Теория категорий и поиски новых математических оснований физики | Печать |

Автор Родин А.В.

29.07.2010 г.

Статья посвящена анализу известных на сегодняшний день попыток использовать математическую теорию категорий в качестве общих оснований для математики и физики.

The article is devoted to analysis of present-day attempts to use of quantum categorical theory by way of general foundations of mathematic and physics.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: категория, n-категория, теория категорий, категорная модель, физика, квантовая физика, пространство-время, топология, квантовое пространство-время, квантовая теория, квантовая гравитация, математическая структура, квантовые категории.

KEYWORDS: category, n-category, categorical theory, categorical model, physics, quantum physics, space-time, topology, quantum space=time, quantum theory, quantum gravity, quantum structure, quantum categories.

Физика, математика и проблема общих оснований

История физики в современном смысле слова начинается с Галилея, который постулировал, что математика это именно тот "язык на котором написана книга природы". Этот фундаментальный методологический принцип современной физики означает нечто большее, чем простое допущение возможности описания физических явлений с помощью математических моделей. Он также означает, что физические понятия вовсе не существуют в качестве таковых без соответствующих им математических понятий. Такая специфическая связь между математикой и физикой, впервые возникшая в науке Нового времени, не является симметричной. Физическое пространство ньютоновской физики с математической точки зрения является евклидовым геометрическим пространством. Это евклидово геометрическое пространство может быть рассмотрено вне связи с физикой как предмет чистой математики; иными словами, понятие геометрического пространства может быть абстрагировано от всякого физического содержания. Однако в обратную сторону подобная процедура не работает: хотя Ньютоново понятие пространства и имеет физическое содержание, не сводимое к математическому, это физическое содержание ни при каких условиях не может быть выделено в чистом виде в абстракции от математического содержания данного понятия.

Если чистая математика, не связанная непосредственно ни с какими физическими соображениями, активно практикуется и сегодня, то "чистая физика", не использующая математику, уже не существует как самостоятельная научная дисциплина. Такое положение вещей вовсе не является само собой разумеющимся. Когда Ньютон впервые опубликовал свои "Математические начала натуральной философии" (т.е. математические основания физики) [Ньютон 1687] идея о том, что физика требует именно математических оснований, еще не была общепринятой. "Чистая" нематематизированная физика продолжала практиковаться в европейских университетах вплоть до конца XVIII в. В качестве любопытного свидетельства можно указать на русский перевод "Экспериментальной физики" Христиана Вольфа, опубликованный Михаилом Ломоносовым [Вольф 1746]. Однако беспрецедентные по историческим меркам успехи новой математической физики в XVIII в. и сопутствующее развитие технологий все же убедили научное сообщество в том, что именно математическая, а не "чистая" или какая-либо иная физика способна обеспечить дальнейший прогресс физического познания. Впрочем, понятие об экспериментальной базе физики, отличающей физику от математической спекуляции, также прочно вошло в методологический канон этой науки. В этом смысле было бы совершенно несправедливо рассматривать вышеупомянутый учебник Вольфа, который на самом деле дает хорошее представление об основных результатах экспериментальной физики своей эпохи, только в качестве исторического рудимента.

Математические основания новой физики, заложенные Ньютоном, были новыми не только для физики, но и для математики. Новые математические понятия, созданные Ньютоном специально для новой физики, составили основу того, что сегодня называют математическим анализом. В течение XVIII - XIX вв. новая математика, возникшая вместе с новой физикой, прошла через период бурного развития, тесно связанного с развитием физики. В трудах Барроу, Лапласа, Лагранжа, Гамильтона, Эйлера, Гаусса и многих других ученых этого периода очень трудно отделить математику от физики; более того, такое разделение оказывается часто совершенно бессмысленным. Само собой разумеется, что физика, которой занимались эти ученые, была математической физикой в духе Ньютона, а не старомодной схоластической физикой в духе Аристотеля. Менее очевидно, но не менее верно и то, что математика, которой они занимались, была по большей части "физической математикой" в духе того же Ньютона, а не чистой математикой в духе Евклида. Глядя на эту эпоху с исторической дистанции можно констатировать, что идея объединения математики и физики на общих основаниях оказалась чрезвычайно плодотворной для развития науки в целом.

На рубеже XIX - XX в. в физике и математике происходили драматические события, которые принято называть "кризисом оснований", но которые можно точнее охарактеризовать как кризис роста. В физике этот кризис был связан с созданием двух фундаментальных теорий, которые сохраняют свой статус фундаментальных вплоть до сегодняшнего дня: общей теории относительности и квантовой теории. Эти две теории потребовали радикального пересмотра базовых физических понятий и принципов, лежащих в основе классической ньютоновской физики, который нельзя считать завершенным хотя бы по той причине, что две только что упомянутые теории до сих пор не объединены в рамках единой теории. Эта проблема, к которой мы скоро вернемся, известна как проблема квантовой гравитации.

Начало аналогичного кризиса в математике обычно связывают с развитием неевклидовой геометрии (точнее неевклидовых геометрий). Поскольку классическая модель синтеза математики и физики, предложенная в свое время Галилеем и Ньютоном, не предполагает существования различных геометрий (и тем более не допускает возможности физической интерпретации невклидовых геометрий), ясно, что эта модель не могла сохраниться в новых условиях. Это заставило математиков и физиков активно искать возможности для нового синтеза. Есть веские причины, чтобы утверждать, что искомый новый синтез математики с физикой, который мог бы обеспечить дальнейший устойчивый прогресс этих наук на протяжении хотя бы нескольких поколений, на сегодяшний день так и не достигнут. Одна из этих причин связана, на наш взгляд, с современной ситуацией в основаниях математики. Из нескольких конкурирующих проектов построения новых оснований математики, которые почти одновременно возникли в начале XX в., лидирущим оказался проект переустройства всей математики на основе теории множеств. Несмотря на то, что теория множеств вскоре столкнулась со своим собственным кризисом оснований [Френкель 1966] (который так и остался до конца не разрешенным), она предоставила математике подходящий "язык" для формулировки и доказательства теорем из самых разных областей этой науки.

