МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТУИЦИЯ В ИСТОРИЧЕСКОМ КОНТЕКСТЕ

АНДРЕЙ РОДИН

1. Введение

Принято считать, что по мере своего развития математика постепенно становится все более абстрактной и все менее связанной с интуицией. На мой взгляд эту тенденцию не следует неограниченно экстраполировать на будущее. Я утверждаю, что роль интуиции в современной математике в целом остается такой же, какой она была во времена Евклида. Что действительно изменяется, так это сама математическая интуиция.

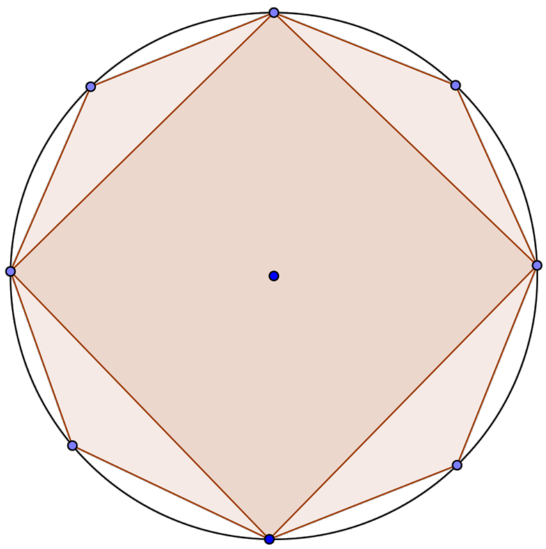
2. Меняющаяся интуиция

Математики постоянно изобретают новые понятия и трансформируют старые. Таким образом математические понятия быстро эволюционируют. Так сто лет назад никто не знал, что такое когомология (поскольку этого понятия еще не существовало), а понятие алгебраический идеала, определялось совсем не так как сегодня (см. об этом ниже в разделе 2.3). Изменения математических интуиций сложнее заметить, потому что интуиции в отличие от понятий не поддаются четким лингвистическим описаниям. Тем не менее я попытаюсь показать, что математические интуиции не остаются неизменными, а эволюционируют вместе с математическими понятиями.

2.1. **Форма и движение.**

Хорошо известно, что геометрическая теория *Начал* Евклида построена дедуктивным образом. Менее очевидно, что этот дедуктивный принцип построения теории касается не только геометрических понятий, но и геометрических интуиций. Интуитивное геометрическое содержание евклидовых *Начал* организовано следующим образом: оно включает в себя (i) первичные интуиции, соответствующие понятиям точки, прямой и окружности, и (ii) сложные интуиции, которые строятся с помощью комбинирования первичных интуиций. Это то, что обычно называют "построением циркулем и линейкой". Такое построение позволяет интуитивно представлять сложные геометрические формы, которые нельзя схватить в интуиции непосредствено. В литературе часто отождествляют математическую интуицию именно с простой *непосредственной* интуицией; я думаю, что такое отождествление неоправданно. Математика нуждается в сложных интуициях как и в сложных понятиях.

В качестве примера рассмотрим правильный 1024-хугольник (многоугольник с 1024 стороной). Эту фигуру можно построить циркулем и линейкой. Для этого сначала построим круг и впишем в него квадрат. Затем поделим пополам углы между диагоналями квадрата и построим правильный восьмиугольник вписанный в тот же круг. Затем поделим пополам углы между диагоналями восьмиугольника и получим правильный 16-угольник. Затем повторим ту же процедуру еще пять раз и получим правильный 1024-хугольник (рис. 1).



Хотя полученную фигуру невозможно четко представить себе непосредственно, описанная выше процедура построения дает о ней совершенно адекватное интуитивное представление. Это представление помимо первичных геометрических интуиций связанных с циркулем и линейкой также задействует интуицию пошагового построения, которая является скорее временной, нежели пространственной. Кроме того, оно опирается на базовые арифметические интуиции, позволяющие нам вычислить нужную степень двойки и таким образом удостовериться, что число сторон получившегося многоугольника действительно равно 1024.

Хилиогон (тысячеугольник) часто приводят (вслед за Декартом) в качестве примера геометрического объекта, который можно помыслить, но нельзя себе четко представить. Приведенный выше пример с 1024-угольником показывает, что большое количество сторон многоугольника не всегда затрудняет интуитивное понимание. Указанный выше метод действительно нельзя применить к хилиогону, поскольку его нельзя построить линейкой и циркулем. Однако причина здесь не в том, что число его сторон слишком большое. С такой же проблемой мы сталкиваемся при построении правильного семиугольника, удвоенного куба и многих других относительно простых геометрических фигур. Это затруднение показывает, что интуитивные и понятийные аспекты евклидовой геометрии не всегда сочетаются друг с другом так гладко, как это происходит в стандартных примерах (включая наш пример 1024-хугольника). [1]

На самом деле проблема, с которой столкнулись греческие математики, была двоякой. С одной стороны, некоторые простые геометрические понятия (вроде правильного семиугольника), не удавалось включить в общую схему интуитивно прозрачных построений циркулем и линейкой. С другой стороны, некоторые интуитивно простые (но выходящие за рамки циркуля и линейки) интуитивные построения не удавалось объяснить теоретически. Я имею ввиду циклоиду, спираль и другие так называемые *механические* кривые. Таким образом греческие математики столкнулись с проблематичными случаями двоякого рода: (1) когда для имеющихся геметрических понятий не было подходящих интуиций и (2) когда для имеющихся геометрических интуиций не было подходящих понятий. Механические кривые использовались для решения геометрических задач неразрешимых циркулем и линейкой (в частности, для удвоения куба). Такие решения включали в себя новые нестандартные способы согласования понятий и интуиций. Однако такого рода попытки не привели к созданию никакой полновесной альтернативной геометрической теории, которая могла бы конкурировать с геометрией циркуля и линейки.

