские программы.

Однако очевидный успех в 20-м веке математической логики как новой дисциплины и исследовательского проекта сам по себе еще ничего не говорит об успехе или неудаче гильбертовского проекта формальной аксиоматизации математики. Хотя в некоторых специальных случаях разница между использованием математики в логике и использованием логики в математике может стираться до неразличимости, в общем случае эти две вещи необходимо различать. Чтобы оценить значение логики для математики в целом, необходимо исследовать вопрос о роли логических методов в широком спектре математических дисциплин - в алгебре, теории чисел, геометрии, топологии, математической физике, и т.д. - а не ограничиваться математическими дисциплинами связанными с логикой каким-то специальным образом (как, например, аксиоматическая теория множеств).

Хотя каждая из упомянутых математических дисциплин требует специального подробного исследования, общая ситуация может быть описана следующим образом. С одной стороны, математическая логика и формальный аксиоматический метод являются ключевыми элементами стандартных теоретико-множественных *оснований* математики. Эти основания могут быть *в принципе* использованы для любой (или почти любой [2]) старой или новой математической теории независимо от того, к какой специальной математической дисциплине относится эта теория. В этом смысле можно утверждать, что формальные логические методы действительно имеют для современной математики универсальное значение. С другой стороны, можно заметить, что логические методы в явном виде практически никогда не используются в математике за пределами исследований по основаниям математики и теории множеств. Поэтому можно также с уверенностью сказать, что в современной практике математических исследований логические методы имеют весьма ограниченную область применения.

Таким образом мы имеем в современной математике следующую ситуацию, которую можно охарактеризовать как шизофреническую. Практически любая математическая теория, которую профессиональное математическое сообщество считает хорошо проверенной и установленной, *в принципе* допускает стандартную теоретико-множественную формализацию. Однако во всех этих случаях речь идет только о *принципиальной возможности* формализации, а вовсе не об эффективной реализации этой возможности. Чтобы показать принципиальную возможность формализации данной (неформальной) математической теории T как правило пользуются обычными (то есть неформальными) математическими аргументами. Утверждение о том, что данная теория T может быть (в принципе) представлена в виде некоторой формальной теории T^F, может быть затем использовано в качестве слабого необходимого условия корректности T. Разумеется, такое условие не является достаточным: принципиальная (но не реализованная!) возможность формализовать T в виде T^F не позволяет использовать T^F для проверки корректности рассуждений в T. Хотя такая проверка в рамках описываемого подхода признается в принципе возможной, практически она оказывается недоступной.

С наивной точки зрения можно было бы ожидать, что использование электронной вычислительной техники, которая позволяет пользователю многократно увеличить свои вычислительные ресурсы (по сравнению с традиционными вычислениями на бумаге), может помочь уменьшить разрыв между тем, что возможно в принципе, и тем, что возможно на практике. На самом деле использование современных компьютеров делает этот разрыв еще более явным, а также показывает, что граница между возможным и действительным в данном случае устроена более сложно, чем это казалось ранее. Наивные соображения о том, что "если бы у нас было больше времени и ресурсов, мы бы сделали то-то и то-то" и философские дискуссии о конечном и бесконечном в

[2]Некоторые существующие теории требуют расширения стандартных методов формализации с помощью аппарата *универсумов Гротендика* [5] и других специальных средств, но мы сейчас не будем специально заострять внимание на таких сложных случаях.

этом новом контексте уступают место более специальным аргументам связанным с вычислимостью и алгоритмической сложностью. На сегодняшний день формальная компьютерная проверка математических рассуждений (доказательств) остается на стадии теоретической разработки и отдельных успешных попыток, о которых мы более подробно будем говорить ниже. Как и сто лет назад корректность математических доказательств устанавливается сегодня профессиональным экспертным сообществом (за единичными исключениями [3]) "вручную" .

Таким образом между "официальными основаниями" математики и математической практикой - включая исследовательскую и образовательную практику, а также практику применения математических методов в других науках и в технике - сегодня существует весьма значительный разрыв или, если использовать более нейтральный термин, значительная дистанция. Философы, логики и математики специализирующиеся в области оснований описывают математические теории в виде, который разительно отличается от того, как эти же самые теории представлены в стандартных математических публикациях и учебниках. Философы и логики обычно объясняют это тем, что в своей ежедневной работе математики пользуются не вполне строгим неформальным языком, который тем не менее позволяет математикам эффективно обмениваться результатами и проверять эти результаты. Некоторые философы и логики видят в таком положении вещей вполне естественное разделение труда, которое позволяет математикам оставить все вопросы оснований на откуп специалистам, и самим заниматься более содержательными аспектами математических проблем и теорий. В то же время многие авторитетные математики высказываются в том духе, что стандартные основания математики вовсе не имеют никакого отношения к их работе и создают заведомо неадекватное представление об их науке (см. например [69]).

Вместе с тем было бы все же неверно утверждать, что логические методы в математике и связанные с ними философские представления о математике в 20м веке (включая логицизм Рассела и формализм Гильберта) вовсе не оказали никакого влияния на математику в целом. "Полуформальная" версия аксиоматического метода в духе раннего Гильберта [26] в сочетании с так называемой "наивной", то есть содержательной, а не формально-аксиоматической версией теории множеств сегодня широко используется в качестве стандартного средства представления математических теорий, особенно в университетских учебниках. Важнейшей попыткой найти действенный компромисс между требованиями формальной и логической строгости, с одной стороны, и требованиями математической практики, с другой стороны, стал опубликованный во второй половине 20-го века группой французских математиков использующей псевдоним Н. Бурбаки многотомный труд "Элементы Математики" [4]. Хотя в математическом сообществе сегодня преобладает скорее негативная оценка этого фундаментального труда,

[3] Первое доказательство нетривиального математического утверждения, в котором существенную роль играл компьютер, было опубликовано в 1977-м году Аппелем и Хакеном [1], [30]. Речь идет о решении известной проблемы (ставшей после 1977-го года теоремой) *четырех красок*. Интересное философское обсуждение этого прецедента можно найти в [61].

он тем не менее внес значительный вклад в систему профессионального математического образования во второй половине 20го века во всем мире. Более современная попытка найти компромисс между требованиями логической строгости и сложившейся математической практикой была предпринята в 1999 году Полом Тэйлором [60]. Несмотря на существенные отличия “практических оснований” Тэйлора от стандартных теоретико-множественных оснований, Тейлор также использует первопорядковую (классическую и интуиционисткую) логику в качестве базиса своей конструкции. То же самое замечание можно сделать и о *теории категорий и топосов*, которую некоторую авторы предлагают в качестве альтернативных оснований математики [36], [45]. Впрочем, использование теории категорий и топосов в качестве основания математики не только позволяет заменить стандартную аксиоматическую теорию множеств на другую первопорядковую теорию, но и открывает возможности для модификации стандартной аксиоматической архитектуры теорий [49]. Мы вернемся к этому вопросу ниже, когда будем говорить о применениях теории топосов в физике.

Приведенный выше краткий обзор показывает, что высокие ожидания Гильберта и его последователей в отношении практических перспектив широкого применения в математике формальных логических методов на сегодняшний день пока не оправдались - несмотря на то, что в разработке самих этих методов за прошедшие десятилетия произошел очень значительный прогресс. Таким образом вопрос о практическом применении логических методов в математике остается в значительной степени открытым. В следующем разделе статьи мы обсудим некоторые новейшие подходы, которые дают основания для оптимизма.

