ПЕРЕПИСКА МЕЖДУ ВЛАДИМИРОМ ВОЕВОДСКИМ С АНДРЕЕМ РОДИНЫМ В 2014-2017 ГГ.

АНДРЕЙ РОДИН

1. Воеводский Родину15 сентября 2014:

Привет Андрей, здесь: [см. номер 11 тут https://www.math.ias.edu/vladimir/Lectures] слайды моих Бернайсовских лекций, там есть идеи которые наверное тебе понравятся (по крайней мере как тема для спора).

Володя.

2. Родин Воеводскому 15 сентября 2014:

Спасибо, Володя! я послушаю и напишу тебе, что думаю.

Андрей

3. Родин Воеводскому 3 октября 2014:

Привет Володя,

извини, что задержал с ответом. Мне действительно очень интересна тема твоих Бернайсовских лекций и сами твои лекции. Какое-то время назад я даже собирался использовать почти такой же заголовок для моей книжки - типа "прошлое, настоящее и будущее оснований математики" - но затем выбрал более нейтральное название (аксиоматический метод и теория категорий) [13]. Давай я пока прокомментирую первую лекцию , а потом напишу про остальные.

Сначала вопрос по поводу деления оснований математики на Основания 1 и Основания 2 (этот сюжет относится ко всем лекциям, не только к первой). Мне хочется лучше понять, как ты проводишь это различие. У Гильберта различие между Осн.1 и Осн.2 совпадает с делением между базовой содержательной математикой (для Гильберта это в первую очередь арифметика) и базовой МЕТАматематикой с помощью которой можно доказывать формальную непротиворечивость. Разумеется о метаматематике можно также говорить анахронистически и находить ее в более далекой истории. Но проблема, по-моему, тут в том, что само деление математики на содержательную математику и метаматематику не является нейтральным по отношению к вопросу оснований. Конструктивный подход от Менехма (о котором упоминает Прокл) до Колмогорова до Мартина-Лефа состоит, насколько я понимаю, в том, чтобы рассматривать основания математики полностью содержательно НЕ различая при этом содержание математики и ее язык - или во всяком случае проводя это различие как-то иначе, чем это делает Гильберт.

Например, про свою теорию доказательств М-Л [Per Martin-Löf] говорит так:

"If proof theory is construed not in Hilbert's sense, as metamathematics, but simply as a study of proofs in the original sense of the word, then proof theory as the same as theory of knowledge, which, in turn, is the same as logic in the original sense of the word, as the study of reasoning, or proof, not as metamathematics." [8]

Насколько я могу судить этот же содержательный подход сохраняется и в твоих Унивалентных Основаниях. В докладе на семинаре в Обервольфахе 2011го года

[http://hottheory.files.wordpress.com/2011/06/report-11[underscore]2011.pdf]

ты говоришь:

"Univalent foundations seeks to improve on this situation by providing a system, based on Martin-Löf's dependent type theory whose syntax is tightly wedded to the intended semantical interpretation in the world of everyday mathematics."

Я обратил внимание на "tightly wedded". Подход Гильберта был обратный - отделить как можно резче синтаксис от семантики. Отсюда его различие между математикой и метаматематикой. И отсюда мой вопрос - нужно ли в Унивалентных Основаниях вслед за Гильбертом различать содержательную математику и метаматематику? И если различать, то как? И как (мб совсем не опираясь при этом на Гильберта?) в этом случае различать Основания 1 и 2?

Теперь более мелкие вещи про Прокла [11]:

- Когда ты говоришь о сходстве античной греческой и современной математики мб стоит указать и на различие. Главное различие, по-моему, в том, что у греков вообще нет алгебры. Я сейчас не говорю о возможности "вчитать" алгебру во вторую книгу "Начал" Евклида и в некоторые другие греческие тексты. Наша современная игра между алгеброй и геометрией (на которой много что в математике построено, включая алгебраическую геометрию) возникла только в 17м веке - в явном виде в "Геометрии" Декарта. Поэтому для истории оснований математики 17-й век - тоже очень важный. Я сам еще не занимался этим временем всерьез, надеюсь это сделать в обозримом будущем.

- Есть еще такой вопрос, на который у меня нет никакого ответа: Насколько комментарий Прокла адекватно описывает греческую математику? Возможно, что Прокл интерпретирует эту математику очень специфическим образом и сам Евклид и другие греческие математики думали о ней иначе. Конечно, в любом случае этот комментарий - это очень важный исторический источник.

- Прокл: "Some of the ancients, however,... , insisted on calling all propositions "theorems" ... Others, on the contrary, ... , thought it correct to say that all inquiries are problems"

Я заглянул в греческий текст [10] - у Прокла нет слов propositions and inquiries, их добавил переводчик. Прокл говорит в оригинале так: одни "всё" называют теоремами, а другие проблемами. Евклид тоже не использует слово "предложение" как общий термин для проблем и теорем - он только нумерует эти вещи. По-моему, это аргумент в пользу того, что у Евклида теоремы и проблемы не сводятся к пропозициям.

- Очень интересное твое замечание о том, что понятия "больше" и "меньше" в Вавилонской математике - не математические, а метаматематические. Ты имеешь в виду, что в вавилонской математике эти понятия не входят в систему исчисления (в отличие от чисел)? Если я с этим разберусь, я лучше, наверное, пойму как ты различаешь Основания 1 и 2 и в каком смысле ты говоришь о метаматематике.