Эта ситуация существенно изменилась только в начале эпохи Нового времени, когда традиционное понятие о базовых геометрических формах потеряло свою былую привлекательность, и выбор циркуля и линейки в качестве стандартных инструментов для геометрических построений стал казаться чистой условностью. В своей *Геометрии* 1637-го года [9] Декарт описывает альтернативный геометрический инструмент, который иногда называют картезианским циркулем. С помощью этого инструмента можно строить алгебраические кривые (то есть кривые аналитически задаваемые многочленами) широкого класса. Декарт настаивает на том, что геометрические построения выполненные с помощью нового инструмента ничем не уступают традиционным построениям с помощью циркуля и линейки. Таким образом механическая интуиция,

[1] Как догадался Гаусс и затем в 1837-м году доказал Вантцель правильный многоугольник можно построить циркулем и линейкой в том и только в том случае, если число его сторон это произведение степени двойки на простое число Ферма. Простое число Ферма это простое число вида $2^{2^n} + 1$ где n это натуральное число.

которая играла только маргинальную роль в греческой геометрии, в геометрии Декарта оказывается основной. [2]

В начале своих *Лекций по геометрии* 1735-го года Барроу [1] прямо говорит, что в конечном счете все геометрические объекты создаются движением. Эти примеры делают совершенно очевидным тот факт, что геометрия Декарта и Барроу отличается от геометрии Евклида не только своим понятийным аппаратом, но и своим интуитивным содержанием.

2.2. **Неевклидова интуиция.**

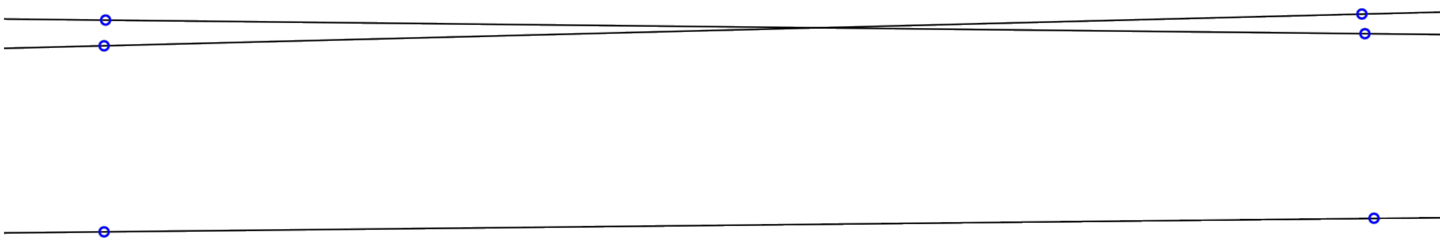
Изобретение неевклидовой геометрии в 19 веке часто считают тем моментом в истории, когда геометрия потеряла свою традиционную связь с эмпирической пространственной интуицией. Это неверно. Изобретение неевклидовой геометрии в 1830-х включало в себя трансформацию евклидовой пространственной интуиции, но не отказ от пространственной интуиции как таковой. Более того, эта трансформация была консервативной в том смысле, что оно позволило сохранить традиционную евклидову интуицию "в малом". Идея о том, чтобы отделить пространственную интуицию от геометрии, возникла позже, в конце 19 века (я подробнее скажу об этом в следующем разделе).

Как известно открытие неевклидовой геометрии стало результатом долгих попыток доказать Пятый Постулат Евклида (П5) от противного: будучи не в состоянии представить убедительное свидетельство абсурдности отрицания П5 некоторые ученые догадались, что они исследуют горизонты новой широкой области, а вовсе не предполагаемый тупик. Но начнем все же с вопроса о том, почему П5 привлек столько внимания уже в античности. Очевидный ответ состоит в том, что этот постулат не имел такой же интуитивной силы как остальные принципы геометрии Евклида. Это замечание показывает, что часто повторяемое утверждение о том, что "естественная" пространственная интуиция является евклидовой, не подтверждается историческими фактами. Если бы это было действительно так, то геометры всегда бы принимали П5 как самоочевидное утверждение наряду с другими постулатами и аксиомами Евклида и не тратили бы столько усилий на попытки вывести этот постулат из других принципов.

В своих *Геометрических исследованиях по теории параллельных линий* 1840-го года [11], Лобачевский представил геометрическую теорию, которую сегодня называют его именем. В своем изложении этой теории он сочетает синтетические построения в стиле Евклида с обычными аналитическими методами, не пытаясь при этом представить гиперболические конструкции средствами евклидовой геометрии. Тот, кто знаком с геометрией Лобачевского только по популярным моделям (таким как модель

[2] Декарт не отказался от традиционного различения механических и геометрических кривых, но придал ему новый смысл: согласно Декарту только неалгебраические кривые являются механическими. Вслед за древними геометрами Декарт выносит механические (то есть трансцендентные) кривые за пределы чистой геометрии. Однако этот запрет на трансцендентные кривые никогда не соблюдался и таким образом не имел никакого значения для истории математики.

Бельтрами-Клейна или модель Пуанкаре) может подумать, что гиперболические построения нельзя изобразить на бумаге непосредственно и представить их интуитивно. Но на самом деле это не так. Изобразим три прямые, две из которых пересекаются. Этот чертеж не дает никакого ответа на вопрос о том, что происходит, когда эти три прямые уходят в бесконечность.



