

Оптика математических понятий и топологический анализ данных.

Андрей Родин

Институт Философии РАН и СПбГУ

21 сентября 2021 г.

Когнитивные науки и математика (вслед за ТВЧ)

Когнитивные науки и математика (вслед за ТВЧ)

- ▶ Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind (Kant, KRV)

Когнитивные науки и математика (вслед за ТВЧ)

- ▶ Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind (Kant, KRV)
- ▶ Когнитивные аспекты понятийного мышления.

Содержание:

Мотивации

Оптика математических понятий

Вклад Эйлера в топологию

Топологическая оптика

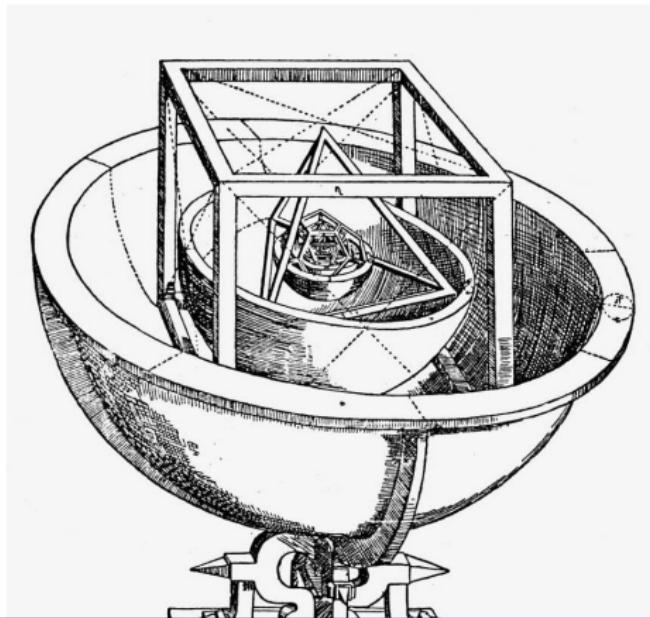
НЕ оптика

Успешное применение в науке математических понятий,
которые ранее никак не были связаны с данной областью науки.

Ср. Е. Вигнер 1960: “непостижимая эффективность математики
в естественных науках”

Кеплер

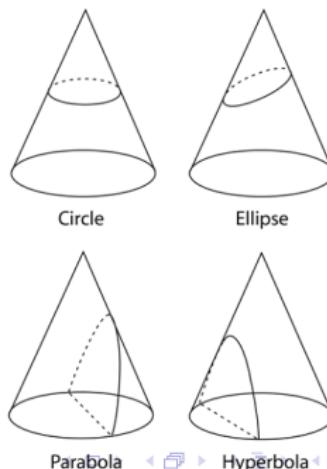
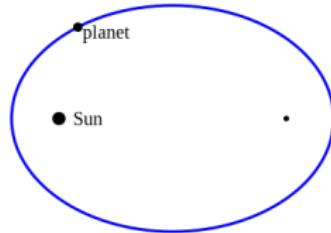
Mysterium Cosmographicum 1596 (на основе гелиоцентрической системы Коперника):



Кеплер

Astronomia nova Aitiologitis 1607:

Планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим траекториям; Солнце находится в одном из фокусов (первый закон Кеплера).



Основное качество оптики математических понятий

Универсальность обзора (включая внemатематический физический опыт)

Базовые элементы оптики математических понятий

Базовые элементы оптики математических понятий

(натуральное) число и счет

Strengthen logical thinking

The image contains two addition equations for babies. Each equation consists of three colored shapes (two purple, one orange) followed by a plus sign, an equals sign, and a single orange shape. Below each equation are numerical values: 2 + 1 = 3 and 3 + 2 = 5. The shapes are stylized with simple outlines and flat colors.

$$\begin{array}{rcl} \text{purple} & + & \text{orange} \\ 2 & + & 1 \\ = & & 3 \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} \text{purple} & + & \text{orange} \\ 3 & + & 2 \\ = & & 5 \end{array}$$

Guide your baby's interest in computing

Базовые элементы оптики математических понятий

(натуральное) число и счет

Strengthen logical thinking

The first example shows three groups of dots: two orange and one red, followed by a plus sign, an equals sign, and three purple dots. Below it, the numbers 2, +, 1, =, and 3 are aligned under their respective dots.
The second example shows three green dots and two orange dots, followed by a plus sign, an equals sign, and five orange and green dots. Below it, the numbers 3, +, 2, =, and 5 are aligned under their respective dots.