Таким образом, несмотря на свои внутренние проблемы теория множеств действительно послужила основой для объединения и организации математики в XX в. Однако серьезным недостатком такой организации стало то, что понятие множества (в той специфической форме, в которой это базовое понятие описывается данной теорией) оказалось либо вовсе не связанным с базовыми понятиями современной физики, либо связанным с ними неудовлетворительным образом. Часто повторяемый аргумент о том, что "бесконечных множеств нет в природе" (или что такие множества не могут быть частью нашего чувственного опыта), указывает на данную проблему, но, на наш взгляд, не является вполне убедительным. Ведь не имеющих частей точек и идеальных прямых линий в природе тоже нет, но это не мешает использовать эти геометрические понятия в классической физике. Чтобы установить связь между этими геометрическими понятиями и физическим опытом, обычно говорят, что данные геометрические понятия являются "идеализированными моделями" физической действительности; когда физическое тело в ньютоновской механике представляют в виде точки, такая идеализация состоит в том, что размеры данного тела просто не принимаются во внимание, что во многих ситуациях является совершенно оправданным. Однако современное математическое понятие пространства как бесконечного множества точек, снабженного дополнительной структурой, невозможно рассматривать как идеализированный образ физического пространства в подобном смысле; даже если подходящую процедуру идеализации и можно себе представить, она никак не связана с физической практикой. Если и можно говорить о том, что теория множеств решила проблему оснований математики в XX в. (что, впрочем, вызывает многочисленные возражения как и математиков, так и философов), она в любом случае оставила полностью открытой проблему математических оснований новой физики, или даже сделала эту проблему еще более острой.

Разумеется, использование математиками теоретико-множественных оснований (или в более мягкой форме - только "теоретико-множественного языка") не является непреодолимым препятствием для любого сотрудничества между физиками и математиками. Однако теоретико-множественные основания математики по меньшей мере не способствуют такому сотрудничеству. Обычно математики, занимающиеся физическими проблемами, и тем более сами физики стараются обращать на основания математики как можно меньше внимания и работать только с теориями более высокого уровня. Но, как нам представляется, такая стратегия избегания вопроса оснований не только не способствует быстрому успеху, но и ставит принципиальные барьеры на пути дальнейшего прогресса теоретической физики. В частности, именно с этим может быть связано отсутствие убедительного прогресса в теории квантовой гравитации [Каллендер 1985].

В том, что математика и теоретическая физика становятся все более сложными и более абстрактными, принято видеть неизбежное следствие прогресса науки. Стоит, однако, заметить, что схоластическая "чистая физика" тоже была зачастую чрезвычайно сложной и абстрактной, тогда как новая математическая физика Галилея и Ньютона опиралась на простые и ясные геометрические и физические интуиции, и именно это предопределило ее грандиозный успех. Этот исторический пример показывает, что возможность найти для современной физики и математики новые простые и ясные общие основания, которые способствовали бы дальнейшему прогрессу этих наук, не следует заранее отвергать как утопическую. Разумеется, новые физико-математические основания сами по себе не могут дать немедленного решения проблемы квантовой гравитации и других фундаментальных проблем современной физики. Однако вполне может оказаться, что в рамках существующих оснований эти проблемы попросту не имеют никакого решения. Таким образом, нам представляется разумным рассматривать поиск новых оснований как необходимое (хотя и очевидно недостаточное) условие для дальнейшего прогресса[2].

Целью данной статьи является анализ известных на сегодняшний день попыток использовать теорию категорий в качестве общих оснований для математики и физики. Важно подчеркнуть, что в данном случае речь идет не просто о попытках приложения нового математического аппарата для решения некоторых физических проблем, но о попытках разработки нового математического языка для теоретической физики. В следующем разделе статьи мы очень кратко изложим основные идеи и понятия теории категорий, акцентируя внимание читателя на тех аспектах этой теории, которые оказываются важными для физики. Хотя это краткое описание само по себе не может быть использовано в качестве введения в теорию категорий для физиков, оно, как мы надеемся, может помочь читателю сориентироваться в существующей математической литературе, на которую мы обильно ссылаемся.

В третьей части статьи мы отдельно расскажем об относительно новом разделе теории категорий, который называют теорией высших категорий. Мы включаем этот дополнительный раздел в наше краткое описание теории категорий не из соображений полноты, а поскольку именно теория высших категорий наиболее активно используется в современной физике.

В четвертой части статьи мы расскажем о существующих попытках использования теории категорий в физике, а в заключительной пятой части сделаем некоторые предварительные выводы.

Категории

Теория категорий была предложена в 40-х годах прошлого века американскими математиками МакЛейном и Эйленбергом в качестве полезного "языка" для алгебраической топологии [МакЛейн 1945]. Прежде чем дать формальное математическое определение понятия категории, приведем его неформальное описание на интуитивно ясном примере. Интуитивный аспект этого понятия будет важен и в дальнейшем, когда мы будем говорить о применениях теории категорий в физике.

Чтобы объяснить новичку, чем занимается математическая дисциплина топология, обычно говорят следующее: топология интересуется свойствами геометрических объектов, которые не меняются при обратимых непрерывных преобразованиях. Представим себе геометрический объект сделанным из резины и постулируем, что его можно как угодно деформировать не допуская разрывов и склеек. Те свойства, на которые такие деформации никак не влияют - например, количество сквозных отверстий - будем называть топологическими свойствами, а сам такой "резиновый" геометрический объект будем считать топологическим объектом и называть его топологическим пространством. Как мы видим, данное неформальное введение понятия топологического пространства существенно использует интуитивное представление о непрерывном преобразовании.

Стандартное теоретико-множественное определение топологического пространства не придает понятию непрерывного преобразования фундаментального значения. В этом случае топологическое пространство определяется как множество (элементы которого по традиции принято называть точками) с выделенной системой подмножеств (которые называют открытыми множествами), которая удовлетворяет соответствующим аксиомам [Александров 1977]. Понятие непрерывного и, в частности, обратимого непрерывного преобразования вводится позже на основе ранее введенного понятия топологического пространства. (Непрерывные преобразования в общем случае по-прежнему не допускают разрывов, но допускают склейки.) В этом, разумеется, нет никакой формальной ошибки, однако интуитивный аспект теории оказывается если и не совсем утерянным, то во всяком случае оторванным от ее оснований[3].

