Андрей Родин

Топологический анализ данных, унивалентные основания и “непостижимая эффективность математики”

Конструктивное знание 13: математика как язык науки

31 марта 2021

Проблема Вигнера (1960):

Почему математика оказывается эффективной в физике?

В частности: Почему сила притяжения между точечными массами убывает именно по закону обратных квадратов?

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Эта гипотеза была выдвинута Ньютоном скорее из математических, а не физических оснований, и была эмпирически проверена с большой точностью значительно позже.

Вигнер считает это чудом, недоступным человеческому пониманию (или притворяется, что так считает).

(Частичное) **решение** проблемы Вигнера:

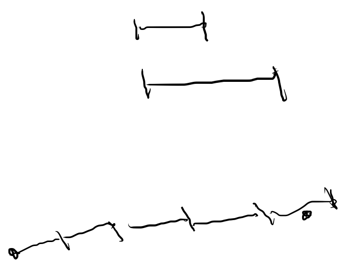
Математические понятия поддерживают эмпирические процедуры, с помощью которых люди получают (научные) знания о внешнем мире.

Фундаментальные **примеры**:

1) натуральное число (арифметика) - **счет**

$a:b = c:d$

2) величина (традиционное геометрическое понятие, на основе которого позже возникло понятие о действительном числе) - **измерение** (с помощью измерительной палки)



Замечание 1.

Это общее решение проблемы Вигнера допускает множество различных истолкований. Оно совместимо как с идеей о том, что понятие о числе является врожденным и отражает свойства человеческого когнитивного аппарата, (а не внешнего мира), так и с идеей о том, что математическое понятие числа представляет собой абстракцию, которая отражает (некоторые) свойства (некоторых) внешних физических объектов.

Эпистемический разрез (epistemic cut) в этом случае можно проводить различным образом.

Замечание 2.

Это решение не является полным. В частности, оно не дает полного ответа на вопрос Вигнера про закон обратных квадратов.

Кант считает закон обратных квадратов априорным математическим законом, который связан с априорной 3х-мерностью пространства (с важными оговорками - см. M. Friedman 1989):

“Рассудок не извлекает законы природы из опыта, а предписывает их природе” (Prolegomena 1783).

Мы еще ОЧЕНЬ плохо понимаем как работает математика и математическая физика с когнитивной точки зрения, но современный прогресс в когнитивной науке дает некоторые поводы для оптимизма (Thomas Nagel).

Тем не менее, можно утверждать (вслед за Кантом), что имено математизированные опытные процедуры такие как счет (физических объектов) и физические измерения обеспечивают связь математики с эмпирическими науками.

Замечание 3.

Проблема состоит не только в том, чтобы объяснить успешные приложения математики в прошлом, но и в том, чтобы объяснить, почему в многих случаях ожидаемый успех не становится реальным.

И.М. Гельфанд с. 1980 (парафраза):

Есть только одна вещь, которая еще более непостижима, чем непостижимая эффективность математики в физике. Это непостижимая неэффективность математики в биологии.

В. Воеводский 2003 (парафраза):

Society supports mathematics, mainly, because of its capacity to solve problems arising in the applied mathematics using methods of pure mathematics and also, eventually, for solving internal problems in the pure mathematics and for teaching old solutions to new generations.

Over the last few decades the situation was getting more and more out of balance. The channels between pure and applied mathematics were weakening. A weak incoming flow of external problems restrains the internal development of pure mathematics. A weak outgoing flow of useful solutions restrains the support of mathematics provided by the society. This means eventually no salary for mathematicians.

Breakdown of the incoming flow of external problems means eventually no new ideas in mathematics.

Conventional Thinking

Maths

[New Math]

Cp. M. Stone 1961:

While several important changes have taken place since 1900 in our [?] conception of mathematics or in our points of view concerning it, the one which truly involves a revolution in ideas is the discovery that mathematics is entirely independent of the physical world.

Практический аспект проблемы Вигнера состоит в том, чтобы построить рациональную стратегию, которая позволит использовать математику в естественных науках и технологии *более* эффективно.

K. Marx 1845:

Die Philosophen haben die Welt n ur verschieden interpretiert, es ko mmt aber darauf an, sie zu verandern.

Замечание 4.

Архаические эмпистемические практики счета и измерения, первая из которых восходит к позднему палеолиту (ок 30 тыс. лет назад), а вторая насчитывает по меньшей мере 4 тысячелетия (Московский папирус) претерпели значительные изменения в течении последних столетий. Связанные с этими практиками математические понятия тоже значительно изменились.

Однако эти параллельные изменения, по всей видимости, были слабо скоррелированными

или совсем не были скоррелированными (?).

Современное понятие о натуральном числе (т. н. стандартная модель Арифметики Пеано?) не отражает специфику современной практики и технологии счета.