2.2. **Физика.** В 1900 г. на международном математическом конгрессе в Париже Гильберт публично представил свой ставший впоследствии знаменитым список из 23 нерешенных математических проблем [24]. Шестым номером в этом списке идет проблема аксиоматизации фундаментальных физических теорий. Эта проблема до сих пор остается в основном открытой, а по поводу ее актуальности для современной науки высказываются различные и зачастую полярные мнения.

Известные на сегодняшний день попытки аксиоматического представления физических теорий можно условно разделить на два основных типа. Попытки первого типа используют понятие формальной аксиоматической теории в духе Гильберта-Тарского [59] в сочетании с классическим исчислением предикатов (обычно только первого порядка). Попытки второго типа используют традиционное неформальное понятие об аксиоматической теории в сочетании (в некоторых случаях) с идеей неклассической *квантовой* логики. Если попытки первого типа принадлежат исключительно логикам и философам науки, то попытки второго типа принадлежат в основном самим физикам. Как мы сейчас увидим, на сегодняшний день “аксиоматика логиков и философов” и “аксиоматика физиков” существенно отличаются друг от друга - вплоть до того, что значительная часть логического и философского сообщества вовсе не признает аксиоматические построения физиков в качестве таковых. Таким образом, в современной физике вопрос об адекватности “аксиоматического подхода логиков” существующей научной практике стоит еще более остро, чем в чистой математике. Тем не менее, как мы покажем в следующем разделе статьи, задача конвергенции различных подходов к аксиоматизации физических теорий не является безнадежной. Мы опишем некоторые важные результаты достигнутые в этом направлении в последние годы, которые позволяют нам смотреть на перспективы аксиоматического подхода в физике с осторожным оптимизмом.

Подробный обзор исследований в области аксиоматизации физики до 1972-го года, а также содержательную дискуссию о значении аксиоматического метода в физике можно найти у Бунге [6], [7]; в этих же работах Бунге описывает и свои собственные попытки аксиоматизации физических теорий. Работа самого Бунге так же как и большинство рассматриваемых в его книге более ранних работ, которые мы не будем здесь перечислять, относится к физической аксиоматике первого типа ("аксиоматика логиков и философов"). Следуя Тарскому [59] Бунге формулирует основные предпосылки своего подхода к аксиоматизации физики следующим образом:

> Существует единственная теория, которая строится с нуля, а именно математическая логика. [..] Все другие теории предполагают по меньшей мере логику и как правило используют дополнительные предположения. Говоря более точно, минимальная теория, которую всякая математическая и вообще всякая научная теория принимает как данность - это обычная [то есть классическая] двузначная логика предикатов [по-видимому, первого порядка] дополненная микротеорией тождества. Эта минимальная теория необходима и достаточна для того, чтобы анализировать понятия, формулы и рассуждения в науке и в математике - точнее говоря для того, чтобы анализировать их форму. Кроме обычного исчисления предикатов существуют другие логические теории такие как модальная и многозначная логика, однако логика, встроенная в большинство математических и во все физические теории - это именно логика предикатов. ([7], стр. 135, перевод авторов)

Автор называет свое только что процитированное суждение "общим местом" (platitude, *ibid.*) очевидно имея в виду то обстоятельство, что его точка зрения в данном случае не является оригинальной. Однако это вовсе не означает, что эта точка зрения разделяется (или разделялась во время выхода в свет книги Бунге) в равной мере всеми заинтересованными сторонами, включая всех без исключения физиков, логиков и философов. Прежде чем мы рассмотрим важные возражения и некоторые альтернативные подходы, подчеркнем, что только что процитированное суждение Бунге носит нормативный, а не описательный характер; оно говорит нам о том, как физики (или любые другие теоретики) *должны* строить свои теории, а вовсе не о том, как они это на самом деле делают. Попытка Бунге аксиоматизировать физику представляет собой попытку перестройки физики по заранее заданному образцу. Хотя эта задуманная перестройка касается только формы, но не содержания физической теории, в данном случае речь идет о предъявлении к физическим теориям определенных требований (которые принято называть *формальными* требованиями). Предъявляя такого рода требования к физической теории, Бунге исходит из того, что вопрос о форме физической теории находится в компетенции не физиков, а логиков и философов и может быть решен независимо от любых физических соображений. Кроме того Бунге считает, что общий ответ на этот вопрос уже известен: логическая форма физической и любой другой научной теории описывается понятием аксиоматической теории в смысле Гильберта-Тарского [59], которое использует классическое исчисление предикатов (КИП).

Общие философские и более специальные технические аргументы в пользу такого подхода можно найти в классических работах Фреге, Рассела и других пионеров новой логики, однако их подробное рассмотрение в этой статье завело бы нас слишком далеко. Не вдаваясь глубоко в философскую полемику о природе логики и других подобных общих вопросах, мы укажем только на фундаментальное возражение против подхода Бунге, которое сделал Патнем [48] (и ранее делали многие другие авторы, на некоторых из которых Патнем ссылается в своей работе). Согласно Патнему логическая часть физической теории подлежит эмпирической проверке наравне с любой другой частью этой теории. Поскольку квантовая теория (а) является эмпирически проверенной с высокой степенью надежности и (б) приводит к логическим парадоксам, есть смысл скорректировать обычно используемую классическую логику заменив ее на подходящую *квантовую* логику, в которой таких парадоксов не возникает. Использовать старую логику в новой фундаментальной физической теории, с точки зрения Патнема, значит недооценивать степень новизны этой новой теории. Критический разбор аргументов Патнема и интересные контраргументы можно найти у Даммита [15]. Со своей стороны мы заметим, что стандартная архитектура аксиоматических теорий, которую использует Бунге, допускает использование вместо КИП других логических исчислений, включая различные варианты квантовой логики. Поэтому вопрос об адекватности подхода Бунге не сводится к вопросу о выборе базового логического исчисления, но включает в себя и вопрос об адекватности выбранной аксиоматической архитектуры. Мы вернемся к этому последнему вопросу ниже.

Идея о том, что с квантовой теорией может быть связана особая неклассическая логика, была впервые высказана фон Нейманом в книге 1932-го года [65], которую этот автор рассматривал в качестве попытки аксиоматического построения квантовой теории; более систематично и основательно понятие о квантовой логике было введено фон Нейманом и Биркгофом в статье 1936-го года [21]. Работа фон Неймана определенно относится к "аксиоматике физиков"; в отличие от работ Бунге книга фон Неймана [65] стала классической в своей области и оказала существенное влияние на дальнейшее развитие квантовой теории. Реакция Бунге на эту работу фон Неймана является типичной и хорошо характеризует непростые взаимные отношения между логиками интересующимися физическими приложениями своей науки, с одной стороны, и физиками пытающимися пользоваться логическими методами и подходами, с другой стороны:

> Ошибочно думать, что фон Нейман действительно построил аксиоматические основания квантовой механики. В его изложении отсутствуют все характеристики современной аксиоматики: он не предъявляет своих предпосылок, не указывает основные понятия своей теории, не перечисляет основные предположения (аксиомы), не предлагает последовательной физической интерпретации своего формализма. В его изложении много противоречий и наивных утверждений философского характера. И тем не менее, по какой-то странной причине эта работа считается образцом физической аксиоматики. ([7], стр. 132, перевод авторов)

Бунге совершенно прав в том, что изложение фон Неймана даже приблизительно не удовлетворяет тем стандартам аксиоматической теории, на которые ориентируется сам Бунге и которые он называет “современными”. В частности, в ней отсутствует всякое четкое разделение синтаксиса от семантики, которое является базовым для формального аксиоматического метода. Такой же полуформальный (или вовсе неформальный) характер имеют и другие известные попытки аксиоматизации физических теорий, которые мы выше назвали “аксиоматикой физиков”. Кроме классической книги фон Неймана в этом ряду необходимо также упомянуть (не упомянутую Бунге) важную работу Маки [39]; современный обзор можно найти в [9], см. также [47].