- Ты пишешь : "Methods of computation, just like axioms, combine together in a dependent manner. Of three methods A, B and C combining A and B can be consistent as well combing B and C but combining A, B and C together may lead to inconsistencies."

Что точно значит inconsistencies of methods of computation? Как это связано с формальным логическим противоречием? [...]

Андрей

4. Воеводский Родину 3 октября 2014:

> *M-L* [Per Maritin-Löf]: "If proof theory is construed not in Hilbert's sense, as metamathematics, but simply as a study of proofs in the original sense of the word, then proof theory as the same as theory of knowledge, which, in turn, is the same as logic in the original sense of the word, as the study of reasoning, or proof, not as metamathematics."

VV [Vladimir]: With this I more or less agree - Foundations 2 is a part of the general theory of reasoning (but reasoning, not knowledge). This is how I position it in the lectures - first Organon, then Boole, then Frege. Then Goedel and then the theory and practice of programming languages and related fields.

> *AR* [Andrei]: В докладе на семинаре в Обервольфахе 2011го года [http://hottheory.files.wordpress.com/2
> 11[underscore]2011.pdf] ты говоришь:
>
> "Univalent foundations seeks to improve on this situation by providing a system, based on Martin-Löf's dependent type theory whose syntax is tightly wedded to the intended semantical interpretation in the world of everyday mathematics." [3]

VV: А откуда эта цитата? По моему, я такого не говорил.

> *AR*: И отсюда мой вопрос - нужно ли в Унивалентных Основаниях вслед за Гильбертом различать содержательную математику и метаматематику? И если различать, то как? И как (мб совсем не опираясь при этом на Гильберта?) в этом случае различать Основания 1 и 2?

VV: Обязательно нужно различать, но я не уверен что это "вслед за Гильбертом" работ которого я пока совсем не знаю.

> *AR*: Когда ты говоришь о сходстве античной греческой и современной математики ...

VV: А где именно я такое говорю?

> *AR*: Я заглянул в греческий текст - у Прокла нет слов propositions and inquiries, их добавил переводчик. Прокл говорит в оригинале так: одни "всё" называют теоремами, а другие проблемами.

VV: Cool! Спасибо что заглянул, так гораздо "правильнее".

А почему ты Проклуса, Проклом называешь?

> *AR*: Евклид тоже не использует слово "предложение" как общий термин для проблем и теорем - он только нумерует эти вещи.

VV: А Евклид разделяет определения и утверждения? И если да, то как?

> *AR*: Очень интересное твое замечание о том, что понятия "больше" и "меньше" в Вавилонской математике - не математические, а метаматематические. Ты имеешь в виду, что в вавилонской математике эти понятия не входят в систему исчисления (в отличие от чисел)? Если я с этим разберусь, я лучше, наверное, пойму как ты различаешь Основания 1 и 2 и в каком смысле ты говоришь о метаматематике.

VV: Наверное больше и меньше оставались только метаматеметическими очень долго, до тех пор пока не появилось математическое понятие "отношение" и теоремы об "отношениях" примерами которых стали "больше" и "меньше" и их свойства.

> *AR*: Что точно значит inconsistencies of methods of computation? Как это связано с формальным логическим противоречием?

VV: "Method of computation" это нечто, что говорит что всякий раз когда при некоторых определенных обстоятельствах встречается комбинация символов некоторого определенного вида то можно применить некоторую определенную операцию к этим символам и заменить их на результат применения этой операции.

Такое "нечто" может быть частью системы для формального рассуждения которая в свою очередь может быть противоречивой или непротиворечивой.

Например можно добавить к арифметике Пеано метод вычисления который будет заменять выражения вида $(n + (m + k))$ на выражения вида $((n + m) + k)$. Тогда все суммы будут приводиться к виду со скобками расставленными "наиболее левым" образом. Такой метод вычисления относительно непротиворечив.

Во более сложных системах может оказаться так что метод A непротиворечив и метод B непротиворечив, а если добавить оба метода то можно вывести противоречие.

> *AR*: Как ты думаешь лучше сделать - сначала обсудить первую лекцию и потом перейти к остальным? Или я могу сразу вывалить все комментарии, а потом разберемся?

VV: Давай по частям.

Володя.

5. Родин Воеводскому 4 октября 2014:

> *AR*: В докладе на семинаре в Обервольфахе 2011го года ты говоришь: "Univalent foundations seeks to improve on this situation by providing a system, based on Martin-Löf's dependent type theory whose syntax is tightly wedded to the intended semantical interpretation in the world of everyday mathematics."

> *VV*: А откуда эта цитата? По моему, я такого не говорил.

AR: Вот здесь,

http: // hottheory.files.wordpress.com/2011/06/report-11[underscore]2011.pdf

на странице 7, во втором абзаце твоего абстракта.

> *AR*: Нужно ли в Унивалентных Основаниях вслед за Гильбертом различать содержательную математику и метаматематику? И если различать, то как? И как (мб совсем не опираясь при этом на Гильберта?) в этом случае различать Основания 1 и 2?