Категория топологических пространств состоит из всех топологических пространств и всех непрерывных преобразований этих пространств друг в друга и самих в себя. Такая конструкция может на первый взгляд показаться слишком громоздкой. Однако это первое впечатление пропадает, если рассматривать ее не экстенсионально, считая все пространства и все преобразования этих пространств заранее данными, а интенсионально, рассматривая категорию топологических пространств в качестве представления содержания общих понятий топологического пространства и непрерывного преобразования. Преимуществом категорного подхода является то, что преобразования топологических пространств (т.е. непрерывные преобразования) включены в эту конструкцию на равных с самими пространствами. Как мы видели, такой подход лучше соответствует наивному интуитивному представлению о топологическом пространстве. На самом деле он также лучше соответствует серьезной математической практике работы с топологическими пространствами, в которой непрерывные преобразования, как правило, играют ключевую роль.

Попробуем пояснить сказанное на нематематическом примере. Предположим, что мы пытаемся каким-то образом эксплицировать общее понятие человека. Классическая стратегия состоит в том, чтобы из всех человеческих свойств выделить все те, которые одинаково присущи всем людям и при отсутствии которых мы не будем считать данную вещь человеком. Затем такой набор общих свойств можно отождествить с содержанием общего понятия человека. Категорная стратегия состоит в другом. В этом случае вместо свойств мы будем пользоваться преобразованиями и поставим вопрос о том, насколько может измениться данный человек, оставаясь при этом человеком. Полное описание таких преобразований даст нам альтернативную экспликацию содержания общего понятия человека. Категория топологических пространств представляет собой подобного рода альтернативную экспликацию содержания общего понятия топологического пространства.

Итак, "категорную философию" можно кратко сформулировать следующим образом: любой данный тип объектов нужно рассматривать вместе с преобразованиями объектов данного типа друг в друга и в самих себя. Замечая, что всякий объект можно формально заменить тождественным преобразованием данного объекта в себя, можно предложить и более сильную "гераклитовскую" версию "категорной философии", согласно которой только понятие преобразования (или процесса) является для науки фундаментальным, тогда как понятие объекта играет в ней лишь вспомогательную роль[4].

Общие свойства преобразований, хорошо известные из существующей математической практики, лежат в основе следующего стандартного определения понятия категории [МакЛейн 1971].

Определение

Категория C состоит из:

Объектов *A, B, C* ...;

морфизмов *f, g,* ... вида $f: A \to B$; объект A здесь называют *источником*, а объект B - *назначением* морфизма *f*;

для каждой пары морфизмов $f: A \to B$, $g: B \to C$ таких, что назначение *f* совпадает с назначением *g*, определена операция композиции $\circ$, результатом которой является новый морфизм $h: A \to C$; композиция морфизмов записывается с помощью равенства $f \circ g = h$; эта операция может быть также представлена в виде диаграммы:

для каждого объекта *A* данной категории существует *тождественный* морфизм 1_A вида $A \to A$, который удовлетворяет следующим условиям:

(i) для любого *входящего* морфизма *f* вида $\to A$ имеет место равенство $f \circ 1_A = f$; (ii) для любого *исходящего* морфизма *g* вида $A \to$ имеет место равенство $1_A \circ g = g$;

композиция морфизмов является ассоциативной:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

На этом определение понятия категории закончено.

Кроме упомянутой выше категории топологических пространств примерами категорий являются категория множеств (объекты - множества, морфизмы - функции), категория групп (объекты - группы, морфизмы - гомоморфизмы групп), категория линейных пространств (объекты - линейные пространства, морфизмы - линейные преобразования). В данных примерах объекты категорий построены как ``множества с дополнительной структурой'' (или ``голые множества'' в случае категории множеств), а морфизмы - как отображения, ``сохраняющие'' данную структуру. Однако категории могут быть также введены более формально. В этом случае объекты и морфизмы задаются исключительно своими категорными свойствами. Например, всякая отдельная алгебраическая группа может быть рассмотрена как категория, имеющая единственный объект, в которой все морфизмы являются обратимыми (т.е. являются изоморфизмами). Аналогичным образом всякое частично упорядоченное множество (M, >) может быть представлено в виде категории, объектами которой являются элементы этого множества a, b, c ...; для данной упорядоченной пары a, b таких объектов существует единственный морфизм a→b, если и только если a>b.

На основе такого рода базовых примеров можно конструировать примеры более высокого уровня. С помощью идеи'' сохранения структуры'' для данной пары категорий A, B естественным образом определяется понятие морфизма вида A → B; такие преобразования одних категорий в другие называют функторами. Рассматривая функторы вида A → B (при фиксированных A, B) в качестве объектов новой категории BA подобным образом определяют понятие морфизма между функторами; такие морфизмы называют естественными преобразованиями. Исторически именно понятие естественного преобразования было основной мотивировкой первоначального введения понятия категории в работе [МакЛейн 1945]. Несмотря на то, что чрезвычайно общий характер теории категорий вызывал (и продолжает вызывать) настороженное отношение у части математиков, в 1950-60-х годах она не только развилась в самостоятельную математическую дисциплину, но и позволила получить важные результаты в других областях математики, прежде всего в алгебраической топологии и алгебраической геометрии. В этой связи следует упомянуть результаты двоякого рода. Во-первых, теория категорий позволила построить теорию гомологий и когомологий как аксиоматическую теорию с ясными базовыми понятиями и ясной структурой [Эйленберг 1952]. Во-вторых, теория категорий позволила ввести новые понятия в алгебраической геометрии (в частности, понятия схемы, топоса и мотива) и доказать в этой связи принципиально новые математические факты [Гротендик 1945]. Таким образом оказалось, что теория категорий может служить не только для формулировки и уточнения существующих теорий, но и для создания принципиально новой математики.

