Системы квантовых логик в конструктивном знании

Рассмотрим двумерное гильбертово пространство $\mathbf{C}^2$, где вектор $|\varphi\rangle$ является парой комплексных чисел. Пусть $B = \{|0\rangle , |1\rangle\}$ есть ортонормальный базис $\mathbf{C}^2$ такой, что

$$|0\rangle = (0,1); \quad |1\rangle = (1,0).$$

Определение 1. Кубит.

Кубитом называется единичный вектор $|\varphi\rangle$ в $\mathbf{C}^2$ такой, что

$$|\varphi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle,$$

где $a_0, a_1 \in \mathbf{C}^2$ и выполняется условие $|a_0|^2+|a_1|^2=1$.

Определение 2. Логический вентиль.

Логический вентиль является унарным оператором, сопоставляющий аргументам из $\otimes^n \mathbf{C}^2$, значения в $\otimes^n \mathbf{C}^2$.

Определение 3. Вентиль Тоффоли $T^{(1,1,1)}$

Вентилем Тоффоли $T^{(1,1,1)}$ называют линейный оператор $T^{(1,1,1)}$: $\otimes^3 \mathbf{C}^2 \to \otimes^3 \mathbf{C}^2$ такой, что для всяких векторов $|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle$, принадлежащих базису, верно следующее:

$$T^{(1,1,1)} (|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle) = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |\min(x,y) \oplus z\rangle,$$

где $\oplus$ определяется как сумма по модулю 2

$$\mathrm{AND}\ (|\varphi\rangle,|\psi\rangle) := T^{(1,1,1)}\ (|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |0\rangle)$$

Пусть $|\varphi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ и $|\psi\rangle = b_0|0\rangle + b_1|1\rangle$, тогда,

$$\mathrm{AND}(|\varphi\rangle, |\psi\rangle) = a_1b_1|1,1,1\rangle + a_1b_0|1,0,0\rangle + a_0b_1|0,1,0\rangle + a_0b_0|0,0,0\rangle$$

Определение 4. Вентиль Петри-Тоффоли $T^{(n,m,1)}$

Для любых $n \geq 1$ и $m \geq 1$ Вентилем Тоффоли является линейный оператор $T^{(n,m,1)}$ определенный на $\otimes^{n+m+1}$ $\mathbf{C}^2$ так, что для любого элемента $|x_1, \dots, x_n\rangle \otimes |y_1, \dots, y_m\rangle \otimes |z\rangle$ вычислительного базиса $\otimes^{n+m+1}$ $\mathbf{C}^2$ верно следующее:

$$T^{(n,m,1)}: (|x_1, \dots, x_n\rangle \otimes |y_1, \dots, y_m\rangle \otimes |z\rangle) =$$
$$= |x_1, \dots, x_n\rangle \otimes |y_1, \dots, y_m\rangle \otimes |\min(x_n, y_m) \oplus z\rangle,$$

определенном на $T^{(n,m,1)}$: $(\otimes^n \mathbf{C}^2) \otimes (\otimes^m \mathbf{C}^2) \otimes \mathbf{C}^2 \rightarrow (\otimes^n \mathbf{C}^2) \otimes (\otimes^m \mathbf{C}^2) \otimes \mathbf{C}^2$

$\mathrm{NOT}^{(1)}(|\varphi\rangle) := a_1|0\rangle + a_0|1\rangle$

В общем случае, функция NOT определяется следующим образом:

$\mathrm{NOT}^{(n)}: \otimes^n \mathbf{C^2} \to \otimes^n \mathbf{C^2}$ и для всяких $|\varphi\rangle = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j|j\rangle \in \otimes^n \mathbf{C^2}$

$\mathrm{NOT}(|\varphi\rangle) = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j \left|x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}}, 1 - x_{j_n}\right\rangle$

$$\sqrt{NOT}\left(\sqrt{NOT}(|\psi\rangle)\right) = \mathrm{NOT}(|\psi\rangle)$$

$\sqrt{NOT}^{(1)}$: $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ и для всяких $|\psi\rangle$= $a_0|0\rangle$ +$a_1|1\rangle$:

$$\sqrt{NOT}^{(1)}(|\psi\rangle) := \frac{1}{2}\,[(1+i)a_0+(1-i)a_1]\,|0\rangle + \frac{1}{2}\,[(1-i)a_0+(1+i)a_1]\,|1\rangle,$$

где i есть мнимая единица.

Также легко обобщить логический вентиль $\sqrt{NOT}^{(1)}$:

$\sqrt{NOT}^{(n)}$: $\otimes^n\, \mathbf{C}^2 \to \otimes^n\, \mathbf{C}^2$ и для всяких $|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j |j\rangle \in \otimes^n\, \mathbf{C}^2$:

$$\sqrt{NOT}^{(n)}(|\psi\rangle) := \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j \left| x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}} \right\rangle \otimes \sqrt{NOT}^{(1)}(\left| x_{j_n} \right\rangle)$$

1. $Prob(AND(|\psi\rangle, |\varphi\rangle)) = Prob(|\psi\rangle) * Prob(|\varphi\rangle)$;
2. $Prob(NOT(|\psi\rangle))$ = 1- $Prob(|\psi\rangle)$;
3. $Prob(OR(|\psi\rangle, |\varphi\rangle)) = Prob(|\psi\rangle) + Prob(|\varphi\rangle) - Prob(|\psi\rangle) * Prob(|\varphi\rangle)$;
4. $Prob\left(\sqrt{NOT}(|\psi\rangle)\right) = \sum_{j \in C^{+}|\psi\rangle} \left| \frac{1}{2}(1-i)a_{j-1} + \frac{1}{2}(1+i)\mathrm{a}_j \right|^2$;
5. $Prob\left(\sqrt{NOT}(NOT(|\psi\rangle))\right) = Prob\left(NOT(\sqrt{NOT}(|\psi\rangle))\right) = \sum_{j \in C^{+}|\psi\rangle} \left| \frac{1}{2}(1+i)a_{j-1} + + \frac{1}{2}(1-i)\mathrm{a}_j \right|^2$;
6. $Prob\left(\sqrt{NOT}(AND(|\psi\rangle, |\varphi\rangle))\right) = \frac{1}{2}$;