> *VV*: Обязательно нужно различать, но я не уверен что это "вслед за Гильбертом" работ которого я пока совсем не знаю.

AR: Гильберт (вместе с Бернайсом), насколько я понимаю, первыми придумали слово метаматематика - в первом томе их "Оснований математики" 1934 г. [5] [16][6] [...] Отсюда, конечно, не следует, что метаматематики до Гильберта не было или что после Гильберта ее больше не будет. Но идею Гильберта разбить математику на два этажа все-таки проще понять именно в контексте его собственного проекта, который довольно сильно отличается от твоего проекта, насколько я его понимаю. Поэтому я тоже думаю, что твое различие будет каким-то другим.

> *AR*: Когда ты говоришь о сходстве античной греческой и современной математики ...

> *VV*: А где именно я такое говорю?

AR: Я имел в виду эту фразу из первой лекции: “It is amazing how close these values agree with the values that I learned in the mathematical community in Moscow in nineteen-eighties.”

Тут на самом деле речь о ценностях, а о не самой математике, извини.

> *VV*: А почему ты Проклуса, Проклом называешь?

AR: Наши античники по-русски его всегда так называют. Как и Сократеса Сократом :) ... Евклид тоже не использует слово “предложение” как общий термин для проблем и теорем - он только нумерует эти вещи.

> *VV*: А Евклид [в “Началах”] разделяет определения и утверждения? И если да, то как?

AR: Да, наверху списка определений он пишет слово “определения”. А утверждения у него идут без заглавия. Кроме того, утверждениями в логическом смысле слова у Евклида можно назвать только формулировки теорем. А формулировки проблем, как и Постулаты (в отличие от Аксиом) выражаются с помощью инфинитивных глагольных конструкций вроде “построить такой-то треугольник”. В греческом как и в английском в отличие от русского неопределенная форма глагола не имеет императивной коннотации - то есть это не приказ и не просьба. Я думаю, что эти выражения нужно интерпретировать как правила - в том же смысле в котором о правилах говорят в теории типов. Постулаты - это элементарные правила, а проблемы - производные правила. Интригующий меня момент состоит в том, что проблемы и теоремы у Евклида перемешаны - доказанные теоремы используются в решениях проблем и, наоборот, решенные проблемы используются в доказательствах теорем.

> *AR*: Что точно значит inconsistencies of methods of computation? Как это связано с формальным логическим противоречием?

> *VV*: “Method of computation” это нечто, что говорит что вякий раз когда при некоторых определенных обстоятельствах встречается комбинация символов некоторого определенного вида то можно применить некоторую определенную операцию к этим символам и заменить их на результат применения этой операции. Такое “нечто” может быть частью системы для формального рассуждения которая в свою очередь может быть противоречивой или непротиворечивой.

AR: Противоречие в обычном смысле слова - это конъюнкция “А и не-А”, где А - это предложение (иначе непонятно, что такое не-А). Когда ты говоришь о (не)противоречивости формального рассуждения, ты это имеешь в виду? Или ты понимаешь формальное противоречие в более общем смысле, так что А это не обязательно предложение (т. е.

пропозиция)? Нужны ли обязательно пропозиции, чтобы говорить о противоречивости данной системы вычислительных методов? Можно ли сравнивать вычислительные методы (в смысле их сочетаемости) без пропозиций?

Мне это интересно кроме прочего в связи с постулатами и аксиомами (общими понятиями) у Евклида. Допустим, что я прав, что постулаты - это правила операций, (а аксиомы это как обычно утверждения). Понятно в каком смысле аксиомы могут противоречить друг другу. Но могут ли противоречить друг другу постулаты?

Андрей

6. Воеводский Родину 5 октября 2014:

> *AR*: В докладе на семинаре в Обервольфахе 2011го года ты говоришь:
>
> "Univalent foundations seeks to improve on this situation by providing a system, based on Martin-Löf's dependent type theory whose syntax is tightly wedded to the intended semantical interpretation in the world of everyday mathematics."
>
> *VV*: А откуда эта цитата? По моему, я такого не говорил.
>
> *AR*: Вот здесь,
>
> http://hottheory.files.wordpress.com/2011/06/report-11[underscore]2011.pdf
>
> на странице 7, во втором абзаце твоего абстракта.

VV: Это похоже писали по моим словам, но не я, так что лучше в качестве источника это не использовать.

> *AR*: Гильберт (вместе с Бернайсом), насколько я понимаю, первыми придумали слово метаматематика - в первом томе их "Оснований математики" 1934 г. [5] [16][6] [...] Отсюда, конечно, не следует, что метаматематики до Гильберта не было или что после Гильберта ее больше не будет. Но идею Гильберта разбить математику на два этажа все-таки проще понять именно в контексте его собственного проекта, который довольно сильно отличается от твоего проекта, насколько я его понимаю. Поэтому я тоже думаю, что твое различие будет каким-то другим.

VV: Собственно мне вообще не нравится слово "Foundation" в контексте математики. У нас постепенно появляется более точная терминология. Я начинаю говорить "Univalent Framework" (кстати, как это по русский?) и мы используем понятие "эталона непротиворечивости" для таких формальных теорий как ZFC которые неудобны для прямого использования в качестве системы для формализации математики, но полезны для того чтобы сертифицировать различные системы формализации в отношении их непротиворечивости.