Новый этап в развитии теории категорий связан с работами Ловера, который в начале 1960-х годов начал работать над программой построения категорных оснований математики [Ловер 1966; Ловер 1963]. Проект категорных оснований содержит несколько принципиальных идей. Мы упомяним здесь только две из них, которые имеют отношение к использованию теории категорий в физике.

(i) Говоря о категориях, в которых объектами являются множества с дополнительной структурой, мы всякий раз негласно предполагали, что объекты и морфизмы этих категорий определены заранее независимо от данной категории. Однако на эту конструкцию можно посмотреть и с обратной стороны. Рассмотрим для определенности случай категории множеств. Вместо того чтобы предполагать множества и функции заданными заранее с помощью какой-либо общепринятой аксиоматической теории множеств (вроде популярной системы Цермело-Френкеля (ZF)), мы начнем с того, что рассмотрим категорию множеств как абстрактную категорию самого общего вида, а затем постулируем, что данная категория обладает неким конечным набором свойств, который отличает категорию множеств от любой другой категории. В результате мы получаем альтернативную теорию множеств, в которой в качестве примитивного используется не отношение принадлежности элемента множества данному множеству как в ZF и подобных теориях, а понятие функции.

Впервые такая категорная теория множеств была предложена Ловером в работе [Ловер 1964], которая также содержит набросок доказательства того факта, что предложенная автором теория эквивалентна ZF. Однако не будем забывать, что категорию множеств мы взяли только в качестве примера. Похожим образом могут быть сконструированы другие категории, например, категория линейных пространств. Такие категории конструируются "чисто категорно", т.е. без использования множеств, тогда как обычная конструкция линейного пространства существенным образом использует понятие множества. В этом смысле только что описанный категорный подход является альтернативой использованию теории множеств в качестве оснований математики.

Для нас здесь важны не столько логико-философские аспекты проблемы оснований (впрочем, о логическом аспекте проблемы мы скажем особо чуть ниже), сколько тот факт, что при категорном подходе объекты и морфизмы можно рассматривать в качестве элементарных "кирпичиков" математических конструкций, не приписывая им заранее никаких специальных свойств. Как мы скоро увидим, это открывает широкое поле для физических интерпретаций. Основная идея физической интерпретации категорных конструкций состоит в математическом представлении физических объектов категорными объектами и физических процессов категорными морфизмами.

(ii) Впервые введенное Гротендиком понятие топоса является далеко идущим обобщением классического понятия топологического пространства. Элементарным примером топоса Гротендика является категория пучков множеств над данным топологическим пространством. Гротендик получил важное обобщение этого примера, заменив обычное понятие топологического пространства более общим понятием сайта. Сайт *G* представляет собой (абстрактную) категорию с топологическими свойствами, которые задаются с помощью чисто категорных конструкций. Пучок множеств над сайтом G представляет собой определенного типа функтор $G \rightarrow Set$ из этого сайта в категорию множеств. Категория S etG функторов данного типа называется топосом Гротендика (точное определение можно найти, например, в [Маккай 1977]).

Однако современное понятие топоса не исчерпывается его геометрическим аспектом. Опираясь на работы Гротендика Ловер и Тьерни [Тьерни 1972] открыли то, что стало принято называть внутренней логикой топоса. Первоначальное наблюдение Ловера состояло в том, что категорные свойства пучков множеств, которые являются объектами топоса Гротендика, во многом аналогичны категорным свойствам обычных множеств. Исходя из этой аналогии, Ловер предложил метафору топоса как категории "переменных множеств" или, более точно, категории "множеств изменяющихся непрерывным образом", рассматривая при этом категорию обычных "постоянных" множеств в качестве частного случая. Если теперь посмотреть на классическую логику как на внутреннюю логику множеств (имея в виду, в частности, что алгебра подмножеств данного множества так же, как и алгебра высказываний классической логики, является полной булевой алгеброй), то естественно задать вопрос о том, что представляет собой внутренняя логика топоса. В общем случае такая логика оказывается многосортной и многозначной интуиционисткой логикой, причем конкретный вид логики однозначно определяется свойствами данного топоса. (Классическая логика здесь рассматривается в качестве частного случая интуиционисткой; этот случай в точности отвечает топосу множеств.) Точная формулировка этого результата принадлежит Тьерни который ввел понятие *внутреннего языка* топоса: такой внутренний язык формулируется в виде формального исчисления обычного вида (т.е. с линейным, а не диаграмматическим синтаксисом), который по определенным правилам приписывается данному топосу. Любые категории вида Set^C (категории функторов из данной малой категории C в категорию множеств), а не только категории пучков, являются *элементарными топосами* в смысле Ловера и обладают своей внутренней логикой. Топосы такого более общего вида называют топосами предпучков[5].

Не имея возможности углубляться здесь в детали топосной (и более широко - категорной) логики, отметим только, чем это направление может быть интересно для физики. Как известно в 1900 г. Гильберт включил проблему аксиоматизации физики в число важнейших нерешенных проблем, заслуживающих неотложного внимания [Гильберт 1900]. Однако несмотря на то, что аксиоматический метод (и более того - именно вариант аксиоматического метода, предложенный Гильбертом) сыграл и продолжает играть весьма важную роль в математике, программа аксиоматизации физики в XX в. не привела ни к каким прорывам в этой науке и осталась маргинальной. Одна из причин этого неуспеха, на наш взгляд, состоит в том, что в рамках подхода, предложенного Гильбертом (и в последствии разработанным Тарским) базовое логическое исчисление, используемое для аксиоматизации, либо просто берется "с потолка", либо его выбор обосновывается с помощью аргументов метафизического и эпистемологического характера. За редким исключением в качестве такого логического исчисления берется классическая логика предикатов.

Понятие внутренней логики топоса позволяет переосмыслить такое традиционное отношение к логике подобно тому, как с созданием теории относительности было переосмыслено традиционное отношение к евклидовой геометрии. Если представить себе, что данный топос моделирует некоторую физическую ситуацию, то внутренняя логика этого топоса будет зависеть от этой ситуации, а не задаваться априори. Таким образом логика топосов открывает новые возможности для продвижения программы аксиоматизации физических теорий, хотя сам смысл понятия аксиоматизации претерпевает при таком подходе существенные изменения. Ниже мы увидим, каким образом этот подход реализуется на практике.