Guide your baby's interest in computing

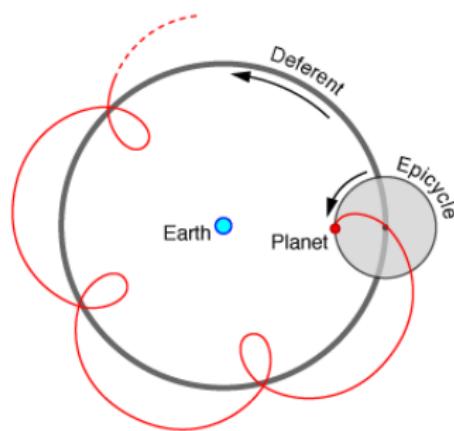
величина (действительное число) и измерение

$$\frac{AC}{AD} = \sqrt{2}$$

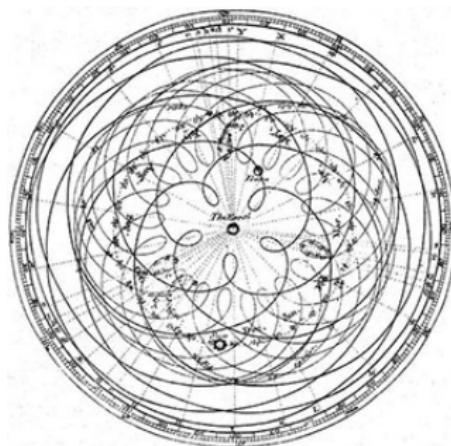
Евклидова оптика: эпициклы

Euclid, Elements, c. 300 B.C.

Ptolemy, Almagest, c. 140 A.D. : $\sigmaωζειν τα φαινομένα$
(ср. разложение в ряд Фурье)



Евклидова оптика: эпициклы



D. Park : In the midst of all this empiricism sat the ghost of Plato, legislating that the curves drawn must be circles and nothing else, and that the planets and the various connectiong points must move along them uniformly and in no other way.

Ньютона оптика: флюэнты и флюксы

Ньютон Лейбницу 24 окт. 1676:

I cannot proceed with the explanations of the fluxions now, I have preferred to conceal it thus: бaccd?13eff7i319n4o4qrr4s8t12vz

Ньютона оптика: флюэнты и флюксы

Ньютон Лейбницу 24 окт. 1676:

I cannot proceed with the explanations of the fluxions now, I have preferred to conceal it thus: бaccd?13eff7i319n4o4qrr4s8t12vz

Расшифровка Валлиса:

Data aequatione quotcumque, fluentes quantitates involvente,
fluxiones invenire, et vice versa.

Ньютона оптика: флюэнты и флюксы

Ньютон Лейбницу 24 окт. 1676:

I cannot proceed with the explanations of the fluxions now, I have preferred to conceal it thus: бассд?13eff7i319n4o4qrr4s8t12vz

Расшифровка Валлиса:

Data aequatione quotcumque, fluentes quantitates involvente,
fluxiones invenire, et vice versa.

Перевод на современный математический язык:

Решать дифференциальные уравнения (в том числе в частных производных)!

Ньютона оптика: флюэнты и флюксы

Newton 1671, опубликовано в 1736 после смерти автора!

Those Quantities which I consider as gradually and indefinitely increasing I shall hereafter call Fluxents or Flowing Quantities... The velocities by which every Fluent is increased by its generating Motion I may call Fluxions or simply Velocities or Celerities.

Уравнения Навье-Стокса и исследования климата

по именам C.L. Navier 1821 и G.G. Stokes (in 1840s).

2000 \$1M Millennium Problem (одна из 7): существуют ли “разумные” аналитические решения для 3x-мерного пространства?