Конечно, Гильберт такого различия не делал - математика была простой и необходимости в сложных frameworks для формализации не было и он верил в абсолютную непротиворечивость и поэтому не было нужды в эталонах непротиворечивости.

> AR: Наши античники по-русски Прокла всегда так называют. Как и Сократеса Сократом :) ... Евклид тоже не использует слово "предложение" как общий термин для проблем и теорем - он только нумерует эти вещи.

> VV: А Евклид разделяет определения и утверждения? И если да, то как?

> AR: Да, наверху списка определений он пишет слово "определения". А утверждения у него идут без заглавия.

VV: А Постулаты и Аксиомы называются постулатами и аксиомами? Какие у него еще есть "заголовки"? Пишет ли он слово "доказательство"? Приводит ли он когда нибудь две или больше разных конструкций одной проблемы?

> AR: Что точно значит inconsistencies of methods of computation? Как это связано с формальным логическим противоречием?

VV: "Method of computation" это нечто, что говорит что всякий раз когда при некоторых определенных обстоятельствах встречается комбинация символов некоторого определенного вида то можно применить некоторую определенную операцию к этим символам и заменить их на результат применения этой операции.

Такое "нечто" может быть частью системы для формального рассуждения которая в свою очередь может быть противоречивой или непротиворечивой.

> AR: Противоречие в обычном смысле слова - это конъюнкция "А и не-А", где А - это предложение (иначе непонятно, что такое не-А). Когда ты говоришь о (не)противоречивости формального рассуждения, ты это имеешь в виду? Или ты понимаешь формальное противоречие в более общем смысле, так что А это не обязательно предложение (т. е. пропозиция)?

VV: Я имею в виду например то что если к арифметике Пеано добавить вычислительное правило которое говорит что 0 можно везде заменить на 1 то получится что из доказательства (1=1+0) можно получить доказательство что (1=2) а из этого можно получить противоречие.

> AR: Нужны ли обязательно пропозиции, чтобы говорить о противоречивости данной системы вычислительных методов? Можно ли сравнивать вычислительные методы (в смысле их сочетаемости) без пропозиций?

VV: Есть понятие confluence которое можно применять к методам вне связи с утверждениями. Ну и конечно в MLTT [Martin-Löf Type theory] утверждений как таковых нет и непротиворечивость понимается как отсутствие объектов у пустого типа.

> *AR*: Мне это интересно кроме прочего в связи с постулатами и аксиомами (общими понятиями) у Евклида. Допустим, что я прав, что постулаты - это правила операций, (а аксиомы это как обычно утверждения). Понятно в каком смысле аксиомы могут противоречить друг другу. Но могут ли противоречить друг другу постулаты?

VV: Rules в теории типов могут быть несовместимыми в смысле того, что у теории с правилом А есть модель, и у теории с правилом Б есть модель, а у теории с правилами А и Б нетривиальных моделей нет.

Володя

7. Воеводский Родину 27 января 2016:

[...] Меня как раз интересует вопрос очень общий. У Прокла [Proclus:1970] есть четкое понимание различия между свойством и структурой (см. его рассуждение о том что есть угол в комментарии на Евклида). Отношение это совместное свойство двух или более объектов. В философии и математической логике основой модели "мира" является совокупность предметов и совокупность отношений между ними т.е. совокупность свойств наборов предметов. Вопрос который меня интересует это когда и как возникла и распространилась странная идея что основу мира можно описать совокупностью отношениями между предметами в противоположность совокупности совместных структур на наборах предметов. Должен был быть момент когда эта идея была явно представлена как подсобное упрощение - давайте мол попробуем для начала такой до смешного упрощенный вариант как в математике рассматривают упрощенный вариант задачи чтобы опробовать на нем ту или иную общую идею.

Володя

P.S. Отношение между предметами или есть, или его нет (две прямые или параллельны или нет), а структура может иметь больше одного представителя (см. Евклида Прокла 123 по стандартной нумерации).

8. Родин Воеводскому 30 января 2016:

> *VV*: Меня как раз интересует вопрос очень общий. У Прокла есть четкое понимание различия между свойством и структурой (см. его рассуждение о том что есть угол в комментарии на Евклида).

AR: Прокл там пытается (сам и рассказывает, как другие это делают) приписать понятие угла к одной из из 3х категорий из аристотелевского списка (его трактат "Категории"): отношение, качество и количество. И потом, ссылаясь на своего учителя Сириана Александрийского, Прокл говорит, что на самом деле угол подпадает под эти три категории сразу. Я согласен, что это похоже на то, что сегодня в математике называют структурой.

> *VV*: Отношение это совместное свойство двух или более объектов.

AR: Такое понимание отношения в истории логики очень позднее; точную формулировку такого рода впервые можно найти только у Фреге (хотя мб он что-то и использовал из более раннего и сегодня забытого, это надо проверять). Рассел считал, что это изобретение Фреге позволяет обойти все возражения Канта по поводу возможности сведения математики к логике и с помощью этого приема сам пытался осуществить такую редукцию. Аристотель - и Прокл, который ему тут следует - выносит отношение в отдельную категорию. То есть у этих древних ребят не было ничего похожего на наше стандартное общее понятие предиката.

