Логическая и экстра-логическая теоретико-доказательная семантика в гомотопической теории типов

Андрей Родин

7 марта 2019 г.

Логическое (семантическое) следствие (Тарский 1936)

Формула ϕ логически следует из совокупности формул T, в символах $T \models \phi$,

если всякая модель T является также моделью ϕ (то есть ϕ истинна во всякой модели T)

Замечание 0

Семантическое отношение логического следования $T \models \phi$ нужно отличать от синтаксического отношения выводимости $T \vdash \phi$.

Теоретико-модельная семантика вывода классической логики предикатов и других стандартных логических исчислений *корректна* в том смысле, что $T \vdash \phi$ влечет за собой $T \models \phi$.

Замечание 1

Стандартная современная формулировка 1-й теоремы Геделя о неполноте использует теоретико-модельную семантику для $T \models \phi$. (Если T - перечислимая непротиворечивая семантически корректная арифметическая теория, то T семантически неполна.)

Замечание 2

Предполагается, что в формулах T, ϕ различаются *логические константы* и экстра-логические константы и переменные. Модель формулы из ϕ - это такое приписывание значений экстра-логическим символам этой формулы, которое превращает ее в истинное высказывание. Значения логических констант при таком подходе предполагаются определенными заранее в терминах истинностных значений высказываний.

Замечание 3

В 2016 г Wilfried Hodge считал выражение "теоретико-модельная семантика логического вывода" (которое широко используется критиками этого подхода, о которых пойдет речь дальше) некорректным или по крайней мере неточным, поскольку Альфред Тарский предложил его НЕ для объяснения значения логического вывода, а для только для описания истинностных условий вывода (сохранение истинности при выводе). Однако на конференции в СПБ в мае 2018 года Wilfried уже употреблял термин "теоретико-модельная семантика" вслед за Peter Schroeder-Heister и другими пропонентами теоретико-доказательной семантики.

Теория доказательств

Beweistheorie : Hilbert & Bernays 1939

Доказательство как синтаксический объект. Теория доказательств: изучение таких объектов математическими средствами (в частности для решения вопроса о непротиворечивости данной теории). В *этом* смысле теория доказательств - это теория синтаксиса.

Общая теория доказательств Правица

Dag Prawitz (since 1970s): Теория доказательств в смысле Гильберта-Бернайса заранее предполагает ответ на вопрос о том, что такое доказательство не пользуясь при этом никакой эпистемологической аргументацией. Формальные (синтаксические) выводы действительно могут при определенных условиях играть роль доказательств, но выяснить эти условия может только более общая теория.

Общая теория доказательств Правица

Будем считать вслед за Гильбертом и Бернайсом, что доказательство это последовательность формул, которая получается в результате применения правил из фиксированного списка. Тогда правила определяют элементарные шаги доказательства. Такие элементарные шаги должны быть эпистемически прозрачны. Но теоретико-модельная семантика вывода не позволяет различать эпистемически прозрачные и эпистемически темные правила. Поэтому правила вывода требует другой семантики, которая решает этот вопрос.

Правиц 1979

Самая влиятельная теория значения это платонистская теория, которая отождествляет значение предложения с его условиями истинности: в этом случае семантика по существу устанавливается теорией истины, которая считается более фундаментальной, чем любые вопросы о том, как мы узнаем истину, включая проблему доказательства. Такой взгляд часто связывается с идеей о том, что если понятия истины и логической истины фиксированы, то доказательство [...] можно отождествить с последовательностью предложений такой что каждое последующее предложение является логическим следствием предыдущих.

Правиц 1979

Однако это неправильная идея. Действительно, чтобы судить, является ли ни нечто доказательством, нужно принять во внимание значения используемых предложений. И, разумеется, валидный аргумент всегда должен сохранять истину. Однако сохранение истины - это не достаточное условие валидности аргумента. Никто не назовет доказательством список аксиом Пеано, за которым следует утверждение Большой теоремы Ферма даже если эта теорема является логическим следствием этих аксиом. Как знает любой преподаватель, недостаточно, чтобы каждый последующий шаг доказательства следовал из предыдущего; необходимо еще, чтобы студент это *видел*. Это последнее требование обязательно должно учитываться в любом настоящем анализе понятия доказательства.

Теоретико-доказательная семантика (ТДС)

Peter Schroeder-Heister : 1991

contradictio in adjecto?

Исторические источники ТДС (20в.)