Идея формального аксиоматического построения квантовой теории на основе квантовой логики была выдвинута - но не реализована в соответствии с существующими в то время логическими стандартами - ученицей де Бройля Паолеттой Феврие [13]. Эта работа была подвергнута жесткой критике Суппесом и МакКинзи [44], по мнению которых проект Феврие требовал полной перестройки успешно используемой в квантовой теории классической математики и поэтому был заведомо нереалистичным. В статье 1974-го года с говорящим названием “Лабиринты квантовых логик” [62] ван Фраассен предпринял попытку переформулировать ранее высказанные фон Нейманом, Рейхенбахом и некоторыми другими авторами неформальные соображения о квантовой логике в соответствии с принятыми в философском сообществе логическими стандартами. Результатом этой работы стало не одно определенное логическое исчисление, а описание целого семейства таких исчислений. В 2004 году такого же рода работа была проделана Чиарой, Джунтини и Гричи [9], которые пришли к ожидаемому заключению, что на протяжении четверти века после публикации статьи ван Фраассена “лабиринт квантовых логик становился все более и более лабиринтным” (op. cit. стр. 268-269) . Как и многие другие логики и философы ван Фраассен отказывается рассматривать квантовую логику в качестве средства аксиоматической перестройки и дальнейшего усовершенствования квантовой теории и ограничивает задачу исследований в этой области логическим анализом физической теории не претендующим ни на какое прямое вмешательство в эту теорию.

Осторожную позицию ван Фраассена можно признать разумной, однако нужно иметь в виду, что она делает исследования в области квантовой логики неинтересными и нерелевантными для физиков, которые как правило интересуются логическими методами только постольку, поскольку такие методы могут что-то дать их науке. Впрочем есть по крайней мере одна важная область исследований, в которой квантовая логика и квантовая физика не могут быть отделены друг от друга традиционными дисциплинарными границами: это теория квантовых вычислений [42] [23]. Формальный аппарат, который используется в этих работах для представления квантовой логики (или, точнее, квантовых логик), значительно отличается от символических средств используемых обычно в философской логике: в теории квантовых вычислений для этих целей как правило используют язык теории категорий [11].

В 1971-м году Снид [54] опираясь на идеи Суппеса [28] предложил альтернативный подход (точнее, целый ряд таких подходов) к логической реконструкции физических теорий, в которых теория отождествляется не с системой высказываний (аксиом и теорем) выраженных на подходящем формальном языке, а с некоторым классом моделей. Такой подход (который развивался независимо и другими авторами) получил название *непропозиционального* (non-satement view) или *семантического* [63]. Эти идеи получили развитие в работах Штегмюллера [56], Бальцера и Мулинеса (в сотрудничестве со Снидом) [67]; впоследствии к этому проекту присоединились и другие исследователи [2] [66]. Как замечает Штегмюллер, все попытки использовать стандартный аксиоматический подход (в духе Бунге) для представления современных физических теорий (а не только для специально подобранных фрагментов таких теорий) сталкиваются с непреодолимыми практическими трудностями. Выход Штегмюллер видит в том, чтобы вслед за математиками использовать полу-формальный аксиоматический стиль в духе Бурбаки для представления физических и других естественно-научных теорий. [4]. Однако несмотря на то, что в развитие проекта Снида-Штегмюллера на протяжении нескольких десятилетий вкладывались довольно значительные усилия, на сегодняшний день можно констатировать, что результаты этих исследований не нашли никакого применения в физических исследованиях или в физическом образовании. То же самое можно сказать и о попытках использовать этого подход в других науках. Данный подход позволяет реконструировать научные теории в форме, которая может быть полезна для логического и философского анализа, но которая на практике оказывается совершенно неподходящей для научных публикаций и учебников. Разумеется, ссылка на существующую практику не может служить основанием для каких-то окончательных выводов, и вопрос о том, стоит ли вообще пытаться использовать в науке какие-либо формально-логические стандарты представления теорий или же лучше полностью оставить все вопросы формальной структуры теорий на откуп логикам и философам, остается открытым. Ниже мы приведем некоторые аргументы в пользу первой точки зрения.

[4]Вслед за Бурбаки Штегмюллер связывает свою семантическую версию аксиоматического подхода с философией *структурализма* отсекая, впрочем, многие направления философского структурализма как нерелевантные.

Говоря о применениях аксиоматического метода в физике, отдельно нужно упомянуть о попытках использовать для этих целей теорию топосов. Идея применения этой теории в физике была впервые высказана Лавером в лекциях 1967-го года и опубликована в 1979-м году [33], см. также [34]. В конце 1990-х и начале 2000-х годов этот подход был распространен на квантовую теорию Баттерфилдом и Ишамом [8]; более подробный обзор можно найти в [73]. Физические приложения теории топосов имеют самое непосредственное отношение к аксиоматизации физики благодаря понятию *внутренней логики* топоса. Внутренняя логика - это формальное логическое исчисление, которое каноническим образом связывается с каждым топосом и отражает все специфические характеристики данного топоса [40]. Таким образом использование теории топосов в качестве математического основания физической теории работает также и как *логическое* основание. Понятие внутренней логики топоса при этом допускает реалистическую интерпретацию (в духе упомянутого выше подхода Патнема) как объективной структуры физической реальности тесно связанной с геометрической структурой физического пространства-времени [14] [74]. Лавер [35] в аналогичном контексте использует понятие *объективной логики*, которое он заимствует у Гегеля (см. подробнее [49], раздел 5.8). Попытки использовать теорию топосов в основаниях физики тесно связаны с исследованиями в области категорной квантовой логики и квантовых вычислений, о которых мы уже упоминали выше.

В следующем разделе статьи мы более подробно скажем о том, как понятие внутренней логики используется в новых попытках аксиоматизации физики с помощью другого математического аппарата, а именно аппарата *гомотопической теории типов*.

2.3. **Биология.** Среди ранних попыток аксиоматического построения биологической теории следует упомянуть работу Вудгера 1937-го года [68], в которой автор пытается использовать для этой цели формализм *Principia Mathematica* Рассела и Уайтхеда. Проект Вудгера имел практическую направленность в том смысле, что ставил своей целью построения биологической теории в соответствии со стандартами формальной логической строгости в духе Тарского (с которым Вудгер лично сотрудничал во время написания этой книги). Подобно тому, как это случилось в математике и физике, эта попытка непосредственного применения в научной практике понятия теории сформулированного логиками и философами не получила значительного развития в сообществе биологов [22] и кроме того подверглась жесткой критике со стороны более молодого поколения философов биологии [46]. Интересно заметить, что как сторонники, так и противники идеи использования формальных логических методов в биологии часто говорят об этом как о переносе в биологию методов точных наук включая математику и физику. На самом деле, как мы только что показали, использование логических методов в математике и физике сталкивается с аналогичными трудностями.