> *VV*: В философии и математической логике основой модели "мира" является совокупность предметов и совокупность отношений между ними т.е. совокупность свойств наборов предметов. Вопрос который меня интересует это когда и как возникла и распространилась странная идея что основу мира можно описать совокупностью отношениями между предметами в противоположность совокупности совместных структур на наборах предметов.
>
> Должен был быть момент когда эта идея была явно представлена как подсобное упрощение - давайте мол попробуем для начала такой до смешного упрощенный вариант как в математике рассматривают упрощенный вариант задачи чтобы опробовать на нем ту или иную общую идею. Отношение между предметами или есть или его нет (две прямые или параллельны или нет), а структура может иметь больше одного представителя.

AR: Насколько я понимаю, эта идея сначала возникла в логике (у Фреге), а уже затем Рассел придумал под эту логику подходящую онтологию. По крайней мере сам Рассел в предисловию к своему "логическому атомизму" 1918го года [14] так это сам рассказывает .

Но в контексте математической и формальной логики того времени это не выглядело упрощением, поскольку никакой другой формальной теории о том, как работать с отношениями, просто не было. Хотя было много интересных неформальных рассуждений. С этим связан, в частности, заочный спор Рассела с Брэдли (F.H. Bradley) про "внешние и внутренние" отношения. В своей "Логике" [4] Брэдли, частично опираясь на Гегеля, строит совсем другую теорию отношений, утверждая при этом, что relata , входящие в данное отношение, в каком-то (довольно темном) смысле составляют с этим самым отношением одно целое. Рассел посчитал, что это какое-то ненужное усложнение. Главным его аргументом, насколько я понимаю, было то, что его теория отношений была формализована, а теория Брэдли нет. Это вряд ли можно считать возражением по-существу. Я правда не уверен, что теория Брэдли имеет непосредственное отношение к тому, что ты называешь математической структурой, но это было бы интересно проверить. А ты мог бы уточнить, как именно ты понимаешь структуру? Если это не множество с набором отношений, то что?

Пример Прокла про плоский и кривой угол на конусе на стр. 123 [11] (ты его имеешь в виду?) очень красивый действительно [1] .

Еще структуру можно понимать как множество с отношениями с точностью до изоморфизма - в этом случае структура может иметь больше одного представителя. Подходит ли такое понятие о структуре для того, о чем ты говоришь?

Андрей

9. Воеводский Родину 31 января 2016:

В контексте который был в моем сообщении структура на нескольких объектах это нечто что может связывать эти объекты несколькими разными способами. Отношение оно или есть или его нет, т.е., здесь связь или есть или нет, множество возможных вариантов этой связи есть или пустое множество или множество из одного элемента. Структура это связь множество вариантов которой может иметь больше одного элемента. Заметь, что при таком определении отношение между А и Б есть частный случай структуры на совокупности {А,Б}.

Что касается того что идея использовать отношения появилась сначала в логике, то я в этом сомневаюсь. Посмотри “Метафизику” Лотце [7]. Там, первые страниц сто посвящены обсуждению картины мира в которой основой является множество объектов и отношений между ними. Хотя это по моему после Фреге (кстати в первой работе Буля [2], тоже объекты и отношения, кстати Буль может быть даже дает ссылку на то, откуда он это взял), я сомневаюсь чтобы Лотце читал Фреге (или Буля).

---

[1] Аргумент Прокла, о котором тут идет речь, опровергает утверждение о том, что угол - это *отношение* между его сторонами. Аргумент состоит в следующем. На данную пару лучей исходящих из данной точки можно натянуть не только плоский угол, но и криволинейный угол образованный честью поверхности конуса (если данная точка это вершина конуса). Владимир приводит этот пример Прокла как иллюстрацию различия между отношением и *структурой*. В его интерпретации аргумент Прокла читается так: если бы угол был отношением между сторонами, то эти стороны задавали бы угол однозначно (“отношение между предметами или есть, или его нет”); но на самом деле существует целый класс углов (включая криволинейные) с одними и теми же сторонами. Таким образом здесь мы имеем дело со структурой, а не с отношением. От себя я добавлю, что то понятие о математической структуре, о котором здесь говорит Владимир, сильно отличается от понятия о математической структуре, которое есть у Бурбаки и которое обсуждают защитники “математического структурализма” такие как, например, Stewart Shapiro.

Володя

10. Родин Воеводскому 1 февраля 2016:

> *VV*: В контексте который был в моем сообщении структура на нескольких объектах это нечто что может связывать эти объекты несколькими разными способами. Отношение оно или есть или его нет, т.е., здесь связь или есть или нет, множество возможных вариантов этой связи есть или пустое множество или множество из одного элемента. Структура это связь множество вариантов которой может иметь больше одного элемента. Заметь, что при таком определении отношение между А и Б есть частный случай структуры на совокупности {А,Б}.