- Gentzen : введение логических констант как процедура, которая придает им значение (правила введения, правила удаления, гармония)
- BHK: Brouwer, Heyting, Колмогоров; объяснение значения: "что нужно знать, чтобы знать $A \to B$ и т.д."
- Wittgenstein: meaning as use, truth-makers; Brandom: inferentialism versus representationalism

Математические реализации ВНК

- Heyting 1930-1934: формализация интуиционистской логики высказываний
- Колмогоров 1932: исчисление задач
- Семантика реализуемости Клини
- Исчисление конструкций Крайзеля и Гудмана
- Диалектическая интерпретация Геделя
- Конструктивная теория типов Мартина-Лефа
- ГТТ
- Логика доказуемости Артемова

Исторический источник ТДС (18 в.): Кант

Дайте философу понятие треугольника, и пусть он найдет свойственным ему способом, как относится сумма его углов к величине прямого угла. У него есть только понятие фигуры, ограниченной тремя прямыми линиями, и вместе с ней понятие о таком же количестве углов. Сколько бы он ни размышлял над этим понятием, он не добудет ничего нового. Он может расчленить и сделать отчетливым понятие прямой линии, или угла, или числа три, но не откроет новых свойств, вовсе не заключающихся в этих понятиях.

Исторический источник ТДС (18 в.): Кант

Но пусть за тот же вопрос возьмется геометр. Он тотчас начнет с конструирования треугольника. Зная, что два прямых угла имеют такую же величину, как все смежные углы, исходящие из одной точки и лежащие на одной прямой, он продолжает одну из сторон своего треугольника и получает два смежных угла, сумма которых равна двум прямым углам. Внешний из этих углов он делит, проводя линию, параллельную противоположной стороне треугольника, и замечает, что отсюда получается внешний смежный угол, равный внутреннему, и т.д. Так, руководствуясь все время созерцанием, он цепью выводов приходит к совершенно очевидному и вместе с тем общему решению вопроса.

Исторический источник ТДС (18 в.): Кант

В приведенном примере мы старались только ясно показать, как велико различие между дискурсивным применением разума согласно понятиям и интуитивным применением его посредством конструирования понятий.

Априорное понятие (неэмпирическое) или уже содержит в себе чистое созерцание, и тогда оно может быть конструировано, или же оно не заключает в себе ничего, кроме синтеза возможных созерцаний, которые a priori не даны, и тогда можно посредством него судить синтетически и a priori, однако лишь дискурсивно, согласно понятиям, и никогда интуитивно, т.е. посредством конструирования понятий.
(КЧР, Трансцендентальное учение о методе, гл. 1, раздел 1)

Кантовский аргумент в контексте математики 20го века: Проблема Вигнера

Здесь возникает проблема, которая лежит полностью вне области "логистики"[...]. Каждое эмпирическое суждение относится к своей области и обязано учитывать границы опыта. Логистика же развивает систему гипотетических предположений, относительно которых мы не можем знать, допускают ли они опытную проверку или конкретное применение сейчас или в будущем. Согласно Расселу, даже общее понятие величины не относится к области чистой математики, а содержит эмпирический элемент, который может быть охвачен лишь чувственным восприятием.

Кантовский аргумент в контексте математики 20го века: Проблема Вигнера

С точки зрения логистики, задача мысли является выполненной тогда, когда ей удается установить строгую дедуктивную связь между ее собственными построениями и порождениями. Тем самым проблема законов, управляющих миром объектов, полностью отдается на откуп непосредственным наблюдениям, которые должны нам показать, имеем ли мы тут дело с определенными правилами или с полным хаосом. [Согласно Расселу] логика и математика имеют дело только с порядком абстрактных понятий и не касаются вопроса о порядке объектов.

Кантовский аргумент в контексте математики 20го века: Проблема Вигнера

При таком понятийном анализе эмпирические сущности оказываются за пределами рационального познания. Чем более дедукция демонстрирует нам свою мощь в математике, тем менее мы оказываемся в состоянии понять ее роль в теоретических естественных науках. [. . .]

Кантовский аргумент в контексте математики 20го века: Проблема Вигнера

Принцип, согласно которому наши понятия должны иметь источник в интуиции, означает только то, что они должны происходить из математической физики и показывать себя действенными в этой области. Логические и математические понятия не должны быть инструментами для конструирования метафизических "мысленных миров": их назначение состоит в том, чтобы применяться в естественных науках. (Cassirer 1907, стр. 43-44)

Аксиоматическое и генетическое построение теорий

Термин “аксиоматический” употребляется иногда в более широком, а иногда в более узком смысле слова. При самом широком понимании этого термина построение какой-либо теории мы называем аксиоматическим, если основные понятия и основные гипотезы этой теории ставятся как таковые во главу угла, а дальнейшее ее содержание логически выводится из них с помощью определений и доказательств. Аксиоматически именно в этом смысле были построены геометрия Евклида, механика Ньютона, термодинамика Клаузиуса.