Может случиться, а может и не случиться так, что хотя бы одна из прямых m, n в конце концов пересечет прямую l в некоторой точке. Если допустить, что этого не происходит, можно с полным правом считать этот чертеж изображением построения на гиперболической плоскости.

В своем *Saggio* 1868-го года Бельтрами [2] отождествил гиперболическую плоскость (плоскость Лобачевского) с особой поверхностью в трехмерном евклидовом пространстве, которую он назвал *псевдосферой*. Менее известно то, что сам Лобачевский в своих *Геометрических исследованиях* использовал обратный прием: он отождествил евклидову плоскость с особой поверхностью в гиперболическом трехмерном пространстве, которую он назвал *орисферой* (предельной сферой). Псевдосфера Бельтрами показывает, как выглядит гиперболическая плоскость если смотреть на нее через евклидовы очки. Орисфера Лобачевского показывает как выглядит обычная евклидова плоскость, если смотреть на нее через гиперболические очки. [3]

Поскольку то, как выглядит данный геометрический объект, зависит от очков через которые на него смотрят, кажется естественным попытаться описать этот объект вовсе не прибегая к интуитивным представлениям (см. об этом следующем разделе). Но это не единственное возможное решение и, как я постараюсь показать, далеко не лучшее. Ясно, что геометрия Евклида и геометрия Лобачевского могут сосуществовать как две логические возможности. Но хотелось бы также иметь подходящую геометрическую структуру, внутри которой могли бы сосуществовать евклидовы и неевклидовы пространства. Такое более общее понятие пространства пытался найти и Бойяи, и Лобачевский.

Удовлетворительное решение этой проблемы было предложено Риманом в докторской диссертации (*Habilitationsvortrag*)1854-го года [13] с помощью обобщения теории Гаусса о кривых поверхностях. Вскоре после того как Бельтрами нашел интерпретацию плоскости Лобачевского на псевдосфере, он догадался отождествить пространство Лобачевского с римановым многообразием постоянной отрицательной кривизны [3]. Эта новая точка зрения позволяет объяснить двойную природу псевдосферы и орисферы не отказываясь от геометрической интуиции: каждая из этих поверхностей является вложением многообразия одного типа (евклидова или гиперболического) в другое.

Риманова интуиция не сводится к евклидовой интуиции. Хорошее представление о римановой интуиции можно получить с помощью пространственного опыта, который в свое время привел Гаусса к его геометрическим открытиям: перемещаясь по холмистой местности, попытайтесь забыть о третьем измерении (что не особенно трудно, когда исследуемая территория достаточно велика). Чтобы найти кратчайший путь от данной точки до другой данной точки, которая находится в нескольких шагах, нужно идти по обычной евклидовой прямой. Но если пункт назначения находится в нескольких километрах, найти кратчайший путь уже не так просто; при этом может оказаться, что оптимальное решение не является единственным. Отсюда видно, что риманова пространственная интуиция не отменяет евклидову интуицию, но ограничивает ее как локальную и расширяет ее новыми глобальными характеристиками.

Хотя с картографированием холмистых окрестностей Ганновера можно справиться без общего понятия риманова многообразия, это понятие совершенно необходимо для картографирования окрестностей нашей планеты в космологическом масштабе. Поэтому утверждение, что риманово понятие пространства является “более абстрактным”, чем традиционное понятие евклидова пространства, на мой взгляд, является неверным. Люди сталкивались на опыте с искривленными пространствами задолго до Римана

[3]На самом деле, псевдосфера - это не модель, а только частичная модель плоскости Лобачевского.

и Эйнштейна. Но при этом они не умели описывать такие пространства математически.

2.3. **Утраченные идеалы.** [4]

Если дано коммутативное кольцо $(K, \oplus, \otimes)$ то *идеалом* (в смысле современной алгебры) называют подмножество $I \subseteq K$ такое что I (i) замкнуто относительно операции $\oplus$ и (ii) замкнуто относительно операции $\otimes$ в следующем более сильном смысле: для любого элемента a кольца K и для любого элемента b подмножества I производный элемент $a \otimes b = c$ лежит в I. Познакомившись с этим стандартным определением, любопытный студент может задать вопрос о происхождении странного термина "идеал". Приведенное выше определение само по себе не дает никакого намека для ответа на этот вопрос. Поэтому за ответом приходится обращаться к истории понятия алгебраического идеала [4]. Современное математическое понятия идеала происходит от понятия *идеального числа* (Idealzahl), введенного Куммером в 1847 г. Куммер обратил внимание на тот факт, что в некоторых кольцах циклотомических целых чисел разложение элемента кольца на простые множители, вообще говоря, не является единственным. Пополняя такие кольца своими идеальными числами Куммер обеспечивал однозначность разложения на простые множители. Куммер называл эти объекты идеальными, поскольку они были совершенно неконструктивными, и Куммер не мог утверждать, что объекты с нужными свойствами действительно существуют. Это не было чем-то совсем необычным для математики: идеальные точки в (проэктивной) геометрии, мнимые корни в алгебре и даже хорошо знакомые отрицательные числа были ранее введены в математический обиход похожими способами. [5]

Математические идеальные элементы можно охарактеризовать как чистые понятия, не подкрепленные или недостаточно подкрепленные интуицией. История понятия алгебраического идеала показывает, что в ряде случаев для идеальных элементов удавалось со временем найти подходящие интуиции и таким образом полностью *деидеализировать* эти объекты. В некоторых других случаях подходящую интуицию удавалось найти в уже известном интуитивном содержании, как это произошло в случае стандартной геометрической интерпретации комплексных чисел. В случае куммеровских идеальных чисел потребовалось развить интуицию нового типа. Именно поэтому этот случай представляет для нас особый интерес.

