Реляционная семантика, ассоциированная QMV-алгебре

6 июня 2018

Константин Шишов
МГУ имени М.В. Ломоносова

В 1936г. Дж.фон Нейман и Г.Биркгоф формулируют *логику квантовой механики*, которая должна была стать теорией рассуждения о квантовомеханических системах. Эта реализация была основана на исчислении замкнутых подпространств гильбертовых пространств, что сказалось на развитии квантовой логики как особой алгебраической структуры, интерпретацией которой является множество "экспериментальных высказываний" о физической системе. Множество подпространств гильбертового пространства в такой системе исключает дистрибутивность, задает недистрибутивные решетки - *ортомодулярные* и *орторешетки*.

Системы, построенные фон Нейманом и Биркгофом отталкивалась от идеи бинарных семантик, предполагающих в качестве истинностных значений только *истину* и *ложь*.

Системы, построенные фон Нейманом и Биркгофом отталкивалась от идеи бинарных семантик, предполагающих в качестве истинностных значений только *истину* и *ложь*. Современные исследователи предлагают расширить множество истинностных значений до истинностного интервала [0,1] действительных чисел, что задает класс *нерезких квантовых логик*.

Эффект

Эффектом в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является ограниченный линейный оператор E, для каждого оператора плотности ρ удовлетворяющий условию *борновской вероятности*, формулиремому следующим образом:

$$Tr(\rho E) \in [0, 1]$$

Квантовая многозначная алгебра

Квантовой многозначной алгеброй называется структура $\mathbf{M} = \langle \mathbf{M}, \oplus, *, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, где

$\mathbf{M}$ - непустое множество;

$\oplus$ - бинарная операция на множестве M;

$*$ - унарная операция на множестве M;

$\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ - элементы множества M;

В QMV-алгебре по определению вводятся следующие операции:

$a \otimes b := (a^* \oplus b^*)^*$

$a \Cap b := (a \oplus b^*) \otimes b$

$a \Cup b := (a \otimes b^*) \oplus b$

QMV1 $a \oplus b = b \oplus a$

QMV2 $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

QMV3 $a \oplus a^* = \mathbf{1}$

QMV4 $a \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1}$

QMV5 $(a^*)^* = a$

QMV6 $a \oplus \mathbf{0} = a$

QMV7 $a \oplus [(a^* \Cap b) \Cap (c \Cap a^*)] = (a \oplus b) \Cap (a \oplus b)$

Квантовая реляционная структура - это упорядоченная тройка $\mathcal{F} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{R}, * \rangle$, где
$\mathcal{E}$ является непустым множеством состояний в гильбертовом пространстве H;
$\mathcal{R}$ является тернарным отношением на множестве состояний $\mathcal{S}$ $(\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}^3)$;
$*$ является унарной операцией на множестве $\mathcal{E}(* : \mathcal{E} \to \mathcal{E})$.

Для тернарного отношения $\mathcal{R}$ верны следующие определения:

Df1. $a \leq b \Leftrightarrow \exists c \mathcal{R} acb$

Df2. $a \perp b \Leftrightarrow \exists x \mathcal{R} abx$

Df3. $\mathcal{R}^2 abcd \Leftrightarrow \exists x(\mathcal{R} abx \;\&\; \mathcal{R} xcd)$

Df4. $\mathcal{R}^2 a(bc)d \Leftrightarrow \exists x(\mathcal{R} axd \;\&\; \mathcal{R} bcx)$

На отношение $\mathcal{R}$ накладывается ряд ограничений, выраженных следующими постулатами:

1. $\mathcal{R}abc \Rightarrow \mathcal{R}bac$
2. $\mathcal{R}^2(ab)cd \Leftrightarrow \mathcal{R}^2a(bc)d$
3. $\forall a \exists! x \mathcal{R}ax1$
4. $\mathcal{R}a11 \Rightarrow \mathcal{R}011$
5. $\mathcal{R}000$
6. $\mathcal{R}aa^*1$
7. $a \leq b \Rightarrow b^* \leq a^*$
8. $a^{**} = a$

Квантовой реляционной моделью будем называть упорядоченную семерку $\mathfrak{M} =< \mathcal{S}, \mathcal{R}, *, \rho, 0, 1 >$, где
$< \mathcal{S}, \mathcal{R}, *, 0, 1 >$ квантовой является реляционной структурой
ρ является функцией верификации $\rho : \mathcal{A} \times \mathcal{S} \to [0, 1]$, которая всякому эффекту в некотором состоянии сопоставляет число из интервала действительных чисел $[0, 1]$, которое выражает его борновскую вероятность;
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$ являются выделенными состояниями в $\mathcal{S}$.

Обозначим за $\|A\|_a$ множество $\{\varphi \in S : \rho(A, \varphi) = a\}$ всех состояний, в дальнейшем называемое *a–пропозицией* или *a–экстенсионалом эффекта*, то есть множество тех состояний в которых борновская вероятность эффекта A имеет значение a.