Аксиоматическое и генетическое построение теорий

Усиление, которое аксиоматическая точка зрения получила в "Основаниях геометрии" Гильберта, заключается в том, что из всего материала реальных представлений, используемого для формирования основных понятий данной теории, при аксиоматическом ее построении мы принимаем в расчет лишь то, что в виде некоторого экстракта формулируется в ее аксиомах, а от всего остального содержания абстрагируемся. Когда аксиоматика начинает пониматься в таком наиболее узком смысле этого слова, в качестве очередного обстоятельства добавляется еще *экзистенциальность ее вида*. Этим *аксиоматический* способ построения какой-либо теории отличается от *конструктивного* или *генетического* способа.

Аксиоматическое и генетическое построение теорий

Евклид не делает предположения о том, что точки и прямые представляют собой фиксированные индивидные области. Поэтому он и формулирует не аксиомы о существовании, а постулаты о построении. (Hilbert&Bernays 1934)

Конструктивные объекты в семантике?

В последнее время в математике получило значительное развитие конструктивное направление. Его суть состоит в том, что исследование ограничивается конструктивными объектами и проводится в рамках абстракции потенциальной осуществимости без привлечения абстракции актуальной бесконечности; при этом отвергаются так называемые чистые теоремы существования, поскольку существование объекта с данными свойствами лишь тогда считается доказанным, когда указывается способ потенциально осуществимого построения объекта с этими свойствами.

Конструктивные объекты в семантике?

Конструктивные объекты - это некоторые фигуры, определенным образом составленные из элементарных фигур - элементарных конструктивных объектов. ... Один из простейших типов конструктивных объектов образуют слова в определенном фиксированном алфавите. Слово в данном алфавите есть ряд букв этого алфавита. (А.А. Марков1962)

MLTT: Syntax

- 4 basic forms of judgement:
  (i) $A : TYPE$;
  (ii) $A \equiv_{TYPE} B$;
  (iii) $a : A$;
  (iv) $a \equiv_A a'$
- Context : $\Gamma \vdash$ judgement (of one of the above forms)
- no axioms (!)
- rules for contextual judgements; Ex.: dependent product :
  If $\Gamma, x : X \vdash A(x) : TYPE$, then $\Gamma \vdash (\Pi x : X)A(x) : TYPE$

MLTT: Semantics of $t : T$ (Martin-Löf 1983)

- t is an element of set T
- t is a proof (construction) of proposition T ("propositions-as-types")
- t is a method of fulfilling (realizing) the intention (expectation) T
- t is a method of solving the problem (doing the task) T (BHK-style semantics)

HoTT: the Idea

Types in MLTT are (informally!) modeled by spaces (up to homotopy equivalence) in Homotopy theory, or equivalently, by higher-dimensional groupoids in Category theory (in which case one thinks of *n*-groupoids as higher homotopy groupoids of an appropriate topological space).

Обратите внимание на *внелогическую* интерпретацию логического понятия тождества! В аксиоматических теориях в стиле Гильберта различение логических и внелогических символов жестко фиксировано заранее и интерпретации подлежат *только* внелогические символы: ср. понятие сигнатуры у Бурбаки!

Homotopical interpretation of Intensional MLTT

- $x, y : A$
  x, y are points in space A
- $x', y' : x =_A y$
  x', y' are paths between points x, y; $x =_A y$ is the space of all such paths
- $x'', y'' : x' =_{x =_A y} y'$
  x'', y'' are homotopies between paths x', y'; $x' =_{x =_A y} y'$ is the space of all such homotopies
- ...

Point

Definition

Space S is called contractible or space of h-level (-2) when there is point $p : S$ connected by a path with each point $x : A$ in such a way that all these paths are homotopic (i.e., there exists a homotopy between any two such paths).

Homotopy Levels

Definition

We say that S is a space of h-level $n+1$ if for all its points x, y path spaces $x =_S y$ are of h-level n.

Cummulative Hierarchy of Homotopy Types

- -2-type: single point *pt*;
- -1-type: the empty space $\emptyset$ and the point *pt*: truth-values aka (mere) propositions
- 0-type: sets: points in space with no (non-trivial) paths
- 1-type: flat groupoids: points and paths in space with no (non-trivial) homotopies
- 2-type: 2-groupoids: points and paths and homotopies of paths in space with no (non-trivial) 2-homotopies
- ...

Propositions-as-**Some**-Types !

Which types are propositions?

Def.: Type P is a *mere proposition* if $x, y : P$ implies $x = y$ (definitionally).

Truncation

Each type is transformed into a (mere) proposition when one ceases to distinguish between its terms, i.e., *truncates* its higher-order homotopical structure.

Interpretation: Truncation reduces the higher-order structure to a single element, which is **truth-value**: for any non-empty type this value is **true** and for an empty type it is **false**.
The reduced structure is the structure of **proofs** of the corresponding proposition.
To treat a type as a proposition is to ask whether or not this type is instantiated without asking for more.