Современное математическое понятие о действительном числе значительно отличается от традиционного понятия о геометрической величине (теория отношений Эвдокса изложенная в 5й и 6й книгах Начал Евклида), но эти отличия по всей видимости никак не отражают недавний прогресс в технике физических измерений.

В этой связи встает вопрос о возможности новых фундаментальных математических понятий мотивированных новыми эмпирическими практиками, включая измерительные и вычислительные практики.

Самыми интересными с этой точки зрения представляются **квантовые** измерения.

Возможно, что мы еще просто не придумали никакого хорошего понятия о числе, адекватного квантовым вычислениям.

А также - несмотря на важную попытку Йохана фон Неймана 1932го года повторить на новом этапе достижение Исаака Ньютона 1687го года - пока еще не придумали адекватную математику для квантовой физики.

.

Эту увлекательную тему я сейчас оставлю полностью в стороне.

Подобный вопрос в общей форме был поставлен П.К. Рашевским в статье *О догмате натурального ряда* (УФМ 1973):

Натуральный ряд и сейчас является единственной математической идеализацией процессов реального счета. Это монопольное положение осеняет его ореолом некой истины в последней инстанции, абсолютной, единственно возможной, обращение к которой неизбежно во всех случаях, когда математик работает с пересчетом своих объектов. Более того, так как физик использует лишь тот аппарат, который предлагает ему математика, то абсолютная власть натурального ряда распространяется и на физику и — через посредство числовой прямой — предопределяет в значительной степени возможности физических теорий.

Пусть мы хотим узнать, сколько молекул газа заключено в данном сосуде. ... Числа этой гипотетической теории были бы объектами другой природы, чем числа натурального ряда. Можно предполагать, что почти совпадение имело бы лишь для начальных отрезков существующего и гипотетического натуральных рядов, а по мере удаления по ним различие их структуры должно возрастать; в гипотетическом натуральном ряде началось бы нечто вроде "принципиального сбивания со счета", и он (ряд), все более "размываясь", приобретал бы в каком-то смысле черты непрерывной структуры [действительной] числовой прямой. Можно догадываться даже, что математическая индукция при этом приняла бы своеобразные черты — промежуточные между индукцией обычной и, например, интегрированием дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ (здесь как бы вместо перехода n --> $n + 1$ мы применяем переход x --> $x + dx$).

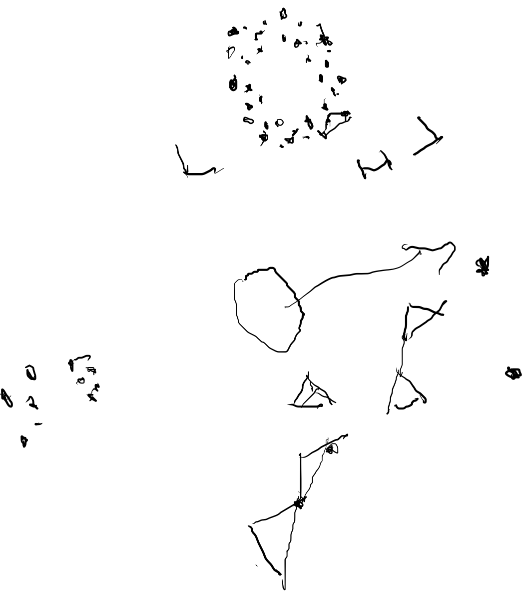
Мы рассмотрим сейчас *менее радикальные* подходы, которые оставляют “число и величину” в их традиционной роли фундаментальных шарниров, связывающих математику с естественными науками и технологиями, но при этом используют некторые дополнительные математические инструменты такого же универсального характера.

Очевидный пример такого рода - это **статистика**, которую можно считать эмпирическим приложением математической теории вероятностей.

Статистический подход в самом широком смысле состоит в том, что к результатам измерений (эмпирическим данным) добавляется еще одна мера, а именно вероятностная мера.

Топологический анализ данных - это еще один, более свежий пример такого же рода. Он интересен тем, что использует в этом универсальном качестве математические понятия, которые ранее не имели такого рода эмпирических применений.

Данные: множество точек в метрическом (обычно в многомерном нормированном векторном) пространстве



TDA 2018-2020:

Mathematical modeling is usually thought of as the discipline of constructing algebraic or analytic models, where the output of the model is an equation, a system of equations, or perhaps a system of differential equations. This method has been very effective in the past, when many of the data sets to be studied involved only a small number of features and where there are simple relations among the variables that govern the data being modeled. The work of Galileo, Kepler, and Newton are prime examples of the successes of this kind of modeling. However, these methods run into difficulties when confronted with some of the very complex data currently arising in applications.

Как использовать TDA?

R.M. May “Uses and abuses of mathematics in biology” 2004

A paradigmatic account of the uses of mathematics in the natural sciences comes, in deliberately oversimplified fashion, from the classic sequence of Brahe, Kepler, Newton: observed facts, patterns that give coherence to the observations, fundamental laws that explain the patterns [$\dots$].