Известные нам более поздние попытки аксиоматизации биологических теорий (и фрагментов таких теорий) ставят своей целью логический и эпистемологический анализ этих теорий и не предполагают непосредственного использования формальных логических методов в биологических исследованиях и в биологическом образовании. В качестве свежего примера такой работы см. [64], где также можно найти обширные ссылки на более раннюю литературу.

2.4. **Компьютерные и инженерные науки.** Несмотря на то, что идея использования формальных символических исчислений в инженерии была высказана Лейбницем еще в 17-м веке [38], часто считают, что мысль инженеров и программистов направлена на "сугубо практическое" принесение пользы потребителям технических изделий, в то время как аксиоматический метод является квинтэссенцией "чисто теоретического" мышления бесполезного по определению. С этой точки зрения проверка полезности изделия путем натурного либо виртуального испытания представляется гораздо более значимой, чем формальное математическое доказательство правильности его функционирования. Ситуация усугубляется тем, что аксиоматизация изделия в объеме, достаточном для доказательства его потребительских свойств, требует очень высоких затрат труда и времени. Поэтому практическому знанию обычно придается форма шаблонов или рецептов предназначенных для многократного воспроизведения в различных контекстах (зачастую неоправданно широко обобщенных). Даже хорошо аксиоматизированные виды изделий, такие как геометрические тела или тепловые двигатели, в прикладных науках как правило рассматриваются рецептурно, без обращения к формальному выводу.

Тем не менее, известен ряд попыток систематически внедрить традиционный аксиоматический метод в программирование и в инженерию. Например, уже около полувека разрабатывается аксиоматический подход к описанию функционирования программ на алгебраическом языке, позволяющий строго доказывать их корректность [27]. Операторы программы рассматриваются как правила вывода специфической дедуктивной системы, так что путем доказательства можно проверять правильность результатов исполнения программы (пост-условия) при правильных исходных данных (пред-условиях). А в аксиоматическом проектировании (axiomatic design) [58] [37] [16] [17] предлагается формально описывать и инженерный проект как матрицу-оператор, преобразующий вектор функциональных параметров изделия в вектор проектных параметров конструкции. Аксиомы здесь определяют, какие матрицы отвечают "правильным" проектам. Однако, в большинстве случаев привлечение подобных подходов в конкретных проектах сопряжено с затратами, превышающими видимый полезный результат.

Более перспективным подходом представляется подход, когда в качестве аксиом выступают положения, нормирующие деятельность программистов и инженеров. Тогда можно в явной форме потребовать соблюдения аксиом при организации технической деятельности и таким образом обеспечить применимость и эффективность результатов, выведенных из этих аксиом. Конечно, здесь интерес представляет только конструктивный аксиоматический метод: правила конструирования объектов *описывают* деятельность, а аксиомы *предписывают* выполнять ее так, чтобы достигать желаемых результатов. С этой точки зрения частными случаями аксиоматических систем можно считать многие технические стандарты и методики.

В качестве примера применения такого подхода приведем понятие *аспекта* (aspect) в компьютерной науке. Программисты называют аспектами примитивные функции систем, которые не поддаются локализации в рамках отдельных модулей, а "рассеиваются" по всей системе, многократно дублируясь и перепутываясь с реализацией различных алгоритмов. Примерами аспектов служат ведение журналов функционирования системы, защита информации и т.д. Для повышения эффективности программной реализации аспектов в конце 1990-х годов была предложен новый подход - аспектно-ориентированное программирование (АОП) [31]. Были созданы специальные автоматизированные средства для подключения аспектов к системе путем связывания (weaving), избавляющего от необходимости вручную многократно дублировать программный код. Однако область применения средств АОП оказалась очень ограниченной, в том числе из-за отсутствия общей семантической модели аспекта, не привязанной к частным языкам и технологиям программирования [57] . В частности, наивная трактовка аспектов, как это часто бывает, содержит порочный круг: аспект определяется как единица, подключаемая к системе путем связывания, а связывание - как способ подключения аспектов.

В целях повышения отдачи от АОП, был привлечен конструктивный аксиоматический метод. Строгое определение понятия аспекта было сформулировано в рамках теоретико-категорного описания процессов разработки программных систем [70]. В качестве аспектов рассматриваются системные единицы, детализация которых из примитивных требований приводит к перепутыванию с другими единицами. В теоретико-категорном подходе системные единицы формализуются как объекты подходящей категории, примитивное требование - как терминальный объект, а детализация и перепутывание - как морфизмы соответствующих видов. Отсюда получается строгое конструктивное определение аспекта лишенное порочного круга. Оно позволяет выявлять аспекты и эффективно применять АОП при создании широкого круга систем и технологий программирования.

Аксиоматический метод используется в компьютерных науках также в работах по автоматизации дедуктивного вывода. Программы предназначенные для доказательства теорем (proof assistants) создавались начиная с 1950-х годов. Сначала ожидалось, что результаты будут ошеломляющими: был придуман метод резолюций - относительно простой алгоритм вывода первопорядковых формул вида $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ (хорновских дизъюнктов) [75]. Однако эффект от его применения оказался значительно ниже ожиданий. Выяснилось, что компьютер не может "наблюдать" свойства математических объектов, составляющие содержание аксиом и теорем в традиционном аксиоматическом методе, в каком бы то ни было смысле. Компьютер способен только конструировать объекты, шаг за шагом применяя финитные рекурсивные правила к финитным исходным данным. Тщательный анализ этой проблемы привел к появлению нового подхода в основаниях математики, который мы обсудим в следующем разделе.

3. Перспективы аксиоматического метода

Краткий исторический обзор применения формального аксиоматического метода в науке и технике, который мы сделали выше, может дать повод для пессимистических выводов. Первоначальный энтузиазм по поводу перспектив применения аксиоматического метода в физике и биологии, который адепты этого метода высказывали в 1930-1950х годах, во второй половине 20-го века сменился более сдержанными оценками. Внимательный анализ показывает, что даже в области "чистой" математики успехи применения формальных логических методов являются гораздо более скромными, чем это может показаться на первый взгляд. Однако с нашей точки зрения для пессимизма в этом вопросе все же нет достаточных оснований, поскольку научные достижения прошедшего 20-го века не только открыли для аксиоматического метода новые области и возможности применения, но и предоставили новые средства для реализации этих возможностей. Если вынести за скобки чисто технические аспекты проблемы, то можно сказать, что в первой половине 20-го века вопрос об аксиоматизации научных теорий (включая математические) обсуждался в основном в философском аспекте - как вопрос логического и эпистемологического *основания* этих теорий. Разумеется, этот круг фундаментальных вопросов остается релевантным и по отношению к современной науке. Новость состоит в том, что сегодня более существенными, чем это было в 20-м веке, стали прагматические аспекты аксиоматического метода. Ниже мы указываем на причины такого положения вещей рассматривая различные научные дисциплины отдельно.

3.1. **Перспективы аксиоматического метода в математике.** Современная математика становится все более разветвленной, а исследования в каждой области математики становятся все более сложными и изощренными. В этой ситуации возможности проверки новых результатов (то есть проверки анонсированных доказательств новых теорем) становятся все более ограниченными: такая проверка оказывается доступной только для узкой группы экспертов, суждениям которых остальная часть математического сообщества (не говоря уже о более широком научном сообществе и другой заинтересованной публике) вынуждена доверять. Неформальная версия теоретико-множественных оснований, которая широко используется в профессиональном математическом образовании и для представления новых математических результатов в лучшем случае позволяет неспециалистам получить общее представление о состоянии исследований в каждой области математики, но как правило не позволяет критически оценивать новые результаты. Формализованная версия таких оснований, как мы уже говорили, оказывается для этой цели бесполезной. Таким образом в математике возрастает роль следования авторитету (в ущерб самостоятельному суждению) и уменьшаются возможности для развития новых идей на стыке различных областей математики. Эффективная формализация современной математики позволяющая любому заинтересованному лицу самостоятельно провести формальную проверку любого математического результата с помощью компьютера могла бы позволить решить данную проблему (подобно тому, как с помощью электронного калькулятора можно быстро проверить верность неочевидного равенства $58972 \times 1743 = 102788196$).