Термин "идеал" ввел в математику Дедекинд; его определение алгебраического идеала отличается от нашего лишь в одном отношении: вместо абстрактного кольца K Дедекинд рассматривает кольца циклотомических чисел и другие похожие кольца построенные с помощью комплексных чисел. Дедекинд показал, что идеальные числа

---

[4]Этот раздел предполагает знакомство читателя с основами современной общей алгебры. Однако его также можно читать опуская математические детали.

[5]Кольцо циклотомических целых чисел это обычное кольцо целых чисел расширенное комплексными корнями p-й степени из единицы, где p это фиксированное простое число.

Куммера можно отождествить с идеалами кольца циклотомических чисел, то есть с подходящими классами таких чисел.

Дедекиндовы идеалы по сравнению с абстрактными идеалами современной алгебры кажутся нам недостаточно общими и излишне “конкретными”. Однако следует иметь в виду, что во времена Дедекинда идея о том, что бесконечная совокупность математических объектов (например, комплексных чисел) в свою очередь представляет собой некоторый математический объект, еще не была общепринятой. Эта идея возникла только с появлением теории множеств в конце 19-го века и еще долго оставалась непривычной. Дедекиндово (и современное) определение алгебраическое идеала потеряло свою историческую связь с философским понятием идеального тогда, когда манипуляции с бесконечными совокупностями стали для математиков такими же привычными как и манипуляции с элементарными геометрическими фигурами, натуральными числами и комплексными числами (которые еще в 19-м веке потеряли в глазах математиков всякую “мнимость”).

3. Бегство от интуиции и теория множеств

С древних времен часть математиков относилась к геометрической интуиции и геометрическому воображению настороженно. В частности, такого рода отношение мы видим у Платона, который считает, что геометрия занимает подчиненное положение по отношению к арифметике, а арифметика в свою очередь подчиняется *диалектике*, то есть науке о чистых идеях. Похожие идеи (в частности, идея арифметизации геометрии) оказались очень влиятельными в математике 19-го века и первой половины 20-го века (без всякой прямой связи с Платоном). Я здесь расскажу только об одном воплощении этой идеи, которое оказалось особенно важным для математики первой половины 20-го века, и которое сохраняет свое значение и сегодня.

Вот как Гильберт объясняет свое понимание геометрии (и вообще всякой научной теории) комментируя свои *Основания геометрии* вышедшие в 1899-м году [8] :

> Очевидно, что каждая теория - это лишь схема понятий и их взаимных отношений; базовые элементы можно понимать как угодно или как того требует ситуация. Если я буду понимать точки как те или иные системы вещей, например как системы состоящие из любви, законов и трубочистов, [..] а затем буду интерпретировать все мои [геометрические] аксиомы как отношения между этими вещами, то все мои теоремы, например теоремы Пифагора, будут по-прежнему истинными относительно этих вещей.

(цитирую по [5] в моем переводе).

Эта цитата содержит следующую мысль: геометрия, в конечном счете, не зависит от интуитивных представлений, ассоциируемых обычно с терминами “прямая” и “точка”, поэтому эти понятия можно представить любым удобным способом или вообще обойтись без таких интуитивных представлений; хотя интуиция бывает полезной в математических исследованиях, она не должна играть никакой роли в обосновании результатов этих исследований. Я постараюсь показать, что на самом деле интуиция продолжает играть существенную роль даже тогда, когда математическая теория строится по рецепту Гильберта. [6]

В самом начале своих "Оснований геометрии" [8] Гильберт описывает предметную область новой геометрии как семейство "систем вещей". Понятие системы вещей кажется абстрактным и не связанным ни с какой определенной интуицией. И это понятие действительно не связано с интуицией постольку, поскольку оно является только предметом логики и метафизики. Но когда понятие "системы вещей" становится частью математики, ситуация сразу же меняется. Я покажу это на примере двух различных математических способов мышления о системах вещей: в одном случае такие системы мыслятся как emphмножества, а в другом случае - как emphкатегории. В обоих случаях речь идет о специальных математических (а не об обычных философских) значениях слов "множество" и "категория". В этом разделе я буду говорить о (математических) множествах , а в следующем - о категориях.

Кантор изобрел теорию множеств в первую очередь для того, чтобы обосновать новое понятие бесконечного или "трансфинитного" числа, с помощью которого можно было бы посчитать все точки на данном отрезке прямой или все рациональные числа между нулем и единицей (или вообще все рациональные числа). Для этого Кантору понадобились не только новые понятия, но и новые интуиции. Посмотрим, например, как Кантор вводит бесконечные ординальные числа [10]. Операцию $(+1)$, которая позволяет получить любое конечное число n, начиная с нуля, он называет *первым порождающим принципом.* Эту операцию Кантор понимает в обычном интуитивном смысле и считает ее очевидной. Затем Кантор вводит *второй порождающий принцип*, согласно которому натуральный ряд всех конечных ординалов (то есть обычный натуральный ряд) имеет бесконечный предел ω. Примение первого принципа к ω дает числа вида $\omega+1, \omega+2$, и т.д. Комбинация двух принципов дает $2\omega, 2\omega+1, 3\omega, , \omega^2$, и так далее. Таким образом Кантор расширяет традиционную вычислительную интуицию новой интуицией "бесконечного вычисления". В своих работах он напрямую обращается к воображению читателя.