- Thus in HoTT "merely logical" rules (i.e. rules for handling propositions) are instances of more general formal rules, which equally apply to non-propositional types.
- These general rules work as rules of building models of the given theory from certain basic elements which interpret primitive terms (= basic types) of this given theory.
- Thus HoTT qualify as *constructive* theory in the sense that besides of propositions it comprises non-propositional objects (on equal footing with propositions rather than "packed into" propositions as usual!) and formal rules for managing such objects (in particular, for constructing new objects from given ones). In fact, HoTT comprises rules with apply *both* to propositional and non-propositional types.

классическая vs. конструктивная логика: реализм и анти-реализм

- истина как соответствие положению вещей (T-схема) vs. истина как существование доказательства
- доказательство как формальный вывод из аксиом vs. доказательство как эффективно предъявляемое свидетельство
- эпистемологическая рефлексия $\Box P \to P$ vs. ко-рефлексия $P \to \Box P$

Возможна ли реалистическая интерпретация ТДС?

Да, если

- понимать истину конструктивно как существование доказательства
- но при этом думать о существовании доказательств реалистически как о существовании факторов истины.

Возможный вариант формата для факторов истины: положение вещей (Витгенштейн)

В таком формате конструктивное понятие истины как существования доказательства совместимо с понятием истины как соответствия положению вещей: конструктивный (эпистемически нагруженный) реализм.

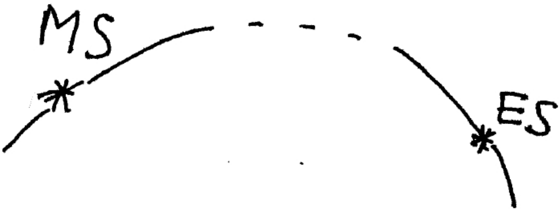
Теория значения остается полностью конструктивной (значение как использование). Знание значения предложения требует знания условий его истинности, но не требует проверки этих условий.

Вывод

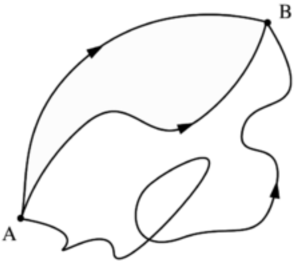
Онтологии и эпистемологии стоят или падают вместе.

Традиционный взгляд на эпистемологию как на надстройку над онтологией (Аристотель, Фреге) ошибочен.

Back to Euclidean Paradise?



... in Quantum Realm



Интерпретация правил: ТМС или ТДС?

Standard version:
Interpretation m is a model of rule R

$$\frac{A_1^m, \ldots, A_n^m}{B^m} \tag{1}$$

when the following holds: whenever $A_1^m, \ldots, A_n^m$ are true statements B^m is also true statement.

проблемы

- модель и/или объяснение значения?
- экстра-логические применения правил;
- интерпретация логических констант

Models of HoTT after Voevodsky

(1) Construct a general model of given type theory **T** (MLTT or its variant) as a category $\mathcal{C}$ with additional structures which model **T**-rules. For that purpose the authors use the notion of *contextual category* due to Cartmell 1978; in later works Voevodsky uses a modified version of this concept named by the author a *C-system*.

Models of HoTT after Voevodsky

(2) Construct a particular contextual category (variant: a C-system) $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ of syntactic character, which is called *term model*. Objects of $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ are MLTT-contexts, i.e., expressions of form

$$[x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n]$$

taken up to the definitional equality and the renaming of free variables and its morphisms are substitutions (of the contexts into $\mathbf{T}$-rule schemata) also identified up to the definitional equality and the renaming of variables). More precisely, morphisms of $\mathcal{C}(T)$ are of form

Models of HoTT after Voevodsky

$$f : [x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n] \to [y_1 : B_1, \dots, y_m : B_m]$$

where f is represented by a sequent of terms $f_1, \dots, f_m$ such that
$x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash f_1 : B_1$
$\vdots$
$x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash f_m : B_m(f_1, \dots, f_m)$
Thus morphisms of $\mathcal{C}(T)$ represent derivations in **T**.

Models of HoTT after Voevodsky

- Define an appropriate notion of morphism between contextual categories (C-systems) and form category $CTXT$ of such categories.
- Show that $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ is initial in $CTXT$, that is, that for any object $\mathcal{C}$ of $CTXT$ there is precisely one morphism (functor) of form $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \to \mathcal{C}$.

The last item is the **Initiality Conjecture** that presently stands open.

Constructive View of Theories

Theories are essentially characterised by its methods including methods of verification of their theoretical statements including empirical methods such as experimental methods. Recall Newton's *Principia*.

Проблема обоснования знаний в формальной эпистемологии

грант РФФИ 19-011-00799 (Владимир Васюков, Сергей Ковалев, Даня Рогозин, Андрей Родин, Сергей Титов, Георгий Шабат)

http://philomatica.org/projects/ongoing/knowledge-justification-in-formal-epistemology/

СПАСИБО!