AR: Теперь я понимаю, о чем речь - и вижу связь с унивалентными основаниями, конечно. Тут такой очевидный вопрос возникает: а можно ли свести понятие структуры к понятию отношения просто сказав, что структура на совокупности {А,Б} это какой-то набор отношений на {А,Б}? Каждый "вариант связи" объектов А,Б будет считаться тогда особым отношением. Если такой аргумент проходит, то понятие структуры оказывается тривиальным (или скорее "стандартным": структура это множество с отношениями). Я понимаю, почему этот аргумент НЕ работает в ГТТ [гомотопическая теория типов] . Но можно ли показать, почему он не проходит и в более общем смысле? Мб дело в том, что всякий такой "набор отношений" делает возможным также дальнейший "набор отношений между отношениями" - а отношения между отношениями уже не будут отношениями в обычном смысле? Но обычное понятие предиката 2-го порядка позволяет описать и такую конструкцию. Можно ли дать какой-то общий аргумент в пользу того, что такая стандартная стратегия сведения структур к отношениям ущербна?

VV: Что касается того что идея использовать отношения появилась сначала в логике, то я в этом сомневаюсь. Посмотри "Метафизику" Лотце [7]. Там, первые страниц сто посвящены обсуждению картины мира в которой основой является множество объектов и отношений между ними.

AR: Ты прав, конечно, что сама эта идея (мир как множество объектов с отношениями) более старая. Лотце я скачал, буду читать. Я имел в виду именно Рассела с его логическим атомизмом. Для ответа на вопрос о том, почему та упрощенная картина мира, о которой мы тут говорим, по-прежнему сегодня пользуется популярностью в математической логике и аналитической метафизике, Рассел, по-моему, имеет особое значение. Ответ, по-моему, такой: Именно под эту упрощенную метафизику Фреге с Расселом придумали формальный логический аппарат, который другие потом бросились развивать. Поскольку заниматься метафизикой без всякого формального аппарата, как это в 19м веке делали Лотце, Брэдли и другие, в 20-м веке у логиков стало не принято, именно эта упрощенная метафизика стала догмой. Момент, когда это произошло, хорошо виден именно у Рассела [14]:

> [W]hen we analyse mathematics we bring it all back to logic. It all comes back to logic in the strictest and most formal sense. In the present lectures, I shall try to set forth [...] a certain kind of logical doctrine, and on the basis of this a certain kind of metaphysic.

Мне интересны Унивалентные основания в том числе потому, что они дают возможность пересмотреть эту метафизику не отказываясь при этом от требования работать формально. Это нужно делать, кроме прочего, еще и потому, что идея мира как множества объектов с отношениями совсем не годится для репрезентации того, что говорят нам о мире физики. Из попыток использовать стандартные логические методы в физике в 20-м веке ровно ничего не вышло, хотя в это дело было вложено много усилий - мы недавно с приятелем написали небольшой обзор на эту тему [17].

> *VV*: Хотя это по моему после Фреге (кстати в первой работе Буля, тоже объекты и отношения, кстати Буль может быть даже дает ссылку на то откуда он это взял), я сомневаюсь чтобы Лотце читал Фреге (или Буля).

AR: По поводу Буля. В "Laws of Thought" [3] он много говорит об отношениях, но использует этот понятие скорее как метатеоретическое. Вот пример:

> Logic is conversant with relations among things and relations among facts.

Пропозициональные связки, например импликацию, Буль тоже называет отношениями (между пропозициями). А еще отношениями он называет уравнения. Но ничего похожего на формальную логическую теорию отношений я у него не обнаружил. В его первой работе [2] я не заметил существенной разницы с тем, что он говорит в "Laws of Thought", но я буду смотреть еще внимательнее.

Темой отношений более целенаправленно занимался де Морган; об этом я нашел специальное исследование [9], которое еще не успел прочитать. Скорее всего у Моргана можно найти что-то интересное на эту тему, я попробую.

Про контакты между Лотце и Фреге я ничего не знаю, попробую разузнать, что об этом известно.

Андрей

11. Родин Воеводскому 3 февраля 2016:

Я думаю, что структуру на паре {А,Б} в общем случае нельзя описать как набор отношений на этой паре, поскольку это делает данную структуру в очень сильном смысле экстенсиональной. Это хорошо видно на примере Прокла: если понимать угол как структуру на паре пересекающихся прямых и считать способом связи этих прямых натянутую на них поверхность, то чтобы теперь свести структуру угла к отношениям между прямыми, нужно перечислить все возможные поверхности - что нельзя эффективно сделать хотя бы потому, что таких поверхностей несчетно много.

Более простой пример такой “экстенсиональной редукции” - это замена понятия человека (в смысле определения “двуногое без перьев” или какого-то другого) просто поименным списком всех людей. Тут можно задать глупый вопрос в каком смысле мы говорим о “всех” людях: идет ли речь только о ныне живущих людях, или также тех, которые жили до нас и т.д.

Понятно, что если мы вообще хотим пользоваться понятиями, а не просто конкретными указаниями на предметы, то мы не можем всегда и везде предполагать экстенсиональность. Если мы хотим, чтобы математика была инструментом науки, мы не можем и не должны предполагать, что математические структуры всегда экстенсиональны. Этот аргумент скорее эпистемологический, а не онтологический (= не метафизический). Он работает даже если считать, что реально существуют только отдельные люди, но не группы людей и не общее понятие человека.

Андрей

12. Воеводский Родину 4 февраля 2016:

Андрей, а как ты понимаешь понятие “экстенсионально”? В теории типов оно используется, по моему, как попало, а я никак не могу почувствовать его более “верхний” смысл.