Кто-то может согласиться с тем, что интуиция играет важную роль у Кантора, и в то же время утверждать, что в аксиоматической теории множеств Цермело этот интуитивный аспект теории множеств теряет всякое значение. Я не согласен с этой

[6] Более поздний вариант аксиоматического подхода развитый Гильбертом и Бернайсом в [12] предполагает использование логических символических исчислений. Именно этот последний вариант аксиоматического метода до сих пор можно считать стандартным; в частности, он используется в аксиоматической теории множеств ZF, которую я обсуждаю ниже. В этом случае идея (по крайней мере в понимании самого Гильберта) состоит не в том, чтобы избежать всякой опоры на интуицию, а в том, чтобы ограничиться только *символической* интуицией, то есть интуицией связанной с идентификацией символов и манипуляцией символами. Говоря в этой статье о "бегстве от интуиции", я исключаю из рассмотрения символическую интуицию.

популярной точкой зрения. Аксиоматический метод Гильберта не может помочь нам избавиться от теоретико-множественных интуиций тем же способом, каким он позволяет избавиться от традиционных геометрических интуиций. Дело в том, что этот метод включает в себя понятие "системы вещей". Множества в смысле аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля (ZF) - это "хорошие" системы вещей, которые не приводят к известным парадоксам. Различие между множествами и бесконечными совокупностями более общего вида (собственными классами), конечно, существенно, но оно никак не помогает избежать интуитивного представления о множествах.

Интуитивное содержание аксиоматических теорий множеств можно описать более подробно с помощью анализа отдельных аксиом этих теорий. Рассмотрим, к примеру, *аксиому пары*, входящую в ZF. Эта аксиома утверждает, что если даны множества x, y то существует также множество $z = \{x, y\}$ элементами которого являются множества x, y. В литературе эта аксиома мало обсуждается, поскольку считается самоочевидной и не проблематичной. Откуда же берется эта самоочевидность? Чем обоснован выбор аксиомы пары в качестве фундаментального принципа?

Существует по крайней мере два разных способа аргументации применимых к данному случаю. Одни ученые (последовали Фреге) серьезно относятся к вопросу том, является ли аксиома пары истинной. Другие ученые (последователи Гильберта) утверждают, что выбор аксиом это вопрос удобства: можно выбирать любые удобные аксиомы следя только за тем, чтобы данная система аксиом была непротиворечивой. Однако, как мы сейчас увидим, в данном случае разница между этими двумя подходами не имеет никакого значения. Поскольку непротиворечивость ZF невозможно доказать без использования более сильной теории (согласно второй теореме Геделя о неполноте), и поскольку ZF (или другую подобную теорию) принято считать основанием всей математики, остается только один способ работы с этой теорией: допустить непротиворечивость ZF в качестве рабочей гипотезы и следить, не обнаружится ли в этой теории какое-то ранее неизвестное противоречие. Если это произойдет, то проблему можно будет решить с помощью подходящих дополнительных аксиом. (Напомню, что современные аксиоматические теории были построены подобным образом: аксиомы ZF позволяют избежать известных противоречий "наивной" теории множеств Кантора и проводить различие между множествами и совокупностями более общего вида. При этом у нас нет и не может быть в принципе никаких гарантий того, что из аксиом ZF в принципе невозможно вывести противоречие.) Однако такой прагматический подход требует некоторых дополнительных оснований, которые могли бы сделать гипотезу о непротиворечивости ZF если и не доказанной, то хотя бы правдоподобной. И здесь мы снова возвращаемся к старым добрым интуициям, от которых, как нам казалось, мы ушли уже очень далеко. Действительно, разве не очевидно, что из любых двух вещей можно составить пару этих самых вещей? Откуда здесь взяться противоречию? Хотя доказать непротиворечивость ZF не в наших силах, мы во всяком случае можем считать, что проблема не может лежать в области элементарных конечных рассуждений. Иначе нам придется сомневаться в элементарных истинах вроде $2 \times 2 = 4$, что может быть полезно для философии, но явно не годится для математики. Последователи

Фреге используют подобные аргументы основанные на обращении к самоочевидности.

Я думаю, что аксиома пары представляется нам самоочевидной, поскольку она отражает наш опыт манипуляции объектами средних размеров (средних по отношению к размеру человеческого тела, то есть не очень больших и не очень маленьких). Символическая запись этой аксиомы предполагает возможность аналогичной манипуляции символами: возьмем объект x, потом возьмем объект y, и с помощью скобок и запятой построим новый объект $\{x, y\}$. Хотя символы это не объекты в обычном смысле слова, эта манипуляция символами позволяет описать манипуляцию с объектами определенного типа. В этом отношении интуитивная убедительность аксиомы пары вполне аналогична интуитивной убедительности евклидовых постулатов (не считая пятого): во всех этих случаях описывается некоторая несложная процедура, в эффективности которой каждый может убедиться на собственном опыте. Тот факт, что на практике эти процедуры могут быть воспроизведены не в любых мыслимых, а только в “обычных” или “допустимых” условиях, всегда можно объяснить с помощью различия между миром чистой математики и материальным физическим миром, в котором мы проводим все наши опыты. Хотя прямую линию на песке или на листе бумаги невозможно продолжать бесконечно, как того требует второй постулат Евклида, поскольку и песок, и бумага когда-нибудь заканчиваются, нетрудно представить себе идеальный мир, в котором такое ограничение не действует и выполняется второй постулат Евклида. То, что можно сделать на песке или на бумаге, оказывается достаточным для того, чтобы убедить нас в истинности этого постулата - если и не в реальном физическом мире, то в идеальном геометрическом мире.