Высшие категории

Прежде чем перейти непосредственно к обзору существующих категорных подходов в физике, нам необходимо указать еще на один раздел теории категорий, который является относительно новым, но несмотря на это находит наиболее широкое применение в физике. Этот раздел теории называют теорией *n-категорий* или иначе теорией высших категорий [Лейнстер 2002]. Для начала введем понятие 2-категории. Кроме объектов (которые в новом контексте называются *0-морфизмами*) и обычных морфизмов этих объектов (обычные морфизмы в новом контексте называются *1-морфизмами*) 2-категория содержит 2-морфизмы, которые являются морфизмами морфизмов. Понятие 2-морфизма можно проиллюстрировать с помощью следующей диаграммы:

Существенным является тот факт, что 2-морфизмы допускают не единственную операцию композиции как 1-морфизмы, а две таких операции, которые обычно называют вертикальной и горизонтальной. Эти названия становятся ясными если представить композиции 2-морфизмов в виде диаграмм:

где $k = f \circ h$ и $l = g \circ i$ (горизонтальная композиция 2-морфизмов).

(вертикальная композиция 2-морфизмов).

В качестве примера 2-категории, который имплицитным образом содержится уже в ранних работах МакЛейна и Эйленберга, можно привести любую категорию категорий, т.е. категорию, объектами (0-морфизмами) которой являются категории некоторого класса (при этом вовсе не обязательно иметь в ввиду класс *всех* категорий), морфизмами (1-морфизмами) являются функторы, а 2-морфизмами являются естественные преобразования этих функторов.

Аналогичным образом вводится понятие 3-морфизма как преобразования 2-морфизмов, что приводит к понятию 3-категории. Отсюда уже не очень сложно получить индуктивное понятие n-категории для произвольного натурального числа n, что, впрочем, не решает автоматически проблему комбинаторной сложности получаемых таким образом конструкций.

Только что описанное понятие n-категории называют *точной* n-категорией. Однако основная мотивация применения высших категорий в физике (как, впрочем, и основной вектор развития самой теории высших категорий) состоит в другом аспекте, который называют теорией *слабых* n-категорий. (Поскольку именно теория слабых высших категорий находится в фокусе современного развития данной области, говоря о n-категориях авторы как правило по умолчанию имеют в виду слабые категории; если речь идет о точных n-категориях, то это уточняется особо.) Слабые 2-категории были впервые введены Бенабу в работе [Бенабу 1967]. Идея такой категории состоит в том, чтобы в некотором смысле заменить обычное математическое равенство 2-морфизмами. В частности, вместо того чтобы постулировать ассоциативность композиции 1-морфизмов обычным образом в виде равенства вида

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

постулируется существование специального 2-морфизма α, называемого ассоциатором, имеющего вид

$$\alpha : (f \circ g) \circ h \to f \circ (g \circ h).$$

Даже простой композиции 1-морфизмов можно придать необычный смысл, если записывать ее не обычным образом в виде равенства

$$f \circ g = h,$$

а следующим образом:

$$\beta : f \circ g \to h,$$

где β это некоторый 2-морфизм, который преобразует данную пару 1-морфизмов f, g в новый 1-морфизм h. (Поскольку источником β является не единственный 1-морфизм, а пара таких морфизмов, строгое описание этой конструкции требует нового понятия *мультикатегории*, на котором мы не будем здесь более подробно останавливаться.)

В случае, когда высшие морфизмы (т.е. n-морфизмы при $n > 1$), заменяющие равенство, являются обратимыми (т.е. являются изоморфизмами), исходные отношения строгого равенства заменяются на более слабые отношения "равенства с точностью до изоморфизма", что и объясняет термин "слабая n-категория". В качестве важного геометрического примера такой категории, который помимо прочего имеет и физическое значение, можно указать на ассоциированную со всяким топологическим пространством T фундаментальную n-категорию F, в которой:

морфизмы - точки A, B ... данного топологического пространства T;

1-морфизмы - пути вида $A \to B$, т.е. непрерывные отображения φ вида $[0, 1] \to T$, где $[0, 1]$ это единичный интервал и $\varphi(0) =$ и $\varphi(1) = B$;

2-морфизмы - гомотопии путей, т.е. непрерывные отображения вида $[0, 1]^2 \to T$;

n-морфизмы - гомотопии гомотопий предыдущего уровня, т.е. непрерывные отображения вида $[0, 1]^n \rightarrow T$.

Обратим внимание на то, что композиция путей в *F* определена не однозначно, а с точностью до гомотопии; в частности, только с точностью до гомотопии для каждого пути определен обратный путь. Композиция гомотопий порядка n и обратные элементы таких гомотопий определяются с точностью до гомотопии порядка n + 1. Это показывает, что *F* не является точной категорией. Разумеется, *F* можно легко превратить в точную категорию путем отождествления изоморфных путей и изоморфных гомотопий. Казалось бы, поскольку точная *n*-категория так же, как и исходная слабая *n*-категория, содержит всю структуру морфизмов высших порядков, такое "уточнение" данной слабой категории ни на что не влияет и является только вопросом удобства описания. Однако в общем случае это не так. Всякая слабая 2-категория действительно эквивалентна некоторой точной 2-категории (в смысле соответствующего понятия эквивалентности слабых 2-категорий, которое мы не будем уточнять). Но в случае 3-категорий такого рода эквивалентность уже не имеет места.

Категории в физике

В своей програмной работе [Баттерфилд 2000] Баттерфилд и Ишам описывают подход к проблеме квантовой гравитации, основанный на использовании теории топосов. Дальнейшее развитие данного подхода представлено в работах Ишама и Доринга [Ишам 2003; Ишам 2004; Ишам 2007]. Этот подход содержит следующие ключевые элементы.