Пропозиции образуются следующим образом:

$\|\alpha\|_a = \{\varphi \in S : \rho(\alpha, \varphi) = a\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S})$;

$\|A'\|_a = \{\psi^* \in S : \mathcal{R}\varphi\psi x \,\&\, \rho(A, \varphi) = a \,\&\, \rho(A, \psi) = 1 - a\}$

$\|A \oplus B\|_a = \{\psi \in S : \mathcal{R}\varphi_1, \varphi_2, \psi \,\&\, \rho(A, \varphi_1) = b \,\&\, \rho(B, \varphi_2) = c \,\&\, (a = b + c \,\&\, b + c \leq 1) \vee a = 1\}$

$\|A \odot B\|_a = \{\psi \in S : \mathcal{R}\varphi_1, \varphi_2, \psi \,\&\, \rho(A, \varphi_1) = b \,\&\, \rho(B, \varphi_2) = c \,\&\, (a = b + c - 1 \,\&\, b + c \geq 1) \vee a = 0\}$

$\|A \Cap B\|_a = \{\psi \in S : \mathcal{R}^2\varphi_1, (\varphi_1^*, \varphi_2)\psi \,\&\, \rho(B, \varphi_1) = b \,\&\, \rho(B', \varphi_1^*) = 1 - b \,\&\, \rho(A, \varphi_2) = c \,\&\, (a = b \,\&\, b \leq c) \vee (a = c \,\&\, c \leq 1 - b)\}$

Определим теперь экстенсионалы как:

$\|A\| = \bigcup\limits_a \|A\|_a;$

$\|A'\| = \bigcup\limits_a \|A'\|_a;$

$\|A \oplus B\| = \bigcup\limits_a \|A \oplus B\|_a;$

$\|A \odot B\| = \bigcup\limits_a \|A \odot B\|_a;$

$\|A \Cap B\| = \bigcup\limits_a \|A \Cap B\|_a;$

$\|0\| = \varnothing;$

$\|1\| = S;$

Обозначая множество всех экстенсионалов как $\mathbf{\Pi}$, зададим функцию оценки v, которая сопоставляет всякому эффекту значение его экстенсионала из $\mathbf{\Pi}$:

$v(A) = \|A\|$

$v(A') = \|A'\|$

$v(A \oplus B) = \|A \oplus B\|$

$v(A \odot B) = \|A \odot B\|$

$v(A \Cap B) = \|A \Cap B\|$

Учитывая вышеуказанные постулаты можно определить функцию оценки v:
$v(A') = v(A)'$
$v(A \oplus B) = v(A) \oplus v(B)$
$v(A \odot B) = v(A) \odot v(B)$
$v(A \Cap B) = v(A) \Cap v(B)$

A *влечет* B в реализации в QMV-алгебре **QMV**, записывая это как $A \vDash_{\mathbf{QMV}} B$, тогда и только тогда, когда $A \leq B$. A *алгебраически влечет* B ($A \vDash_{\mathcal{A}} B$) тогда и только тогда, когда для любой **QMV** имеет место $A \vDash_{\mathbf{QMV}} B$.

A реляционно влечет B в квантовой реляционной модели $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{R},^{*}, \rho, 0, 1 \rangle$, записывая это как $A \vDash_{\mathfrak{M}} B$, тогда и только тогда, когда $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\rho(A, \varphi) \leq \rho(B, \varphi))$.
A реляционно влечет B $(A \vDash B)$ тогда и только тогда, когда для любой $\mathfrak{M}$ имеет место $A \vDash_{\mathfrak{M}} B$.

Крипкевская реализация для квантовой многозначной логики

Крипкевская реализация **QLE** представляет собой систему $K = \langle \mathcal{S}, \mathcal{R}, ^*, \rho, 0, 1, \mathbf{\Pi}, v \rangle$, где:

(1) $\langle \mathcal{S}, \mathcal{R}, ^*, \rho, 0, 1 \rangle$ есть реляционная модель, а $\mathbf{\Pi}$ является множеством экстенсионалов, содержащим $\varnothing, \mathcal{S}$ и замкнутым относительно $'$, $\oplus$, $\odot$, и $\Cap$;

(2) v есть функция, сопоставляющая любой формуле (эффекту) экстенсионал из $\mathbf{\Pi}$, удовлетворяющий следующим условиям:
$v(A) = \|A\|$
$v(A') = \|A'\|$
$v(A \oplus B) = \|A \oplus B\|$
$v(A \odot B) = \|A \odot B\|$
$v(A \Cap B) = \|A \Cap B\|$

Theorem

(i) Если $\vDash_{\mathbf{QMV}} B$*, то существует такая крипкевская реализация* $\mathcal{K}^{\mathbf{QMV}}$*, что* $\vDash_{\mathbf{QMV}} B$ *тогда и только тогда, когда* $\vDash_{\mathcal{K}^{\mathbf{QMV}}} B$*.*
(ii) Если $\vDash_{\mathcal{K}} B$*, то существует такая реализация в QMV-алгебре* $\mathbf{QMV}^{\mathcal{K}}$*,что* $\vDash_{\mathcal{K}} B$ *тогда и только тогда, когда* $\vDash_{\mathbf{QMV}^{\mathcal{K}}} B$*.*

Использованная литература:

- Giuntini Roberto. Quantum MV Algebras. *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, 56(3), 1996, pp. 393–417.
- Foulis D. J. , Bennett M. K. Effect algebra and unsharp quantum logic. *Foundations of Physics*, 24(10), 1994, pp. 1331-1352.
- Васюков В.Л. Квантовая логика. М., 2005.

Спасибо за внимание!