Navier-Stokes Equations:

Cartesian Coordinates

$$x : \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

$$y : \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$z : \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Незаконченный проект Воеводского

BioSystems 204 (2021) 104391



Contents lists available at ScienceDirect

BioSystems

journal homepage: <http://www.elsevier.com/locate/biosystems>



Voevodsky's unfinished project: Filling the gap between pure and applied mathematics



Andrei Rodin

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences and Saint-Petersburg State University, Russia

ARTICLE INFO

Keywords:

Pure and applied mathematics
Population dynamics
Univalent foundations
Topological data analysis

ABSTRACT

In a series of lectures given in 2003, soon after receiving the Fields Medal for his results in the Algebraic Geometry, Vladimir Voevodsky (1966–2017) identifies two strategic goals for mathematics, which he plans to pursue in his further research. The first goal is to develop a “computerised library of mathematical knowledge,” which supports an automated proof-verification. The second goal is to “bridge pure and applied mathematics.” Voevodsky’s research towards the first goal brought about the new Univalent foundations of mathematics. In view of the second goal Voevodsky in 2004 started to develop a mathematical theory of Population Dynamics, which involved the Categorical Probability theory. This latter project did not bring published results and was abandoned by Voevodsky in 2009 when he decided to focus his efforts on the Univalent foundations and closely related topics. In the present paper, which is based on Voevodsky’s archival sources, I present Voevodsky’s views of mathematics and its relationships with natural sciences, critically discuss these views, and suggest how Voevodsky’s ideas and approaches in the applied mathematics can be further developed and pursued. A special

Андрей Родин

Оптика математических понятий и топологический анализ



Как математика созданная в разные исторические эпохи используется сегодня в жизни, науке и технике (по Воеводскому)

- ▶ Elementary Mathematics (> 2000 y.) is integrated into the everyday life;
- ▶ “Higher” Mathematics (since 17 c.) is integrated into most sciences;
- ▶ “Modern” Mathematics (after 1850s) is integrated into some sciences;
- ▶ Synthetic Mathematics (after 1950s) is very poorly integrated (if at all).