(i) Авторы ставят под вопрос стандартный способ представления физических величин действительными и комплексными числами, замечая при этом, что при классическом подходе такое представление распространяется с представления длин пространственных и пространственно-временных интервалов на представление любых других физических величин. Этот факт авторы связывают с тем, что при классическом подходе любое физическое измерение на выходе дает определенное пространственное положение стрелки измерительного прибора. Таким образом, вопрос о представлении именно пространственных (и пространственно-временных) величин оказывается в данном контексте центральным.

(ii) Авторы рассматривают альтернативные способы описания пространства, времени и пространства-времени, основанные на применении понятия топоса. Идея состоит в том, чтобы заменить непрерывные дифференцируемые многообразия, традиционно используемые в общей теории относительности, для представления физического пространства-времени подходящими топосами. В качестве таковых авторы рассматривают топосы предпучков множеств на подходящих малых категориях, т.е. категории вида Set^C. В качестве подходящих для этого малых категорий авторы рассматривают, в частности, причинные множества, т.е. частично упорядоченные множества, физически интерпретированные как множества событий, связанных отношением причинности. Причинное множество естественно интерпретировать как дискретное пространство-время (предполагая при этом, что пространственно-временные отношения выводятся из отношения причинности).

(iii) Обращая внимание на резкий контраст между стандартной реалистической трактовкой общей теории относительности и стандартной инструменталисткой трактовкой квантовой механики, авторы утверждают, что решение проблемы квантовой гравитации требует единообразной реалистической трактовки как квантовой теории, так и теории гравитации. Как известно, фундаментальным препятствием для реалистической трактовки квантовой механики является теорема Кохена-Спекера [Кохен 1967] об отсутствии "скрытых переменных", согласно которой линейным операторам, представляющим физические характеристики данной квантовой системы, в общем случае невозможно непротиворечивым образом одновременно придать определенные численные значения. Авторы пытаются решать эту проблему двояким образом: во-первых, отказываясь от идеи о том, что квантово-механические величины должны в конечном счете непременно представляться действительными и комплексными числами, и, во-вторых, отказываясь от классической логики, в рамках которой всякая физическая величина может либо иметь данное значение, либо не иметь это значение, и третьего не дано. Разумеется, оба эти подхода не являются оригинальным изобретением Ишама и Баттерфилда; оригинальное предложение этих авторов состоит в другом. Пусть *H* - категория самосопряженных ограниченных операторов гильбертова пространства, представляющего данную физическую систему (морфизмами этой категории являются отображения спектральных представлений этих операторов). Рассмотрим теперь топос Set^H (топос предпучков множеств над *H*). Внутренняя логика этого топоса дает возможность однозначно и непротиворечиво приписать истинностные значения всем высказываниям о данной системе типа "такой-то элемент системы находится в таком-то состоянии". Это достигается за счет того, что логика данного топоса не двузначная (типа *истина, ложь*), а имеет бесконечное множество "промежуточных" истинностных значений. Эти промежуточные истинностные значения можно обычным образом интерпретировать как вероятности наступления соответствующих событий при соответствующих условиях, однако идея авторов состоит в том, чтобы не прибегать к такой классической интерпретации, а интерпретировать конструкцию топоса данной квантовой системы в реалистическом ключе. Существенно здесь то, что конструкция топоса Set^H не предполагает, что истинностные значения внутренней логики этого топоса являются действительными числами, с помощью которых обычно оцениваются вероятности. Тот факт, что в рамках предложенной конструкции состояния системы оцениваются истинностными значениями, а не вероятностями, с точки зрения авторов, позволяет избежать инструменталистской интерпретации этой конструкции.

Как отмечают авторы, интерпретация квантовой механики в соответствующем топосе (включая внутреннюю логику этого топоса) приводит к менее радикальным последствиям, чем замена классической логики любым из известных вариантов квантовой логики. Алгебра высказываний квантовой логики представляет собой недистрибутивную ортомодулярную решетку, которая мало чем напоминает алгебру классических высказываний (булеву алгебру). Этот факт дает определенное основание для сомнений в том, можно ли действительно считать квантовую логику логикой. Интуиционисткая логика квантовых топосов вызывает в этом смысле меньше возражений. Однако нужно иметь в виду, что за более привычную алгебру высказываний в данном случае приходится заплатить куда более необычной системой истинностных значений.

(iv) Конечной целью авторов является объединение двух линий исследования - описания пространства-времени как топоса и погружение квантовой механики в подходящий топос. Иными словами целью является построение такого квантового топоса, который одновременно мог бы представлять пространство-время. Это по мысли авторов было бы решением проблемы квантовой гравитации. Следует почеркнуть, что в настоящее время эта цель еще не достигнута.

Подход Крейна [Крейн 2007] также направлен на решение проблемы квантовой гравитации и в целом напоминает вышеописанный подход Баттерфилда- Ишама-Доринга с тем отличием, что Крейн не интересуется логическим аспектом проблемы, а пытается напрямую построить категорными средствами релятивистскую модель пространства-времени, которая одновременно могла бы поддерживать квантовый формализм. Базовая конструкция, предлагаемая автором в данной работе, представляет собой 2-категорию, объектами (0-морфизмами) которой являются элементы базового причинного множества событий, которое, однако, не является частично упорядоченным. Каждую пару таких событий связывает множество 1-морфизмов, которые при стандартной интерпертации отвечают возможным каузальным историям; эти истории частично упорядочены 2-морфизмами таким образом, что они формируют ортонормированную решетку. Известно, что стандартный формализм квантовой механики может быть описан 2-категорией указанного рода, содержащей единственный объект; такую конструцию называют *кванталом* [Джилис 1995] Смысл рассмотрения подобной категории, содержащей множество объектов (такую категорию автор называет *кванталоидом*) состоит в том, чтобы придать квантовому формализму релятивистский аспект. В своей недавней работе [Крейн 2008] Крейн вместо топосов использует для той же цели *модельные* категории. Модельные категории [Двайер 1995] так же, как и топосы, представляют собой обобщенные топологические пространства, однако модельные категории в отличие о топосов поддерживают теорию гомотопии и не имеют внутренней логики (или по крайней мере об этом на сегодняшний день ничего не известно).