В этом контексте под формализацией нужно понимать не навязанную математическому сообществу извне (например, логиками и философами) реформу, а выработку самим этим сообществом подходящего общего языка для представления математических теорий, который бы делал возможной эффективную проверку формальной корректности этих теорий. При этом вопрос о точных критериях формальной корректности может оставаться открытым для дискуссии (включая философскую дискуссию) и решаться в разных случаях по-разному. Можно представить себе ситуацию, когда некоторое предложенное доказательство p успешно проходит формальную проверку в (программно реализованном) языке L, но не проходит такой проверки в альтернативном языке L'. Такая ситуация может стать предметом содержательной концептуальной дискуссии и возможной мотивировкой для развития новых математических и логических идей. Эффективная формализация математических рассуждений в только указанном смысле ни в коем случае не означает, что математика теряет человеческое измерение и превращается в автоматизированый машинный процесс; речь идет только о том, чтобы передать машине рутинную часть математической работы и дать людям больше возможностей для математического творчества.

Конкретный проект в этом направлении осуществляется в настоящее время в рамках программы построения новых *унивалентных оснований* математики [18] с использованием уже существующих программных продуктов COQ и AGDA. Ниже мы скажем несколько слов об аксиоматической архитектуре унивалентных оснований, которая существенно отличается от стандартной.

3.2. **Перспективы аксиоматического метода в физике и других естественных науках.** Сказанное выше о математике в определенной степени можно отнести и к естественным наукам, в которых также остро стоит проблема коммуникации между учеными различных узких специальностей. Но аксиоматизация естественных наук имеет прямое отношение и к другой проблеме, которую в последние годы стали называть проблемой Больших Данных (Big Data) [3] [41]. Проблема состоит в том, что сырой эмпирический материал, который благодаря новым электронным технологиям теперь можно накапливать и хранить в невообразимых ранее объемах, требует принципиально новых способов обработки этой информации [5]. Для решения этой проблемы

[5]Хотя сегодня проблема Больших Данных рассматривается также как социальная и технологическая, впервые она была поставлена именно в контексте фундаментальных научных исследований. Существует точка зрения, согласно которой новые возможности сбора и хранения информации влекут за собой кардинальные изменения в научной методологии и эпистемологии, которые повышают роль фактического знания и снижают роль теоретического знания [32]. На наш взгляд для таких радикальных выводов нет оснований; тем не менее мы безусловно согласны с тем, что вопросы соотношения фактического и теоретического знания, как и многие другие подобные вопросы научной методологии и эпистемологии, необходимо заново ставить и обсуждать с учетом всех новых технологических возможностей и новой начной практики.

(которая касается не только фундаментальных наук, но и многочисленных приложений) в компьютерных науках сформировалось целое научное направление, которое сегодня называют *представлением знаний* (Knowledge Representation) [19]. Центральной идеей этой области исследований была и остается идея компьютерной реализации формального логического вывода, с помощью которого реконструируются рассуждения в данной предметной области. Начиная с пионерских работ Маккарти [29] для этой цели как правило используется классическая первопорядковая логика (или ее фрагменты) с добавлением специальных операторов, позволяющих описывать временные, эпистемические и другие важные в приложениях контексты. Таким образом, исследователи в области компьютерного представления знаний и искусственного интеллекта решают в практическом плане по сути ту же самую задачу, которой в теоретическом отношении заняты философы и логики, занимающиеся формальной логической реконструкцией неформальных рассуждений. Такое сочетание практических и теоретических усилий оказалось очень плодотворным и привело, в частности, к развитию новых направлений в логике таких как, например, *немонотонная* логика.

Вместе с тем, нужно отметить, что на сегодняшний день вышесказанное относится в большей степени к формализации и компьютерному моделированию обыденных рассуждений, а не компьютерному представлению фундаментальных научных знаний. Используемые сегодня стандартные системы компьютерного представления знаний используются в основном в описательных науках таких как геология, тогда как исследователи работающие в области фундаментальной физики и других высоко теоретизированных областях науки пользуются для компьютерной обработки своих данных уникальными разработками, которые специально создаются для решения конкретных задач. Однако тот факт, что фундаментальная наука сегодня работает с Большими Данными, которые в принципе не могут быть обработаны человеком без привлечения вычислительной техники, делает задачу компьютерного представления фундаментальных научных знаний особенно актуальной. Эта последняя проблема остается на сегодняшний день практически полностью открытой. Имея в виду роль логических методов в искусственном интеллекте вообще и в представлении знаний в частности, для решения этой проблемы нужно пытаться использовать все те наработки в области аксиоматического представления научных теорий, которые были получены в докомпьютерную эпоху. Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти новую форму аксиоматического представления современных научных теорий, которая, с одной стороны, была бы достаточно гибкой для того, чтобы представлять теории разного типа, а с другой стороны, допускала бы компьютерную реализацию и позволяла эффективно работать с Большими Данными. В качестве свежего примера усилий в этом направлении можно указать на попытки аксиоматического построения квантовой теории поля с помощью гомотопической теории типов [52] [53].

3.3. **Перспективы аксиоматического метода в инженерных и компьютерных науках.** Перспективы применения аксиоматического метода в инженерных науках в первую очередь связаны со стремительной автоматизацией. Однако инженеры ставят перед компьютерами и более амбициозные задачи: в скором времени ожидается широкое внедрение “слабого” инженерного искусственного интеллекта - компьютерных средств выработки инженерных и дизайнерских решений [72]. Естественной предпосылкой к этому служит понимание того, что инженерная мысль всегда ограничена строгими рамками законов физики и техники, которые способны служить источниками богатого набора аксиом. Из этих аксиом формально выводятся свойства пространства проектных параметров (design space), в котором решение ищется как точка, доставляющая (суб)экстремальное значение подходящей целевой функции, под которую проектируется изделие.

Остается построить формальную модель практики инженеров пригодную к компьютерной реализации. Естественную форму для математической записи моделей такого рода предоставляет теория категорий [71], [49]. При таком подходе результатам деятельности сопоставляются объекты подходящих категорий, операциям сопоставляются морфизмы, комплексным процедурам сопоставляются диаграммные конструкции. В целях структурного согласования разнородных процедур, заданных в разных категориях такого рода, вводятся подходящие функторы между такими категориями. Таким путем интеллектуальные функции проектирования технических изделий сводятся к распознаванию и расчету категорных конструкций. Для этого могут быть привлечены упоминавшиеся выше инструменты автоматического доказательства теорем, а также перспективные технологии глубокого машинного обучения (deep learning) [12]. В конечном итоге может быть сформирован универсальный (но не обязательно единственный) аксиоматический язык системной инженерии, обладающий доказательной силой и в то же время реализуемый на достаточно мощных вычислительных машинах. Разнообразные стандарты и технические рекомендации могут быть изложены на этом языке в форме, обеспечивающей их автоматическое соблюдение при выработке проектных решений.