Я не буду рассматривать здесь другие аксиомы теории множеств, но замечу, что интуиция связанная с понятием множества часто дает сбой даже в конечных случаях. В частности, это касается формального различия между множеством x и синглетоном $\{x\}$ (то есть множеством состоящим из единственного элемента x), которое не соответствует никакому очевидному интуитивному содержанию. Особенно загадочным с интуитивной (или так называемой “наивной”) точки зрения представляется синглетон $\{\emptyset\}$, где $\emptyset$ это пустое множество, то есть множество не имеющее элементов. (Само пустое множество можно пытаться представить себе как “пустоту” или “ничто” подобно тому, как обычно представляют себе ноль в арифметике).

Эти замечания показывают, что интуитивный взгляд на теорию множеств трудно (или невозможно) развить систематически на базе существующих аксиоматических теорий. Это неудивительно, так как создатели этих теорий в отличие от Кантора никогда не принимали интуитивный аспект множеств всерьез. Они относились к вопросу о теоретико-множественой интуиции как к чисто практическому вопросу или вопросу психологии индивидуального математика, но не как к вопросу теории множеств как таковой. Этим можно объяснить тот факт, что теоретико-множественные интуиции очень запутаны и на них действительно невозможно опираться в математических рассуждениях подобно тому, как мы опираемся на евклидовы интуиции в элементарной геометрии.

Можно ли эту ситуацию исправить? Обычно на этот вопрос принято отвечать отрицательно, говоря что бесконечные множества (без которых теория множеств уже не может служить основанием математики) невозможно представить в воображении в принципе. Мне это утверждение на кажется вполне очевидным. Во-первых, как мы только что видели, проблемы с теоретико-множественной интуицией возникают и в конечном случае. Во-вторых, мы видели, что Кантор в своей теории использует бесконечную интуицию (впрочем, приведенный мной выше пример касается только счетного случая; к несчетным множествам этот подход, очевидно, неприменим). Это показывает, что проблема здесь может вовсе не в бесконечности, и что аргумент о непредставимости бесконечных множеств в общем случае не проходит. Что в свою очередь наводит на мысль о том, что задачу построения полноценной интуитивной теории множеств не стоит заранее считать безнадежной. Возможный путь построения такой теории - это задание универсума множеств в виде категории (категории множеств).

4. Теория категорий и новая математическая интуиция

Теория категорий появилась в 1950-х годах как универсальный "язык", применимый в разных областях математики. В этом качестве язык категорий можно рассматривать либо как естественное дополнение к языку множеств. В начале 1960-х Лавер (Lawvere) предложил проект построения новых оснований математики при помощи теории категорий [6]. Я не буду здесь описывать всю историю этого продолжающегося проекта, но скажу несколько слов о роли интуиции в теории категорий и постараюсь объяснить, почему привычная стратегия "бегства от интуиции" не годится для категорных оснований математики.

Понятие категории (в математическом смысле) можно рассматривать как альтернативную (по отношению к понятию множества) математическую реализацию гильбертовой идеи "системы вещей". В математике 20-го века "вещи" - это как правило *структуры*; каждому типу математических структур соответствует свое понятие отображения или преобразования, о котором говорят, что оно сохраняет (или в некоторых случаях - отражает) данную структуру (хотя точнее было бы здесь говорить о сохранении или отражении данного *типа* структур). Примерами структур и соответствующих отображений являются (i) множества и функции, (ii) топологические пространства и непрерывные преобразования, (iii) группы и гомоморфизм групп, (iv) векторные пространства и линейные преобразования. Заметим, что во всех этих случаях отображения (преобразования) можно комбинировать: в случае функций такую комбинацию называют *сложной* функцией. Понятие категории описывает эту общую ситуацию: категория включает абстрактные *объекты*, отображения между этими объектами (которые также называют *морфизмами*) и операцию *композиции* отображений, которые удовлетворяют нескольким простым и интуитивно прозрачным аксиомам. Пользуясь тем, что данная категория может быть объектом другой категории, можно строить новые категории из уже данных. (Для этого нужно определить понятие морфизма между категориями; такие морфизмы называют *функторами*).

Рассмотрим более детально понятие композиции морфизмов. Интуитивное содержание этого понятия сочетает пространственные (геометрические) и временные (алгебраические) интуиции и хорошо выражается в виде следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

Вершины этого треугольника обозначают объекты данной категории, а стороны являются морфизмами между объектами. Нижняя сторона обозначает композицию двух морфизмов, представленную двумя верхними сторонами. Композиция морфизмов осуществляется в естественном геометрическом порядке, то есть в порядке “следования по стрелкам”. Эту композицию можно также записать в символической форме как $h = f \circ g$ (или $h = g \circ f$ - это более популярная нотация, которую называют алгебраической). Предполагая выполнение этого равенства соответствующую диаграмму называют *коммутативной*. (В более общем случае понятие коммутативной диаграммы определяется аналогичным образом.) Привычная символическая нотация скрывает здесь тот факт, что операция $\circ$ является частичной: это значит, что композиция $f \circ g$ определена только в том случае, когда объект-цель (кодомен) морфизма f совпадает с объектом-источником (доменом) морфизма g, как это показано на вышеприведенной диаграмме. На геометрическом языке это свойство категорной композиции можно выразить говоря, что композиция носит локальный характер: этому выражению можно придать точный смысл с помощью понятия топологии Гротендика. Локализация классических алгебраических конструкций аналогична локализации евклидовой геометрии в рамках римановой геометрии, о которой мы говорили выше в разделе 2.2. Понятие локализации является основополагающим в теории пучков, которая получила мощный импульс развития, когда Гротендик в 1960-ых годах начал использовать в этой теории категорные методы.