Релятивистский аспект понятия категории может быть продемонстрирован на примере "игрушечной" категорной модели классической механики, предложенной Озиевичем [Озиевич 1996]. Рассмотрим множество классических частиц *A, B, C* ..., которые движутся с постоянными скоростями относительно друг друга. Вместо с того, чтобы связывать с каждой частицей особую систему координат, рассмотрим данные частицы как объекты категории, морфизмами которой являются относительные скорости. При обычном подходе, когда скорости представляются векторами, сумма двух скоростей всегда определена. При предлагаемом категорном подходе сумма относительных скоростей выражается композицией морфизмов; такая композиция определена только локально, т.е. только для морфизмов вида $f : A \to B$, $g : B \to C$ (т.е. таких, что назначение первого морфизма совпадает с источником второго). Очевидно, что такой локальный подход лучше соответствует духу общей теории относительности. Снабдив полученную механическую категорию топологией Гротендика (которая, говоря неформально, определяет, какие из наших частиц являются соседними), мы получаем понятие пространства-времени, построенное исключительно в терминах относительных скоростей и не предполагающее никаких "абсолютных" элементов. Соответствующий топос пучков множеств дает нам формальный язык, который естественно считать внутренним языком данного пространства-времени (в случае тривиальной топологии мы получаем топос множеств, так что его внутренний язык оказывается классическим). Хотя данная игрушечная модель, разумеется, не может быть частью современной физической теории, она хорошо демонстрирует релятивистский характер теории категорий и возможность применения этой математической теории для реализиции релятивистских идей в физике.

Кроме вышеуказанных работ, ставящих своей целью решение проблемы квантовой гравитации с помощью теории категорий и топосов, следует упомянуть тот факт, что математический аппарат более традиционных разделов современной теоретической физики также допускает естественный перевод на язык категорий, который в ряде случаев уже широко используется. Это в особенности касается топологической квантовой теории поля и смежных областей. Наиболее полную информацию об этом можно получить из обзора [Баез 2009]. По мере того как язык теории категорий постепенно завоевывает права в самых различных областях математики, его проникновение в теоретическую физику происходит в некоторой степени автоматически. Однако имеет место и обратное движение: поскольку язык теории категорий оказывается лучше приспособленным для представления физических процессов, чем привычный теоретико-множественный язык, он начинает более активно применяться в новых математических исследованиях. Ряд ведущих логиков и математиков, не претендуя на решение открытых проблем теоретической физики, все более активно используют своей работе не только теорию категорий и топосов, но и физические интерпретации этой теории. В качестве примера укажем на недавнюю статью Васюкова [Васюков 2009], в которой вводится новое понятие "квантовой математики". Таким образом, можно утверждать, что теория категорий находится сегодня в центре взаимного встречного движения физики, логики и чистой математики[6].

Заключение

Чтобы не создавать у читателя ложного представления о современном состоянии теоретической физики, следует сказать, что упомянутые выше работы пока относятся скорее к области "физической математики", чем к области теоретической физики в точном смысле этого термина, и еще не достигли того этапа в своем развитии, который допускает прямую экспериментальную проверку. Наш особый интерес к этим исследованиям связан с тем, что в них предпринимаются попытки построения фундаментальных физических теорий на новых математических основаниях. Оценка пригодности той или иной физической теории является, конечно, делом физиков. Однако история учит нас тому, что существенный прогресс в науке всегда сопровождается переосмыслением оснований данной науки и что такое переосмысление оснований всегда требует систематической философской работы. Нет никаких причин считать, что современная физика является исключением из этого общего правила. Задача философии науки сегодня состоит не только в том, чтобы осмысливать полученные научные результаты, но и в том, чтобы вносить свой вклад в получение новых результатов. Построение категорных оснований математической физики является новой перспективной областью исследований, где совместная работа математиков, физиков и философов представляется совершенно необходимой. Актуальные проблемы математических оснований физики включают в себя следующие.

Проблема континуума. Традиционное геометрическое понятие точки до сих пор широко используется в физике, хотя оно и не имеет очевидной физической интерпретации. Как помыслить пространство без точек? Какой математический аппарат нужен для описания такого бесточечного пространства? Каков физический смысл математического понятия континуума?

Проблема времени и пространства-времени. Пространство-время общей теории относительности с математической точки зрения представляет собой дифференцируемое многообразие, т.е. особого рода геометрическое пространство. Оправдана ли идея представления физического пространства-времени с помощью геометрического пространства? Возможно ли чисто математическое понятие пространства-времени, которое можно было бы использовать для представления физического пространства-времени, не прибегая при этом к "опространствливанию времени"?

Проблема измерения. В современной физике результатами измерений почти всегда считаются действительные числа. Является ли такой принцип оправданным? Как он связан с эпистемологическими принципами физических измерений? Есть ли у него разумные альтернативы?

Проблема природы логики. Логика традиционно считается системой априорных нормативных законов мышления и рассуждения, которые напрямую не связаны ни с какими физическими законами. С этой точки зрения логические принципы построения физической теории имеют более фундаментальное значение, чем любые физические принципы. Есть ли у такого традиционного взгляда разумные альтернативы?

Было бы преждевременным утверждать, что теория категорий в существующей форме способна служить в качестве нового общего основания математики, физики и других естественных наук. Однако она уже в состоянии предложить нетривиальные ответы на поставленные выше вопросы.

Категорная геометрия дает новый точный смысл старому понятию точки и вводит в рассмотрение пространства без точек или с небольшим числом точек [Джонстоун 1983].

Категорная геометрия предлагает новые понятия пространства и пространства-времени (в частности, понятие топоса и понятие модельной категории) отличные от традиционных континуальных понятий геометрического пространства, таких как дифференцируемые многообразия. Применение этих новых моделей в физике пока остается на уровне теоретических попыток, но является многообещающим.

Категорные представления квантовой механики и квантовой теории поля не используют действительные или комплексные числа. Проблема привязки категорных понятий к результатам физических наблюдений и измерений пока остается открытой, но не кажется безнадежной.