3.4. **Унивалентные основания математики и конструктивная аксиоматическая архитектура.** В заключение этой статьи мы кратко опишем некоторые аспекты гомотопической теории типов и унивалентных оснований математики (ГТТ-УО), о которой мы уже упоминали выше. Эта теория представляет для нас особенный интерес, поскольку она, во-первых, допускает (и уже имеет) компьютерную реализацию и, во-вторых, использует нестандартную аксиоматическую архитектуру, которая на наш взгляд намного лучше подходит для аксиоматизации современных научных теорий, чем стандартная аксиоматическая архитектура Гильберта-Тарского. Тот факт, что стандартная аксиоматическая архитектура плохо подходит для этих целей, мы считаем проверенным эмпирически: как уже было показано во втором разделе этой статьи, несмотря на многолетние попытки логиков и философов использовать такую архитектуру для представления научных теорий, она не находит широкого применения в исследовательской и образовательной практике. Там же мы указали на очевидные причины, по которым эта стандартная архитектура оказывается неподходящей для компьютерной реализации.

Формальной основой ГТТ-УО является *конструктивная теория типов* Мартина-Лёфа [43] (ТТМЛ), которая была задумана с расчетом на компьютерные применения и затем действительно использована (задолго до открытия ГТТ-УО Воеводским) при создании программных продуктов AGDA и COQ. Открытие Воеводского состояло в том, что он нашел геометрическую (точнее теоретико-гомотопическую) модель теории Мартина-Лёфа позволившую изучить и понять богатую структуру отношения тождества в ТТМЛ, которая без использования такой модели оставалась практически "невидимой" и во всяком случае совершенно непонятой. Если посмотреть на это открытие с точки зрения геометра, а не логика, то его можно описать и так: Воеводскому удалось с помощью ТТМЛ аксиоматизировать современную теорию гомотопий используя при этом единственную дополнительную аксиому, которую Воеводский назвал *аксиомой унивалентности*. Идея использования ГТТ-УО в качестве основания всей математики, а также в качестве логико-математического основания физических и других естественно-научных теорий, мотивируется формальным характером ТТМЛ и аксиомы унивалентности, который позволяет смотреть на ГТТ-УО не только как на содержательную геометрическую теорию, но и как на своего рода (геометризованную) логику.

Опуская технические детали, мы теперь покажем, чем аксиоматическая архитектура ГТТ-УО выгодно отличается от стандартной аксиоматической архитектуры Гильберта-Тарского. Напомним, что в рамках этой стандартной архитектуры аксиоматическая теория отождествляется с множеством высказываний (аксиом и теорем) упорядоченных с помощью некоторого отношения логического следования (или нескольких таких отношений). Непропозициональные объекты теории (такие как геометрические точки, материальные частицы, множества точек или частиц, и т.д.) при таком подходе используются для задания нелогической семантики высказываний; другими словами, непропозициональные объекты - это те вещи, "о которых" высказывается данная теория. Таким образом в стандартных аксиоматических теориях можно выделить два "этажа": на одном этаже (для определенности назовем его "верхним") расположена формальная теория состоящая из неинтерпретированных высказываний (которые Рассел называл *пропозициональными формами*), тогда как на нижнем этаже расположена предметная область, в которой эти высказывания интерпретируются и получают истинностные оценки (то есть, если речь идет об обычной бивалентной логике, оцениваются как истинные или ложные). Эта конструкция хорошо соответствует традиционным метафизическим и эпистемологическим представлениям связанным с понятием теории: на нижнем этаже мы имеем *предметную область* теории, а на верхнем этаже мы имеем языковые конструкции, с помощью которых данная теория описывает свои предметы.

На первый взгляд может показаться, что перекрытие между двумя этажами только что описанной конструкции точно соответствует формальному различию между синтаксисом и семантикой теории. Однако это на самом деле не совсем так, поскольку интерпретация синтаксически правильно построенной формулы F в качестве допускающего истинностную оценку *высказывания* - это такая же семантическая операция, как и приписывание конкретного значения любой индивидной или предикатной константы, которая входит в F. То же самое можно сказать и о входящих в F *логических* константах. Если трактовать формулу F как "чисто" синтаксический объект, то о ней нужно говорить не как о высказывании (и не как о *пропозициональной* форме), а просто как о последовательности неинтерпретированных символов. Поскольку стандартная аксиоматическая архитектура теорий пользуется понятиями высказывания и истинного значения высказывания, но при этом в явном виде не включает такие вещи в область семантической интерпретации теорий, можно утверждать, что эта архитектура использует типовое различие между высказываниями и предметами этих высказываний *неявно* .

Поскольку цель формальной реконструкции рассуждений состоит в том, чтобы сделать явными все неявные предпосылки и условия, приведенный выше анализ можно использовать как аргумент в пользу формальной типизации [6]. Кроме того, в пользу типизации говорят и прагматические аргументы: использование понятия типа в качестве примитивного лучше соответствует используемым на практике негласным правилам рассуждений в математике, физике и других науках, чем идея единой предметной области, в которой нет различения по типам. В частности, в математике обычно считается само собой разумеющимся, что числа, функции и топологические пространства - это вещи разных типов. Однако стандартные теоретико-множественные основания математики не предоставляют формальных средств для того, чтобы просто выразить эту интуицию: в рамках таких оснований всякий математический объект представляет собой некоторое абстрактное множество.

ТТМЛ решает эту проблему тем, что с самого начала предполагает некоторый список базовых *типов* $T_1, \dots, T_k, \dots$ и правила, по которым из этих базовых типов строятся новые типы. Вопрос о том, какие именно типы в ТТМЛ (или любой другой теории типов) можно и нужно отождествить с типом высказываний, не является вполне очевидным и в настоящее время продолжает дабатироваться. Популярная конструкция *изоморфизма Карри-Ховарда* [55] дает повод к тому, чтобы рассматривать всякий тип как обобщенное высказывание, а термы этого типа - как доказательства данного высказывания, одновременно используя экстенсиональную трактовку типов как множеств (в наивном смысле) или классов. В компьютерных науках такой подход оказался практически полезным (прежде всего в области функционального программирования) и получил название *парадигмы пропозиций как типов* (propositions-as-types paradigme).

Однако есть много указаний на то, что такая широкая трактовка изоморфизма Карри-Ховарда является слишком вольной; во всяком случае она лишена всякой философской и логической основательности. Гомотопическая модель ТТМЛ (то есть ГТТ) позволила пролить новый свет на этот вопрос и сформулировать более узкое понятие "голого" высказывания (mere proposition) как типа, который может быть либо пуст (ложное

[6] Аналогичный аргумент впервые высказал Шейнфинкель еще в 1924 году [51].

высказывание), либо содержать единственный элемент свидетельствующий о его истинности (см. [18], стр. 103). Если в данном непустом типе перестать различать его разные элементы (термы), то такой тип можно будет рассматривать как голое высказывание. Таким образом понятие голого высказывание возникает тогда, когда перестают интересоваться особенностями доказательств и просто спрашивают о том, есть ли у данного высказывания какое-нибудь доказательство. Эти соображения позволяют объяснить тот интуитивный факт, что всякий тип в некотором отношении можно рассмотреть как высказывание - одновременно различая при этом высказывания и объекты других (то есть непропозициональных) типов.