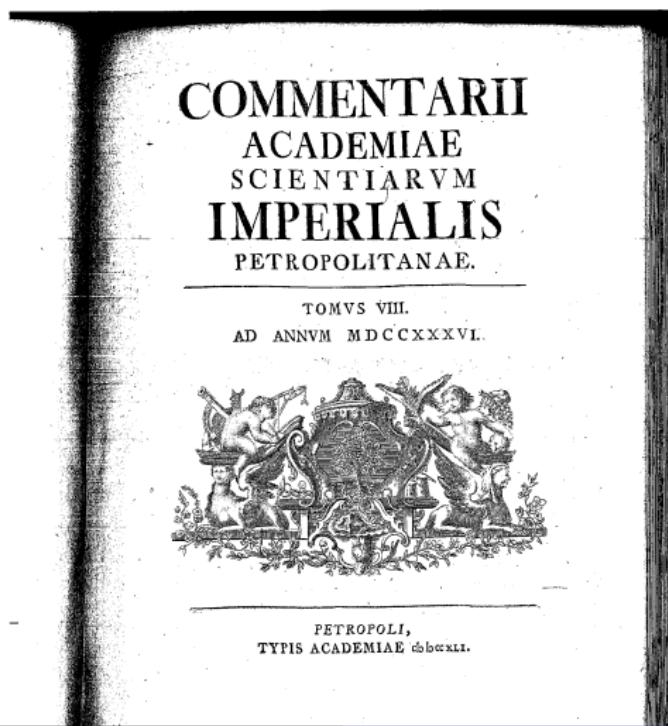
Мотивации

Оптика математических понятий

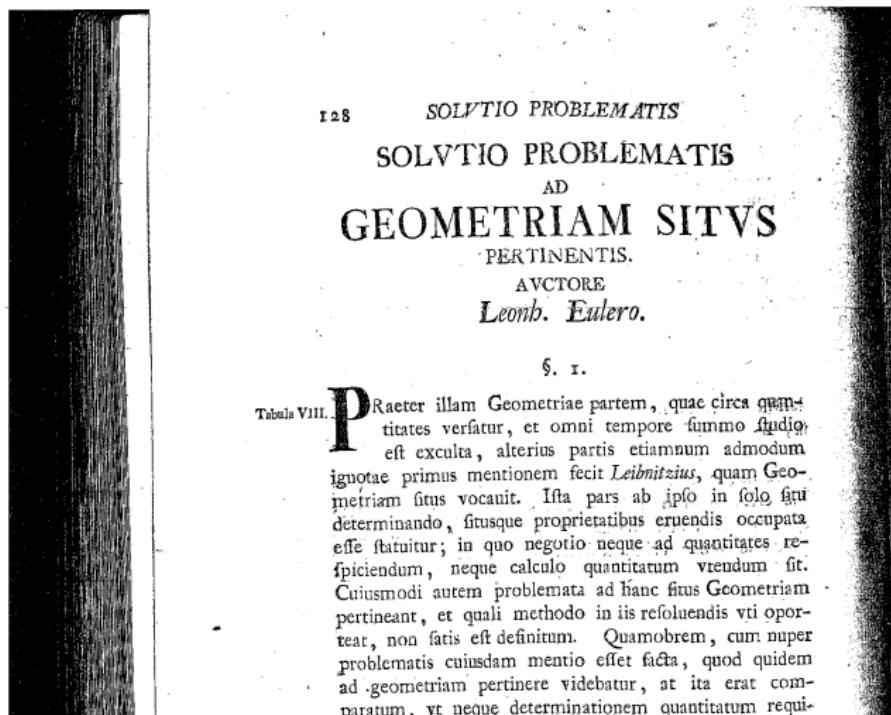
Вклад Эйлера в топологию

Топологическая оптика

Первый российский научный журнал



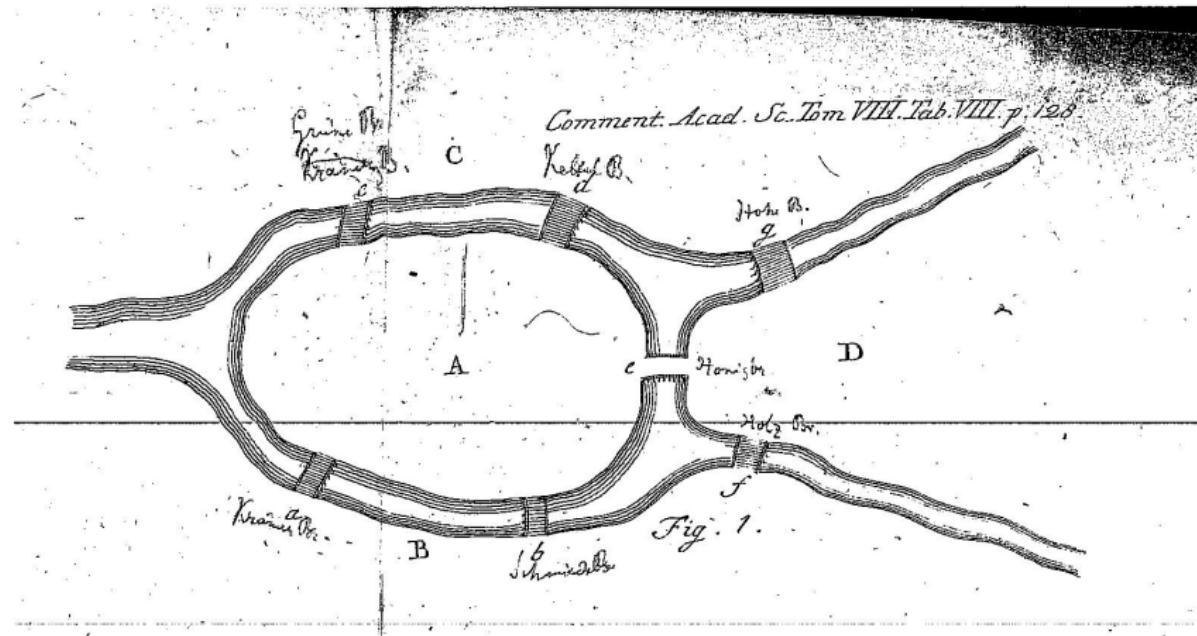
Эйлер: задача о Кенигсбергских мостах



Эйлер: задача о Кенигсбергских мостах

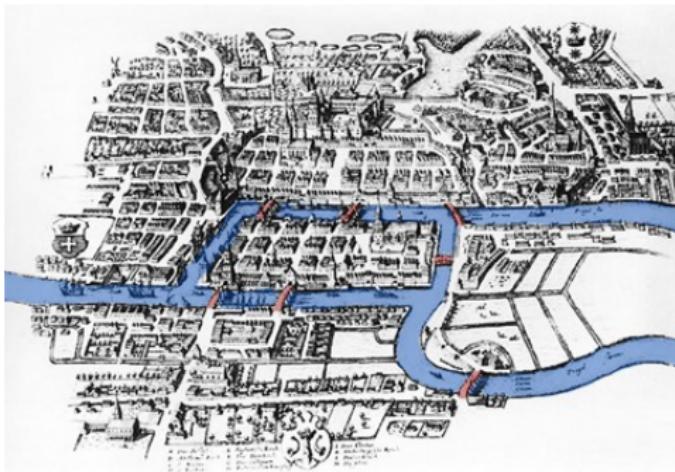
Кроме той части геометрии, которая касается количеств и которая всегда привлекала много внимания, есть другая, до недавних пор совсем неизвестная. О ней впервые упомянул Лейбниц и назвал ее геометрией положения. Эта часть геометрии касается исключительно определения положения; количества и вычисления не играют в ней никакой роли. До сих пор не вполне ясно, какие задачи относятся к этой части геометрии.