Понятие внутреннего языка данной категории позволяет пользоваться в физике логическими системами, свойства которых зависят от описываемой физической реальности подобно тому, как это делается с геометрией в общей теории относительности (где локальная кривизна пространства-времени определяется таким физическим параметром, как интенсивность гравитационного поля в данной области).

Дальнейшее пока остается предметом будущей работы. Можно было бы только приветствовать появления альтернативных проектов построения новых оснований математики и теоретической физики, однако на сегодняшний день такие альтернативные проекты, которые могли бы заслуживать серьезного внимания, нам не известны. Поэтому новые категорные основания математики и физики, на наш взгляд, заслуживают сегодня особенного пристального внимания со стороны философов науки.

Литература

Александров 1977 - *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.

Баез 2009 - *Baez J.C., Lauda A.* A prehistory of n-categorical physics, 2009. arXiv: [gr-qc/0908.2469].

Баттерфилд 2000 - *Butterfield J., Isham Ch.* Some possible roles for topos theory in quantum theory and quantum gravity // Foundations of Physics, 30(10):1707-1735, 2000.

Бенабу 1967 - *Benabou J.* Introduction to bicategories. Reports of the Midwest Category Seminar, 1967.

Васюков 2009 - *Васюков В.Л.* Онтология квантовой математики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Философия, 3:73-126, 2009.

Вольф 1746 - *Wolff Ch.* Волфианская експерименталная физика (пер. М.Ломоносова). Императорская академия (Санкт-Петербург), 1746.

Гильберт 1900 - *Hilbert D.* Mathematische probleme // Nachrichten von der Koeniglichen Gesel lschaft der Wissenschaften zu Goettingen, Math.-Phys. Klasse, 1900.

Гротендик 1945 - *Grothendieck A.* Sur quelques points d'algebre homologique // Tohoku Mathematical Journal, 2(9):119-221, 1945.

Двайер 1995 - *Dwyer W.G.., Spalinski J.* Homotopy theories and model categories // Handbook of Algebraic Topology, 1995.

Джилис 1995 - *Gylys R.P.* On quantaloids and quantum categories // Lithuanian Mathematical Journal, 35(3):210-233, 1995.

Джонстоун 1983 - *Johnstone P.T.* The point of pointless topology // Bul l. (New Series) of the Amer. Math. Soc., 8(1):41- 53, 1983.

Зубов 2006 - *Зубов В.П.* Из истории мировой науки. М., 2006.

Ишам 2003 - *Isham Ch.* A new approach to quantising space-time: I. quantising on a general category // Adv. Theor. Math. Phys., 7:331-367, 2003.

Ишам 2004 - *Isham Ch.* A new approach to quantising space-time: Ii. quantising on a category of sets // Adv. Theor. Math. Phys., 7:807Џ829, 2004.

Ишам 2007 - *Isham Ch., Doring A.* A topos foundation for theories of physics (in 4 parts), 2007. arXiv: [quantph/0703060], [quant-ph/0703062], [quant-ph/0703064], [quant-ph/0703066].

Каллендер 1985 - *Callender C., Huggett N.* (eds.). Physics meets Philosophy at the Planck Scale. Cambridge University Press, 1985.

Кохен 1967 - *Kochen S., Specker E.* The problem of hidden variables in quantum mechanics // Journal of Mathematics and Mechanics, 17:59-87, 1967.

Крейн 2007 - *Crane L.* What is the mathematicak structure of quantum space-time? 2007. arXiv: [gr-qc/0706.4452].

Крейн 2008 - *Crane L.* Model categories and quantum gravity. 2008. arXiv: [gr-qc/0810.4492v2].

Лейнстер 2002 - *Leinster T.* A survey of definitions of n-categories // Theory and Applications of Categories, 10:1-70, 2002.

Ловер 1963 - *Lawvere W.F.* Functorial semantics of algebraic theories, 1963. Ph.D. thesis, Columbia University.

Ловер 1964 - *Lawvere F.W.* Elementary theory of the category of sets // Proceedings of the National Academy of Science, 52(6):1506-1511, 1964.

Ловер 1966 - *Lawvere W.F.* The category of categories as a foundation of mathematics // Proceedings of the conference on categorical algebra, 1966.

Маккай 1977 - *Makkai M., Reyes G..* First-Order Categorical Logic (Springer Lecture Notes in Mathematics 611). Springer, 1977.

МакЛейн 1945 - *Eilenberg S., MacLane S.* A general theory of natural equivalences // Trans. Amer. Math. Soc., 58: 231-294, 1945.

МакЛейн 1971 - *MacLane S.* Categories for the Working Mathematician. Springer, 1971.

Ньютон 1687 - *Newton I.* Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Royal Society. 1686-87.

Озиевич 1996 - *Oziewicz Z.* What is categorical relativity? 1996. arXiv: [CT/0608.770v1].

Тьерни 1972 - *Tierney M.* Sheaf theory and the continuum hypothesis // Toposes, Algebraic Geometry and Logic. F.W. Lawvere (ed.) (Springer Lecture Notes in Mathematics 274), 1972.

Френкель 1966 - *Френкель И., Бар-Хиллел А.А.* Основания теории множеств. М., 1966.

Эйленберг 1952 - *Eilenberg S., Steenrod N.E.* Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press, 1952.

Примечания

---

[1] Работа поддержана грантом РФФИ 08-06-00189.

[2] О схоластической физике см.: [Зубов 2006, 252-294].

[3] В теоретико-множественной математике непрерывные преобразования определяются как отображения топологических пространств, при которых прообраз всякого открытого множества также является открытым.

[4] Я упоминаю здесь о таких далеко идущих обобщениях математической теории категории, поскольку они могут помочь читателю лучше понять интуитивную мотивировку категорного подхода. Более серьезное обсуждение этих обобщений выходит за рамки данной статьи. Поэтому говоря о "категорной философии", я пользуюсь кавычками.

[5] *Малыми* называют категории, морфизмы которых формируют множества.

[6] К этому списку можно было бы еще добавить компьютерные науки, особенно ее разделы, связанные с теорией квантовых вычислений, однако эта тема выходит за рамки настоящей статьи.