Хотя вопрос о точном определении понятия высказывания в ГТТ остается на сегодняшний день открытым, можно уже с уверенностью сказать, что эта теория состоит *не только* из высказываний, и что *наряду* с высказываниями она содержит объекты других типов. Как мы уже сказали, эта теория также содержит *правила* построения новых типов объектов из данных типов объектов. В случае, когда типы являются высказываниями, эти правила действуют как правила логического вывода. В других случаях эти правила действуют как правила конструирования новых непропозициональных объектов вроде правил построений фигур циркулем и линейкой в традиционной геометрии) [7]. Тот факт, что ГТТ позволяет избежать сведения всего знания к пропозициональному знанию (то есть "знанию что", knowledge that) и способна в рамках общей формальной аксиоматической архитектуры представить также непропозициональное "знание как" (knowledge how) [20], на наш взгляд, имеет фундаментальное значение. Даже если правы те, кто утверждает, что всякое знание можно выразить в пропозициональной форме, такая редукция может оказаться практически нереализуемой и поэтому бесполезной в научной практике и тем более в инженерных приложениях. Напомним аргументы Снида и Фраассена в пользу *семантического* подхода к реконструкции научных теорий: научная теория это в первую очередь класс моделей, а не набор высказываний истинных во всех моделях данного класса. Вопрос, на который у этих авторов нет хорошего ответа, состоит в том, как строить такие модели независимым образом. Указание на то, что ученые умеют это делать без всяких логических методов, означало бы признание того, что понятие теории в логике вообще не имеет ничего общего с понятием теории в физике и других естественных науках.

ГТТ-УО предлагает лучший ответ на поставленный выше вопрос: модели строятся из выбранных базовых элементов по тем же общим правилам, по которым из выбранных аксиом выводятся теоремы. В ГТТ это даже не две параллельных процедуры; скорее

[7] ГТТ не следует считать аксиоматической формализацией наивной конструктивистской идеи о том, что всякий математический объект должен быть представлен в явном виде. Например, окружность S^1 в ГТТ конструируется посредством следующего обобщения принципа индукции: задается точка $b : S^1$ и путь $loop : b =_{S^1} b$, не равный (т.е. не гомотопный) постоянному пути из b в b. По индукции тип $b =_{S^1} b$ наполняется счетным количеством элементов вида $loop^n$ для всех целых n (причем $loop^0$ это постоянный путь). При этом не конструируется ни одного элемента типа S^1 в дополнение к исходно заданной точке b. В то же время в доказательствах различных свойств окружности активно используются отображения с областью S^1 и даже семейства типов, индексированные элементами S^1.

можно сказать, что логический вывод в обычном смысле является аспектом более общей конструктивной процедуры, которая состоит в построении теоретической модели включающей в себя среди прочего и чисто пропозициональный аспект. Таким образом ГТТ-УО можно рассматривать как новую и более полную реализацию семантического подхода Снида и Фраассена. Заметим, что при этом в ГТТ-УО полностью сохраняется различение синтаксиса и семантики, так же как и возможность интерпретировать одну и ту же синтаксическую конструкцию в разных моделях.

Таким образом ГТТ-УО дает нам пример аксиоматической теории с нестандартной архитектурой которую мы предлагаем называть *конструктивной* [50]. Приведенные выше соображения дают основания считать, что эта нестандартная архитектура лучше подходит для аксиоматизации научных теорий, чем стандартная аксиоматическая архитектура Гильберта-Тарского. Этот новый подход уже доказал свою эффективность в некоторых областях математики; насколько этот подход окажется эффективным в других областях знания, покажут будущие исследования и практические усилия по применению этого подхода. Во всяком случае, как мы постарались убедить читателя, сегодня есть самые серьезные основания надеяться на успех этого нового подхода к аксиоматизации научных теорий. Подчеркнем, что выбор аксиоматической архитектуры не является чисто техническим вопросом: всякая такая архитектура в формальном виде выражает фундаментальные эпистемологические предпосылки связанные с понятием научной теории включая ответ на вопрос о роли и месте логики в научных теориях. Именно поэтому новый аксиоматический подход представленный в ГТТ-УО заслуживает самого пристального внимания со стороны логиков, эпистемологов и философов науки.

Список литературы

[1] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable part i. discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:429Ц490, 1977.

[2] W. Balzer and U. Moulines (eds.). *Structuralist Theory of Science: Focal Issues, New Results (Perspectives in Analytical Philosophy, vol. 6)*. Berlin: de Gruyter, 1996.

[3] D. Bollier. *The Promise and Peril of Big Data*. Aspen Insititute; available at http://www.aspeninstitute.org/, 2010.

[4] N. Bourbaki. *Eléments de Mathématique. 10 vols.* Paris:Hermann, 1939-1988.

[5] N. Bourbaki. Univers. *In Michael Artin, Alexandre Grothendieck, Jean-Louis Verdier, eds. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1963-64 Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4) - vol. 1 (Lecture notes in mathematics 269) (in French). Berlin; New York: Springer-Verlag.*, pages 185–217, 1972.

[6] M. Bunge. *Foundations of Physics.* Springer, 1967.

[7] M. Bunge. *Philosophy of Physics.* Springer, 1972.

[8] J. Butterfield and Ch. Isham. Some possible roles for topos theory in quantum theory and quantum gravity. *Foundations of Physics*, 30(10):1707–1735, 2000.

[9] M.D. Chiara, R. Giutini, and R. Greechi. *Reasoning in Quantum Theory (Trends in Logic: Studia Logica Library, vol. 22)*. Springer, 2004.

[10] L. Corry. The empiricist root of hilbert's axiomatic approach. *Vincent Hendricks et al. (eds.), Proof Theory: History and Philosophical Significance (Synthese Library vol. 292*, pages 35–54, 2000.

[11] V. de Paiva and A. Rodin. Elements of categorical logic: Fifty years later. *Logica Universalis*, 7:265–273, 2013.

[12] L. Deng and D. Yu. Deep learning: Methods and applications. *Foundations and Trends in Signal Processing*, 7(3-4):197–387, 2014.

[13] P. Destouches-Février. *La structure des théories physiques*. Presses Universitaires de France (Paris), 1951.

[14] A. Doering. Topos theory and 'neo-realist' quantum theory. *B. Fauser, J. Tolksdorf and E. Zeidler (eds.) Quantum Field Theory, Birkhäuser Verlag*, pages 25–47, 2009.

[15] M. Dummett. Is logic empirical? *H. D. Lewis (ed.), Contemporary British Philosophy, 4th series (London: Allen and Unwin)*, 5:45–68, 1976.

[16] B.S. El-Haik. *Axiomatic Quality. Integrating Axiomatic Design with Six-Sigma Reliability and Quality Engineering*. Wiley-Interscience, 2005.

[17] B.S. El-Haik. *Axiomatic Design. Eine Methode zur serviceorientierten Modellirung*. Gabler Research, Springer, 2009.

[18] V. Voevodsky et al. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study (Princeton); available at http://homotopytypetheory.org/book/, 2013.

[19] V. Lifschitz F. van Harmelen and B. Porter. *Handbook of Knowledge Representation*. Elsevier Science, 2008.

[20] J. Fantl. *Knowledge How*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), 2012.

[21] G.Birkhoff and J. von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, 37:823–843, 1936.

[22] J.R. Gregg and F.T.C. Harris (eds.). *Form and Strategy in Science*. Reidel, 1964.

[23] Ch. Heunen. *Categorical quantum models and logics*. Pallas Publications - Amsterdam University Press, 2009.