Володя

13. Родин Воеводскому 4 февраля 2016:

> VV: Андрей, а как ты понимаешь понятие “экстенсионально”? В теории типов оно используется, по моему, как попало а я никак не могу почувствовать его более “верхний” смысл.

AR: Во-первых, я имею в виду традиционное для логики различие между содержаниями и объемами понятий. Идея тут в том, что, например, для понятия “человек” можно различить смысл этого понятия (который можно выразить и закрепить с помощью определения) и совокупность (класс) всех индивидов, которые подходят под данное понятие, то есть, в данном случае класс всех людей (что бы ни понимать под “всеми” людьми).

Эти русские термины переводят немецкие термины Inbegriff и Umfang , которыми пользуются и Лотце, и Гегель и другие немцы, которых наши логики читали в 19-м веке. Фреге их тоже использует. Рассел использует термины the extension для объема и the intension для содержания (наверняка английские логики и раньше этими терминами пользовались). Карнап пользуется этими терминами вслед за Расселом. Это различие есть в явном виде в “Логике Порт-Рояля” [1]. Более раннюю историю этого различения я не знаю, постараюсь узнать, давно хотел это сделать. Поскольку ни у Аристотеля, ни у стоиков в явном виде этого различия нет, скорее всего, оно впервые было введено кем-то из схоластов, но это надо проверять.

Пользуясь этим различием, можно сказать, что понятие "экстенсионально", если оно в каком-то смысле может быть точно выражено только через свой объем.

Это, конечно, очень мутная идея, которую можно уточнять в разных контекстах разными способами. Теория множеств - это интересный случай в этом отношении. Интуитивное понятие о множестве обычно включает в себя идею о том, что кроме множеств есть атомы, которые могут быть элементами множеств, но сами не являются множествами и не могут содержать элементов в том же смысле. Именно так люди обычно думают о множествах стульев, людей или натуральных чисел. Но в теориях множеств с атомами аксиому экстенсиональности приходится ограничивать (говоря, что она НЕ распространяется на атомы), поскольку из этой аксиомы сразу следует, что существует единственное похожее на атом множество, которое мы называем пустым. Еще из этой аксиомы следует, что пустое множество и множество содержащее пустое множество в качестве единственного элемента это два разных множества, что совершенно не соответствует обычной интуиции. То есть, когда мы пытаемся сказать, что (1) "все состоит из множеств" и (2) что множество, в отличие от предиката, с помощью которого данное множество может быть выделено, это "чистый экстенсионал", который полностью задается своими элементами, то получаются довольно странные вещи. А если мы хотим сказать, что "все состоит из атомов", то мы вынуждены жертвовать экстенсиональностью, поскольку необходимо каким-то образом сразу отождествлять и различать эти атомы.

Понятие класса которым пользовались логики в 19м и начале 20го века для того, чтобы говорить об объемах понятий, тоже предполагает, что классы состоят из индивидов, которые сами не являются (или по крайней мере не обязательно являются) классами. Когда Рассел придумал свою теорию типов, то он это использовал: классы атомарных индивидов это классы типа 1, классы классов типа 1 это классы типа 2 и т.д. (это простой вариант его теории без рамификации). В ЭТОМ смысле можно сказать, что теория простых типов Рассела не "полностью экстенсиональна", поскольку она предполагает, что мы каким-то образом умеем различать исходные индивиды. И то же самое, насколько я понимаю, можно сказать вообще про любую теорию типов, поскольку различие между типами не может быть описано только с помощью термов этих типов, как это делается в случае множеств и их элементов. Но в теории типов М-Л [Мартина-Лёфа] об экстенсиональности или отсутствии экстенсиональности говорят в более специальном смысле.

Говоря про экстенсиональность или не-экстенсиональность математических структур, я имел в виду просто возможность или невозможность описать данную структуру как совокупность отношений. Я сразу не вижу как сформулировать это свойство на языке теории типов. Как ты думаешь, это можно сделать?

Меня еще интересует такой исторический сюжет, который связывает вопрос об экстенсиональности с нашим разговором о происхождении упрощенной картины мира, в которой все структуры сведены к отношениям. Рассел и Уайтхед в предисловии к "Principia Mathematica" [15] пишут:

> It is an old dispute whether formal logic should concern itself mainly with intensions or extensions. In general, logicians whose training was mainly philosophical have decided for intensions, while those whose training was mainly mathematical have decided for extensions.

Nicholas Rescher в старой статье 1959 г [12] (где я нашел предыдущую цитату) настаивает на важности интенсиональных понятий для логики и философии, но при этом как само собой разумеющееся утверждает, что

> There is no doubt that mathematics requires only an extensional logic, and that intensions are entirely dispensible for its purposes... If it happens - as is the case - that the logic of intensions is not extensively developed and only incompletely understood within the wider province of symbolic logic, this is not because it is in the logical nature of things, but solely because of the mathematical orientation of modern logic.

Я плохо понимаю, откуда взялось такое убеждение, но дело тут, кажется, именно в математике, а не в философии. Может быть дело просто в том, что когда пытались математизировать логику, то выразить математически понятие объема понятия оказалось проще, чем понятие содержания понятия? Но почему это оказалось проще? Или мб дело тут все-таки в чем-то другом?