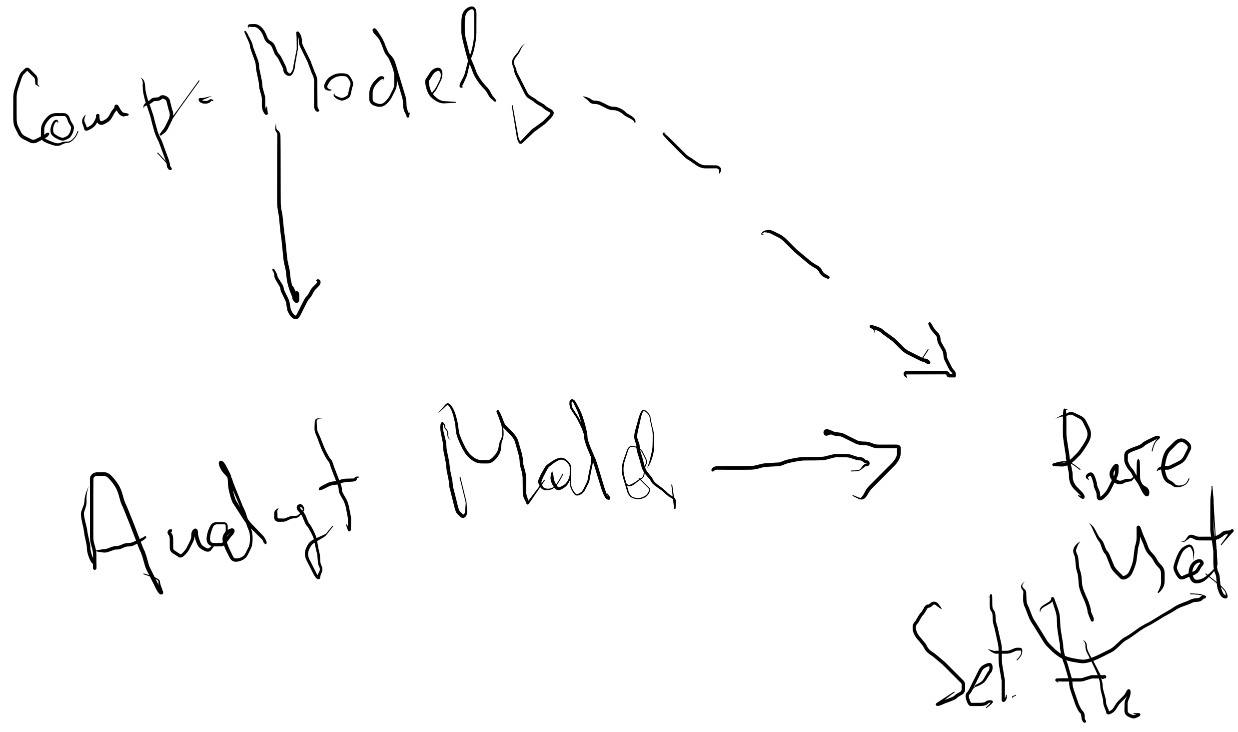
Consider the role played by applications of mathematics in sequencing the human and other genomes [$\dots$]. The sequence information, however, represents only the Tycho Brahe stage. Current work on various genomes uses pattern-seeking programs to sort out coding sequences corresponding to individual genes [$\dots$]. Again, elegant and sometimes novel mathematics is involved in this Keplerian stage of the work in progress. We are

only just beginning, if that, the Newtonian stage of addressing the deeper evolutionary questions posed by these patterns.
\cite{May:2004}

Ср. Воеводский (продолжение)

How did we come to this poor situation? What can be done in order to improve it? What we need to do is to change the current pattern of using **computers** in science.

Presently computers enter into the above scheme of problem-solving as shown in Fig. 2:



Here the flow of problems down to the ``mathematical modelling'' level is filtered through the ``computer modelling'' level. As a result the ``mathematical modelling'' level, and as a consequence also the ``pure mathematics'' level, receive less problems than they used to receive before the rise of modern computer technologies.

This particularly affects today's abstract mathematics. Problems, which pass through the filter, are formulated in the old-style language of variables and analytic functions, while the language of today's abstract mathematics is the Set theory. Thus at least a part of problems received at the ``pure mathematics" level pass through a double-translation, which further weakens the incoming flow of external problems into the pure mathematics (Fig. 3).

The downstream flow of mathematical problems can be increased via a rearrangement of relationships between the computer modelling, on the one hand, and the pure mathematics, on the other hand, as shown at Fig. 4.:

In order to implement this new scheme we need to reformulate fundamental and applied scientific theories in the language of today's abstract mathematics, viz., in the **set-theoretic** language.

Унивалентные основания **лучше** подходят на эту роль.

Задача для “топологической физики”:

Описать (и по возможности научиться предсказывать) результаты TDA с помощью UF-теорий. (как от гомотопий перейти к гомологиям?)

Спасибо!