Эйлер: задача о Кенигсбергских мостах (1736 - 1741)



Эйлер: задача о Кенигсбергских мостах (1736 - 1741)

Потребовалось около 100 лет, чтобы топологическая эквивалентность этих двух изображений была осознана!



Эйлер : Теория многогранников 1750-1758

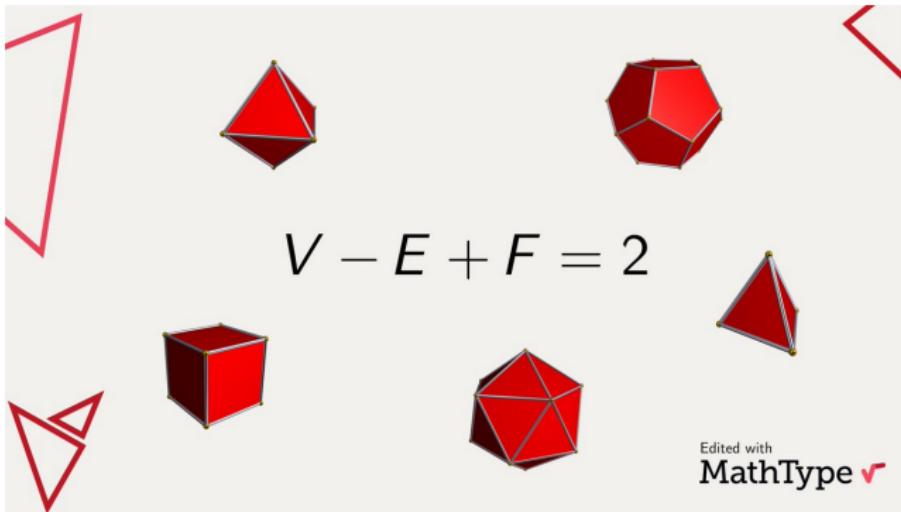
• 109 •

E L E M E N T A
DOCTRINAЕ SOLIDORVM.
AVCT. L. EVLERO.

§. I.

Quemadmodum Geometria in contemplatione figurarum planarum versatur, et quae de lineis et angulis in ea traduntur, ad eius prolegomena referenda sunt; ita Stereometria in contemplatione solidorum occupatur, et quae ibi de inclinatione planorum angulisque solidis explicantur, eius quoque tanquam prolegomena sunt spectanda.

Эйлер : Теория многогранников 1750-1758



Эйлер : Теория многогранников 1750-1758

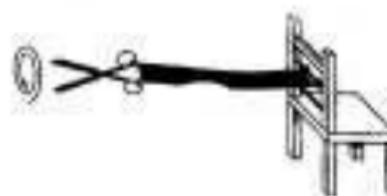
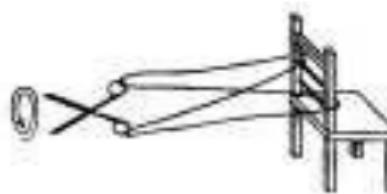
§. 6. Ad ambitum autem cuiusque solidi figuris planis inclusi pertinent 1^{mo} ipsae figurae planae eius ambitum constituentes, quae hedrae vocantur ; 2^{do} binarum hedrarum secundum latera concursus, quibus termini lineares solidi oriuntur : hos terminos, quoniam apud scriptores Stereometriae nullum nomen proprium reperio, acies vocabo ; 3^{tio} puncta, in quibus tres pluresque hedrae concurrunt, quae puncta anguli solidi appellantur.