[24] D. Hilbert. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(10):437–479, 1902.

[25] D. Hilbert. Foundations of mathematics. *J. van Heijenoort (ed.), From Frege to Gödel: A Source Book in the Mathematical Logic*, 2:464–480, 1967.

[26] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig, 1899.

[27] C.A.R. Hoare. An axiomatic basis for computer programming. *Communications of the ACM*, 12(10):576Ц580, 1969.

[28] A.C. Sugar J.C.C. McKinsey and P.C. Suppes. Axiomatic foundations of classical particle mechanics. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 2:253–272, 1953.

[29] A.C. Sugar J.C.C. McKinsey and P.C. Suppes. Programs with common sense. *Proceedings of the Teddington Conference on the Mechanization of Thought Processes, London*, pages 75–91, 1959.

[30] W. Haken K. Appel and J. Koch. Every planar map is four colorable part ii. reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:491Ц567, 1977.

[31] G. Kiczales, J. Lamping, A. Medhekar, C. Maeda, C.V. Lopes, J.-M. Loingtier, and J. Irwin. Aspect-oriented programming. *Lecture Notes in Computer Science*, 1241:220–242, 1997.

[32] R. Kitchin. Big data, new epistemologies and paradigm shifts. *Big Data & Society*, 4:1–12, 2014.

[33] F.W. Lawvere. Categorical dymanics. *A. Kock (ed.) Topos-Theoretic Methods in Geometry, Aarhus Mathematical Inst. Publ. series 30*, pages 1–21, 1979.

[34] F.W. Lawvere. Toward the description in a smooth topos of the dynamically possible motions and deformations of a continuous bodys. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique*, 21:337–392, 1980.

[35] F.W. Lawvere. Tools for the advancement of objective logic: closed categories and toposes. *J. Macnamara and G.E. Reyes (Eds.), The Logical Foundations of Cognition, Oxford University Press 1993 (Proceedings of the Febr. 1991 Vancouver Conference "Logic and Cognition")*, pages 43 – 56, 1994.

[36] W.F. Lawvere. The category of categories as a foundation of mathematics. *Proceedings of the conference on categorical algebra*, pages 1–20, 1966.
[37] D.G. Lee and N.P. Suh. *Axiomatic Design and Fabrication of Composite Structures. Applications in Robots, Machine Tools, and Automobiles*. Oxford University Press, 2006.
[38] G.W. Leibniz. Characteristica geometrica. *C.I. Garhardt (ed.) Leibnizens Mathematische Schriften, Halle 1849-1863*, 5:141–168, 1679.
[39] G.W. Mackey. *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. W.A. Benjamin, Inc. (NY, Amsterdam), 1963.
[40] S. MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer, 1992.
[41] K. Mainzer. *Die Berechnung der Welt: Von der Weltformel zu Big Data*. C.H. Beck, 2014.
[42] M.A. Mannucci and N.S. Yanofsky. *Quantum computing for computer scientists*. Cambridge University Press, 2008.
[43] P. Martin-Löf. *Intuitionistic Type Theory (Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980)*. Napoli: BIBLIOPOLIS, 1984.
[44] J.C.C. McKinsey and P. Suppes. Review of "la structure des théories physiques" by p. destouches-février. *Journal of Symbolic Logics*, 19(1):52–55, 1954.
[45] C. McLarty. *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford: Clarendon Press, 1992.
[46] D.J. Nicholson and R. Gawne. Rethinking woodger's legacy in the philosophy of biology. *Journal of the History of Biology*, 47:243–292, 2013.
[47] G. Puccini and H. Vucetich. Axiomatic foundations of galilean quantum field theories. *Foundations of Physics*, 34(2):263–295, 2004.
[48] H. Putnam. Is logic empirical? *R. Cohen and M. Wartofsky (eds.) Logical and Epistemological Studies in Contemporary Physics. Boston Studies in the Philosophy of Science*, 5:216–241, 1968.
[49] A. Rodin. *Axiomatic Method and Category Theory (Synthese Library vol. 364)*. Springer, 2014.
[50] A. Rodin. *On Constructive Axiomatic Method*. http://arxiv.org/abs/1408.3591v3, 2015.
[51] M. Schönfinkel. über die bausteine der mathematischen logik. *Mathematische Annalen*, pages 305–316, 1924.
[52] U. Schreiber. *Quantization via Linear homotopy types*. arXiv: 1402.7041, 2014.
[53] U. Schreiber and M. Shulman. *Quantum Gauge Field Theory in Cohesive Homotopy Type Theory*. arXiv:1408.0054, 2014.
[54] J.D. Sneed. *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Reidel, 1971.
[55] M.H. Sorensen and P. Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol. 149)*. Elsevier, 2006.
[56] W. Stegmüller. *The Structuralist View of Theories: A PossibleAnalogue of the Bourbaki Programme in Physical Science*. Springer, 1979.
[57] F. Steimann. The paradoxical success of aspect-oriented programming. *Proceedings of the International Conference OOPSLA'06. Portland*, pages 481–497, 2006.
[58] N.P. Suh. *Axiomatic Design: Advances and Applications*. Oxford University Press, 2001.
[59] A. Tarski. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Dover, 1941.
[60] P. Taylor. *Practical Foundations of Mathematics (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, 1999.
[61] T. Tymoczko. The four-color problem and its philosophical significance. *The Journal of Philosophy*, 76(2):57–83, 1979.
[62] B. van Fraassen. The labyrinth of quantum logics. *R. Cohen and M. Wartofsky (eds.) Logical and Epistemological Studies in Contemporary Physics. Boston Studies in the Philosophy of Science*, 13:224–254, 1974.
[63] B. van Fraassen. The semantic approach to scientific theories. *Nersessian, N.J., (ed.) The Process of Science : Contemporary Approaches to Understanding Scientific Practice, Kluwer*, pages 106–124, 1987.

[64] B. van Fraassen. Evolutionary biology and the axiomatic method revisited. *The Romanian Journal of Analytic Philosophy*, 7(1):19–41, 2013.

[65] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, 1932.

[66] U. Moulines W. Balzer and J.D. Sneed (eds.). *Structuralist Knowledge Representation: Paradigmatic Examples (Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities vol. 75)*. Amsterdam:Rodopi, 2000.

[67] U. Moulines W. Balzer and J.D. Sneed. *An Architectonic for Science*. Reidel, 1987.

[68] J.H. Woodger. *Axiomatic Method in Biology*. Cambridge University Press, 1937.

[69] В.И. Арнольд. Математическая дуэль вокруг Бурбаки. *Вестник Российской Академии Наук*, 72(3):245–250, 2002.

[70] С.П. Ковалёв. Семантика аспектно-ориентированного моделирования данных и процессов. *Информатика и ее применения*, 7(3):70–80, 2013.

[71] С.П. Ковалёв. Теоретико-категорный подход к проектированию программных систем. *Фундаментальная и прикладная математика*, 19(3):111–170, 2014.

[72] А.И. Левенчук. *Системноинженерное мышление*. М.: TechInvestLab, доступна на http://techinvestlab.ru/, 2015.

[73] А.В. Родин. Теория категорий и поиски новых математических оснований физики. *Вопросы Философии)*, 7:67–82, 2010.

[74] А.В. Родин. Программный реализм в физике и основания математики: Часть 2: Неклассическая и неоклассическая наука. *Вопросы Философии)*, 5:58–68, 2015.

[75] К. Хоггер. *Введение в логическое программирование*. Мир, 1988.