Я говорю здесь об эти методах не имея возможности объяснять их подробно, чтобы подчеркнуть следующее: соединение геометрической и алгебраической интуиций в понятии категории обеспечивает не просто когнитивный комфорт, а новый фундаментальный синтез геометрических и алгебраических аспектов современной математик. Теперь я коротко объясню идею постороения математических теорий с помощью теорий категорий и категорной логики сравнивая ее с гильбертовым аксиоматическим методом, который я буду называть “стандартным”.

Напомню, что стандартный метод состоит в том, что мы предполагаем некоторый класс абстрактных индивидов и абстрактных отношений между этими индивидами (это то, что Гильберт называет Ÿсистемой вещейŸ, а затем постулируем некоторые формальные свойства этих отношений (например, транзитивность) и их комбинаций в виде аксиом. При этом все необходимые логические понятия предполагаются заранее заданными и жестко фиксированными (как синтаксически, так и семантически). Например, аксиомы ZF включают только одно нелогическое отношение, а именно отношение принадлежности $\in$ Любые индивиды и любое отношение между этими индивидами можно интерпретировать как множества с отношением принадлежности в смысле ZF если и только если данное отношение удовлетворяет всем аксиомам ZF..

Аксиоматический подход использующий теорию категорий выглядит очень похоже. Мы начинаем с допущения о том, что объекты нашей теории формируют некоторую абстрактную категорию, а затем постулируем в виде аксиом некоторые специальные свойства данной категории, из которых можно вывести все остальные релевантные свойства. Речь здесь идет прежде всего о свойствах морфизмов и их композиции. В частности, таким образом может быть построена теория множеств эквивалентная ZF (точное определение этой эквивалентности нетривиально, и я вынужден оставить его в стороне). Таким образом при категорном подходе к построению теорий роль (абстрактных) морфизмов аналогична роли (абстрактных) отношений при стандартном подходе. Если понимать термин "отношение" в широком философском смысле, то категорные морфизмы можно назвать отношениями имея в виду то, что они связывают различные объекты друг с другом. Однако если использовать термин "отношение" в том точном логическом смысле, который в настоящее время является общепринятым (то есть как синоним термина "предикат" в том случае, когда число мест этого предиката больше единицы), то морфизмы это, конечно, никакие не отношения, а индивиды (объекты). Эта техническая деталь показывает, что несмотря на очевидную схожесть, ни один из двух методов не сводится к другому (хотя с помощью каждого из них можно имитировать другой). [7]

Теперь я постараюсь объяснить, почему я думаю, что категорный метод в отличие от стандартного метода не нуждается в "бегстве от интуиции". Напомню, что стандартный метод включает понятие множества в качестве абстрактной замены традиционного понятия математического объекта, предполагающего, что каждому математическому объекту соответствует своя интуиция. Когда теорию множеств стали использовать в качестве средства для построения математических структур, математики стали думать о множествах как о чем-то совершенно конкретном, и абстрактный характер понятия множества был частично забыт.

С теорией категорий произошла похожая история. Сначала эта теория казалась настолько общей и абстрактной, что ее было принято называть "абстрактной чепухой". Такое отношение к этой теории легко понять, если думать о категориях только в терминах Ÿконкретных примеровŸ таких как категория множеств, категория топологических пространств и т.д. Говоря, что эти примеры *конкретны*, я имею в виду, что

[7]Более подробно я рассматриваю применение аксиоматического метода в контексте теории категорий в монографии [7]

соответствующие понятия вводятся сначала без использования теории категорий. Например конкретная категория множеств строится следующим образом: берется весь универсум множеств (то есть любая модель ZF) и затем к этим множествам добавляются все функции, которые можно задать на этих (то есть на всех!) множествах. Тут может закружиться голова даже у того математика, для которого построение множества подмножеств любого данного множества кажется не более сложной операцией, чем построение отрезка по его концам! Кажется, что введение в рассмотрение всех множеств и всех функций это опасная и совершенно ненужная вещь в любом разумном контексте.

Я думаю, что современики Дедекинда похожим образом реагировали на его новаторские понятия кольца и идеала, которые в наше время уже воспринимаются как недостаточно общие и "слишком конкретные". Но дело, на мой взгляд, тут вовсе не в том, что за прошедшие сто лет математики приучили себя рассуждать более абстрактно. Я считаю вслед за с Кантом, что если бы они действительно это сделали, то они перестали бы заниматься математикой и ушли в область спекулятивной метафизики. Однако это не случилось. Как я уже сказал, абстрактное понятие множества потеряло свой абстрактный характер, когда теорию множеств стали использовать в качестве основания всей математики, а сами множества - в качестве удобного "материала" для построения математических структур. Хотя утверждение о том, что в 20-м веке математика стала более абстрактной (по сравнению с математикой 19-го века), безусловно, имеет под собой некоторые основания, в математике начала 21го века эта тенденция к повышению уровня абстракции уже не кажется безусловно доминирующей.