Андрей

П.С. Вот еще иллюстрация из традиционной логики. Понятие "человек" в смысле "двуногое без перьев" НЕ экстенсиональное, поскольку тот же самый объем имеют и другие понятия вроде "политического животного". Эти два понятия различаются по содержанию, но (допустим это) совпадают по объему. Мартин-Лёф похожим образом использует слово "экстенсиональность": два терма (одного типа) равны тогда и только тогда, когда они равны по определению.

14. Родин Воеводскому 20 августа 2017: (в продолжение разговора 19 августа на Логическом Коллоквиуме в Стокгольме)

Привет Володя,

вот два фрагмента Аристотеля, в которых он говорит кое-что о геометрических построениях. Первый я понимаю в том смысле, что он тут сам признает, что его силлогистика не может быть подходящей формальной теорией для геометрических доказательств. Отсутствие "среднего термина" между A и B означает, что вывод из B в A непосредственный (кстати, вчера Правиц [Dag Prawitz] на Аристотеля ссылался именно по этому поводу - кажется, еще до того, как ты пришел). У Аристотеля тут получается, что вывод из B := “X это треугольник” к A:= “сумма углов X равна двум прямым углам” - непосредственный. (Он не использует переменных в нашем смысле, поэтому у него синтаксис иначе выглядит, но смысл такой же). И это кажется Аристотелю странным, если не абсурдным, поскольку вывод из B в A - это теорема, которую надо доказывать. Получается, что силлогистика в математике годится только для того, чтобы применить общую теорему (например, о сумме углов треугольника) к частному случаю (например, случаю равнобедренного треугольника).

Второй отрывок более сложный для понимания, по-моему. Там речь идет не о формальной логике (силлогистике) - а о метафизике, а именно, о различии между актуальным и потенциальным, которому посвящена основная часть “Метафизики”. Главный аргумент Аристотеля состоит в том, что актуальное более фундаментально, чем потенциальное (а не наоборот), и соответственно действие (акт) это более фундаментальная штука, чем возможность действия. В этом отрывке Аристотель говорит о геометрическом построении как о примере действия. Звучит very exciting, но что с этим можно сделать в логике или математике, я не знаю. Второй отрывок я пере-перевел под свою ответственность, в существующих переводах было совсем непонятно.

надеюсь, что до скорого! А[ндрей].

> Let A be two right angles, B triangle, C isosceles. Then A is an attribute of C because of B, but it is not an attribute of B because of any other middle term ; for a triangle has [its angles equal to] two right angles by itself, so that there will be no middle term between A and B, though AB is matter for demonstration. (An. Pr. 48a33-37)
>
> Diagrams are devised by an activity, namely by dividing-up. If they had already been divided, they would have been manifest to begin with ; but as it is this [clarity] presents itself [only] potentially. Why does the triangle has [the sum of its internal angles is equal to] two right angles ? Because the angles about one point are equal to two right angles. If the parallel to the side had been risen [in advance], this would be seen straightforwardly. (Met. 1051a21-26, my translation)

Список литературы

[1] P. Arnauld, A. et Nicole. *La Logique ou l'art de penser*. Paris: Vrin, 1981.
[2] G. Boole. *The Mathematical Analysis of Logic*. Cambridge: MacMillan, 1847.
[3] G. Boole. *An Investigation of the Laws of Thought*. Walton Maberly, 1854.
[4] F.H. Bradley. *Principles of Logic*. Oxford University Press, 1922.
[5] D. Hilbert and P. Bernays. *Grundlagen der Mathematik (in two volumes)*. Springer, 1934-1939.
[6] D. Hilbert and P. Bernays. *Foundations of Mathematics 1 (eds. C.-P. Wirth, J. Siekman, M. Gabbay, D. Gabbay)*. College Publications (UK), 2010.
[7] H. Lotze. *Lotze's System of Philosophy. Part II: Metaphysics. English tr. B. Bosanquet*. OUP, 1887.

[8] P. Martin-Löf. On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws. *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1(1):11 – 60, 1996.

[9] D.D. Merrill. *Augustus De Morgan and the Logic of Relations*. Kluwer, 1990.

[10] Proclus. *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii ex recognitioni Godofredi Friedlein*. Princeton Univ Press, 1873.

[11] Proclus. *A commentary on the first book of Euclid's elements. Translated by G. R. Morrow*. Teubner, Leipzig, 1970.

[12] N. Rescher. The distinction between predicate intension and extension. *Revue Philosophique de Louvain*, 57(56):623–636, 1959.

[13] A. Rodin. *Axiomatic Method and Category Theory (Synthese Library vol. 364)*. Springer, 2014.

[14] B. Russell. The philosophy of logical atomism. *The Monist*, 28:495–527, 1918.

[15] B. Russell and A. Whitehead. *Principia Mathematica, 3 vols.* Cambridge University Press, 1910-1913.

[16] Д. Гильберт и П. Бернайс. *Основания Математики (в 2-х томах, перевод Н.М. Нагорного)*. Москва: Наука, 1979.

[17] А.В. Родин и С.П. Ковалёв. Аксиоматический метод в современной науке и технике: прагматические аспекты. *Эпистемология и Философия Науки*, 47(1):153–169, 2016.