топология в физике 20 века: спин электрона

Timeline:

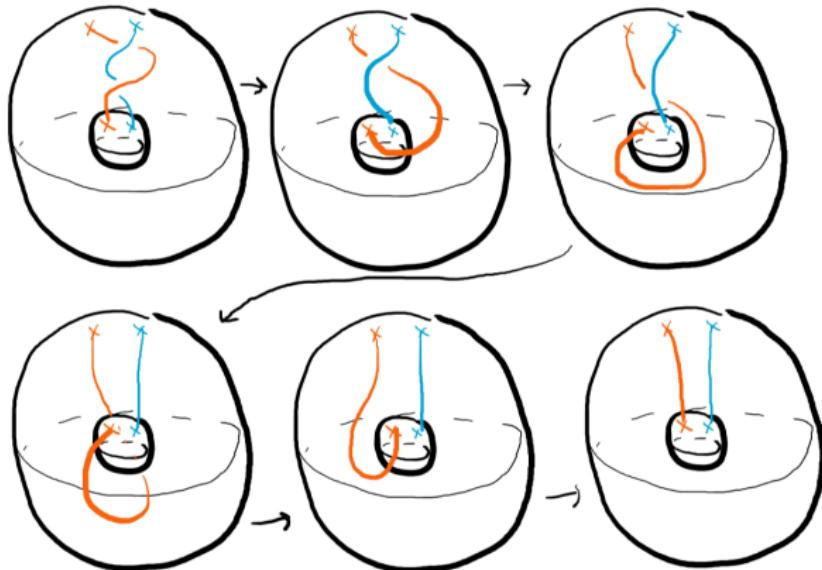
- ▶ ок. 1920: модель атома Бора становится общепризнанной
- ▶ 1922: Stern & Gerlach: Mechanische Zweideltigkeit aka duplexity effect
- ▶ 1925: Uhlenbeck & Goudsmit для объяснения этого эффекта предложили понятие спина
- ▶ 1928: Paul Dirac: уравнение для релятивистских электронов с полуцелым спином.

иллюстрация Дирака (лекции в 1930x)



Ср. случай Кеплера.

сферическая группа кос



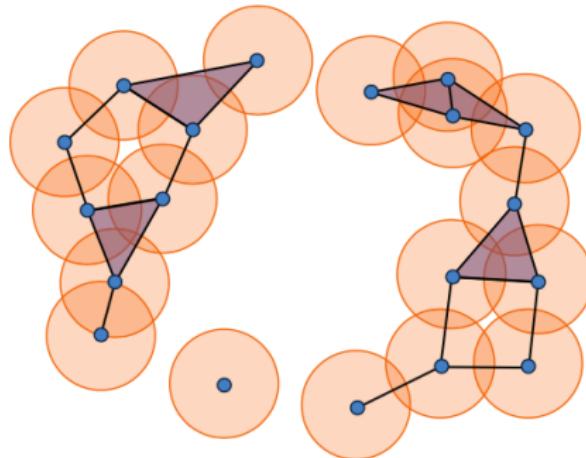
Топологическая природа спина эксплицируется в последующем развитии квантовой теории поля:

Spinors & Twistors (Penrose&Rindler 1984),

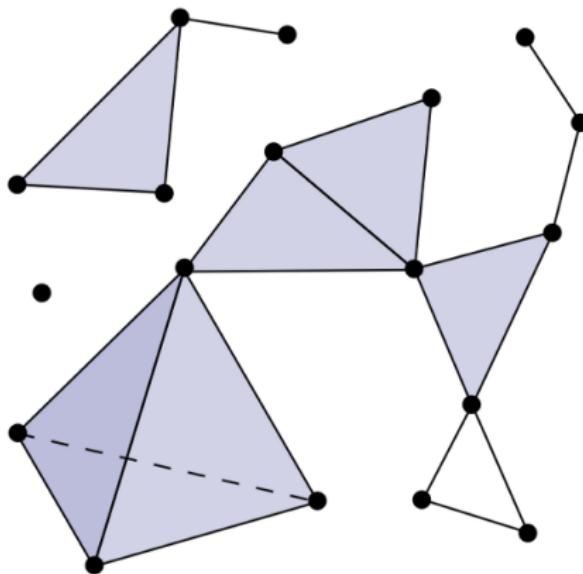
TQFT (с конца 1980x).