Аналогично тому, как это происходит в случае теории множеств, теория категорий теряет свой абстрактный характер как только ее начинают использовать в качестве основания математики (то есть в качестве универсального языка для построения теорий в различных областях математики). Чтобы понять почему это происходит, нужно более точно определить смысл предиката "абстрактный" в данном контексте. Идея о том, что математические объекты - это абстрактные сущности, восходит к Аристотелю. Согласно Аристотелю, любой математический объект является абстрактным в том смысле, что он представляет собой гипостазированный пучок свойств некоторого физического объекта. В современной математике множества, структуры, и категории называют абстрактными в более узком смысле имея в виду, что все эти штуки могут быть представлены очень широкими классами конкретных примеров. Эта процедура (иллюстрация общего понятия с помощью примера или *инстанциация*, как я уже сказал, предполагает, что все соответствующие примеры каким-то образом известны заранее. Например, когда в качестве примера бесконечного множества приводят множество всех точек данного отрезка прямой, то предполагают, что слушатель уже знает, что такое точка, что такое отрезок прямой. Аналогичным образом, когда в качестве примера категории приводят категорию множеств и функций, то предполагают, что слушатель заранее знает, что такое множество и что такое функция. Если же соответствующее общее понятие используется в качестве основания, то есть как средство и материал для построения своих собственных "примеров", то отношение между абстрактным и конкретным оказывается иным; в духе Гегеля можно сказать, что в этом случае "абстрактное превращается в конкретное". В частности, если теория множеств с самого начала строится как теория *категории* множеств (которая выделяется среди других категорий специфическими категорными свойствами), то объекты и морфизмы становятся совершенно конкретными строительными блоками или "кирпичами", из которых строят более сложные математические конструкции. Если категорные объекты представлять при этом в виде точек, а морфизмы - в виде стрелок, как это обычно делается в коммутативных диаграммах, то категории будут выглядеть такими же интуитивно прозрачными, как и элементарные геометрические фигуры. Разумеется, я отдаю себе отчет в том, что аналогия между категорными коммутативными диаграммами и традиционными геометрическими чертежами слишком поверхностна для того, чтобы с ее помощью можно было вернуться в потерянный евклидов рай. Тем не менее я утверждаю, что поскольку канторов рай не является вполне адекватной заменой евклидову, есть смысл всерьез ставить вопрос об интуитивных основаниях современной математики. Я думаю, что всякое серьезное исследование этого вопроса должно, с одной стороны, опираться на данные когнитивной науки и, с другой стороны, принимать во внимание математический аппарат современной фундаментальной физики и других естественных наук. Такого рода программа представляется мне сегодня более разумной, чем продолжение бегства от интуиции.

5. Заключение

Говоря о математической интуиции, я в этой статье намеренно оставил это ключевое понятие без точного определения. С одной стороны, я попытался избежать популярного понимания интуиции как клубка неясных идей и мотиваций сопровождающих любую интеллектуальную деятельность. Но с другой стороны, я не хотел брать за основу рафинированное понятие интуиции разработанное в феноменологической традиции, поскольку при этом мне было бы трудно говорить об интуиции в математике оставаясь внимательным к математическим и историческим деталям.

Вслед за Кантом я считаю, что совместная работа понятий и интуиций является принципиальной характеристикой математического мышления как такового, и что к современной и будущей математике этот тезис применим так же как и к классической математике прошлого. Кант утверждает, что "мысли без содержания пусты, интуиции без понятий слепы" (B75) и подробно разбирает на немногочисленных классических примерах (вроде теоремы о сумме внутренних углов евклидова треугольника), каким именно образом понятия и интуиции в этих случаях работают совместно. Мое замечание состоит в том, что когнитивный аппарат связывающий понятия с интуициями не является элементом жесткой структуры определяемой базовыми биологическими свойствами нашего мозга или чем-то подобным, а что этот аппарат формируется в математической практике и постоянно эволюционирует (разумеется, намного быстрее, чем происходит биологическая эволюция). Кант описал, как работает этот аппарат на некоторых традиционных примерах, а я попытался показать, как устройство этого аппарата менялось на протяжении исторического времени и специально рассмотрел те случаи, когда этот аппарат давал сбои и нуждался в капитальном ремонте. Я думаю, что необходимость в такого рода ремонте есть и сегодня.

Список литературы

[1] I. Barrow. *Geometrical Lectures (ed. by J.M. Child).* Dover Publications, 2006.
[2] E. Beltrami. Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea. *Giornale di Matematiche*, 6:284–312, 1868.
[3] E. Beltrami. Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante. *Annali di matematica pura et applicata*, 2(2):232–255, 1868-69.
[4] H.M. Edwards. The genesis of ideal theory. *Archive for History of Exact Sciences*, 23:321P378, 1980.
[5] G. Frege. *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic (transl. by E.H.W. Kluge).* Yale University Press, 1971.
[6] F.W. Lawvere. The category of categories as a foundation for mathematics. In *Proceedings of the La Jolla Conference on Categorical Algebra*, pages 1–21, 1966.
[7] A. Rodin. *Axiomatic Method and Category Theory.* Springer, Synthese Library, 2013.
[8] Д. Гильберт. *Основания геометрии.* ОГИЗ, Государственное технико-теоретическое издательство, Москва-Ленинград, 1948.
[9] Р. Декарт. *Геометрия.* ОНТИ, Москва-Ленинград, 1938.
[10] Г. Кантор. *К обоснованию учения о трансфинитных множествах: Труды по теории множеств, стр. 173-245.* Наука, Москва, 1985.
[11] Н.И. Лобачевский. *Геометрические исследования по теории параллельных линий.* Издательство Академии наук СССР, 1945.
[12] Гильберт Д. и Бернайс П. *Основания математики, т. 1.* Москва, Наука, 1979.
[13] Б. Риман. О гипотезах лежащих в основании геометрии. *Норден А.П. Об основаниях геометрии, Москва ГИТТЛ*, pages 309–341, 1956.