топологический анализ данных: идея

устойчивые (персистентные) гомологии (начало 1990х, теория Морса)



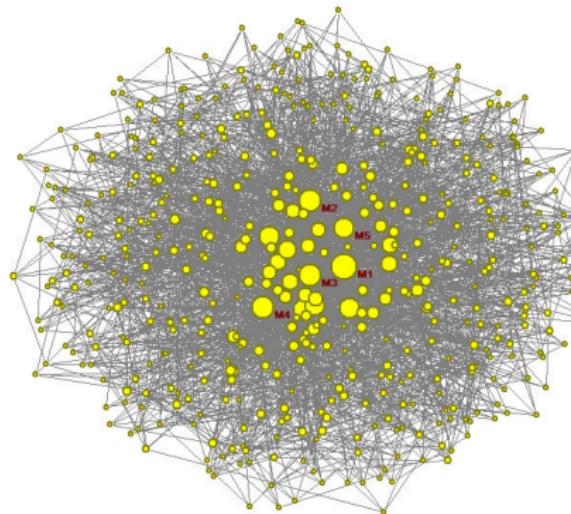
симплексиальный комплекс (обобщенный многогранник)



Что может сказать о данных их топологический профиль?

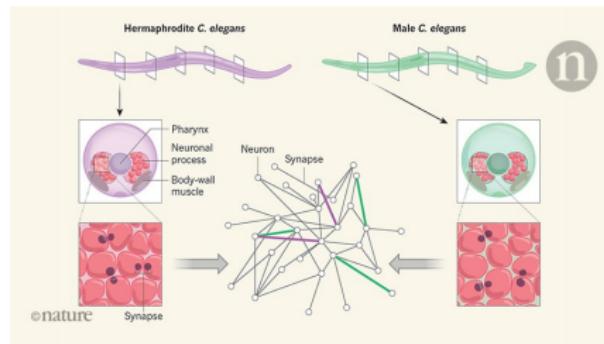
Точного ответа, как мне кажется, ни у кого нет, но ясно, что много!

старый (“флюксы и флюенты”) и новый стиль на бирже



Нейробиология как парадигма будущей науки?

Эпистемология топологического анализа данных: от коннектома (граф, Nature 2019)



... к многогранникам высших размерностей. Масштабирование коннективных структур.

Конец теории?

The End of Theory: The Data Deluge Makes the Scientific Met...

<http://www.wired.com/print/science/discoveries/magazine/16-0...>



[« Back to Article](#)

WIRED MAGAZINE: 16.07

The End of Theory: The Data Deluge Makes the Scientific Method Obsolete

By Chris Anderson 06.23.08



Illustration: Marian Bantjes

"All models are wrong, but some are useful."

Андрей Родин

Оптика математических понятий и топологический анализ

Chris Anderson 2008

The new availability of huge amounts of data, along with statistical tools to crunch these numbers, offers a whole new way of understanding the world. Correlation supersedes causation, and science can advance even without coherent models, unified theories, or really any mechanical explanation at all. There is no reason to cling to our old ways. It's time to ask: What can science learn from Google?

Ю.И. Манин 2013

What can science learn from Google?: Think! Otherwise no Google will help you.

Заключения:

- (1) Топологический анализ данных это замечательное новое изобретение, за которым, однако, стоит длинная 300-летняя история развития топологических понятий.
- 2) ТАД по крайней мере частично решает проблему поставленную Воеводским, устанавливая прочную связь между некоторыми важными современной “абстрактной” математики, и прикладной математикой, а также компьютерной наукой.

Заключения:

- (1) Топологический анализ данных это замечательное новое изобретение, за которым, однако, стоит длинная 300-летняя история развития топологических понятий.
- (2) ТАД по крайней мере частично решает проблему поставленную Воеводским, устанавливая прочную связь между некоторыми важными современной “абстрактной” математики, и прикладной математикой, а также компьютерной наукой.

Заключения:

(3) Нейробиология и когнитивная наука дают новые паттерны “топологических” объяснений, которые могут оказаться релевантными и в любых других науках, имеющих дело со сложными системами и большими объемами данных (исследования климата, экономика и др.). Это позволит говорить о рождении новой “оптики математических понятий”, а именно топологической оптики.

Заключения:

(3) Нейробиология и когнитивная наука дают новые паттерны “топологических” объяснений, которые могут оказаться релевантными и в любых других науках, имеющих дело со сложными системами и большими объемами данных (исследования климата, экономика и др.). Это позволит говорить о рождении новой “оптики математических понятий”, а именно топологической оптики.

(4) Перефразируя Канта: Berechnungen ohne Begriffe sind blind (und also langweilig ☺). Именно математические понятия и интуиции (а вовсе не грубая вычислительная мощь) делают ТАД эффективным, интересным и перспективным методом работы с данными.

СПАСИБО!