

**Андрей Родин**

**Виталий Валентинович Целищев об эпистемологии математических доказательств**

В монографии 2006 года “Эпистемология математического доказательства” [1] Виталий Валентинович Целищев представил детальное и систематическое обсуждение заявленной в названии монографии проблематики, которое включает в себя не имеющий аналогов в отечественной философской литературе критический обзор мировой литературы по этому вопросу. Сквозной темой этого фундаментального исследования является соотношение между формальными и неформальными математическими доказательствами. Этой же теме посвящена отдельная статья Виталия Валентиновича 2020 года [2], в которой автор называет (взаимозаменяемо) неформальные математические доказательства концептуальными и содержательными доказательствами, противопоставляя их формальным доказательствам.

В этих работах Целищев описывает формальные и неформальные доказательства как два полюса непрерывной шкалы, на одном конце которой находится “чисто математическое понятие доказательства как последовательности символов” (то есть, формальное доказательство, см. стр. 64 монографии [1]), а на другом конце находится эпистемически и социологически нагруженное неформальное понятие о доказательстве “как разновидности рационального мышления” (там же).

Хотя представленный Целищевым биполярный взгляд на математическое доказательство вполне адекватно отражает сложившуюся в 20-м веке ситуацию в математической практике, а также основные направления философских дискуссий о математике, зафиксированный в этом подходе фундаментальный разрыв между формальными и неформальными доказательствами в математике имеет конкретные исторические причины (которые я описал в [3]) и не является неизбежным. Я утверждаю, что этот разрыв может и должен быть, если не полностью преодолен, то во всяком случае значительно сокращен.

Говоря о возможном синтезе концептуальных и формальных математических доказательств в статье [2], Целищев оценивает философскую позицию, утверждающую возможность и желательность такого синтеза, как “чисто прагматическую”. Я не вижу достаточных оснований

для такой оценки. В 21м веке были сделаны важные теоретические шаги, направленные на сокращение разрыва между формальными и содержательными доказательствами, имеющими эпистемическую нагрузку. В области философской логики я отношу к таким шагам активно и успешно развивающуюся в настоящее время исследовательскую программу разработки теоретико-доказательной семантики логических исчислений инициированную Правицем и Шредером-Хайстером [4], к которой примыкают исследования в области логики обоснования Артемова и Фиттинга [5]. В области использования компьютеров для проверки сложных математических доказательств, которая предполагает их предварительную формализацию, прогресс также обеспечивается новыми теоретическими результатами, а не только практическими решениями и прагматическими компромиссами. В качестве яркого примера демонстрирующего этот факт достаточно указать на концепцию унивалентных оснований математики, предложенную Воеводским около 2010-го года [6].

Пересмотр биполярной концепции математического доказательства имеет прямые методологические последствия для эпистемологии компьютерных доказательств, которой Целищев уделяет значительное внимание в своих исследованиях. По мнению Целищева, в ближайшем будущем “следует ожидать, что люди будут модифицировать понятие доказательства, включая сюда компьютерное вычисление [...], если почувствуют, что это ведет их к продвижению.” “Поэтому, продолжает Целищев, “не следует превращать “строгое доказательство” в лозунг.” (стр. 42 монографии [1]).

Прогноз Целищева основан на предпосылке о том, что компьютерные доказательства обладают фиксированными эпистемическими характеристиками, включая отсутствие обзримости в обычном смысле. Тогда математическое сообщество оказывается перед следующим трудным выбором: нужно либо отказаться от использования компьютерных доказательств в математике, поскольку такие доказательства не удовлетворяют ранее принятым в математическом сообществе эпистемическим критериям, либо нужно изменить эти критерии в сторону их ослабления и считать компьютерные доказательства в математике эпистемически приемлемыми. В последнем случае математические доказательства полученные компьютерными методами можно считать допустимыми.

Однако только что описанный прагматический выбор не учитывает всех теоретических возможностей. Другая возможность состоит в существенной модификации эпистемических

характеристик компьютерных доказательств, в том числе, с помощью развития новых способов взаимодействия между человеком и компьютером. В статье [7] я показываю, что унивалентные основания математики позволяют сделать важный шаг в этом направлении: при формализации доказательств в рамках унивалентных оснований содержательные математические аргументы, с одной стороны, и формальный алгоритмический скелет доказательства, с другой стороны, каноническим образом связываются друг с другом с помощью пространственной гомотопической интуиции, которая таким образом обеспечивает эпистемическую обозримость компьютерных доказательств получаемых на этой теоретической основе.

На пути нового синтеза формальных и содержательных математических доказательств традиционный лозунг о достижении в рассуждениях “математической строгости” остается сегодня (и по моей оценке, останется в обозримом будущем) правильным и адекватным текущей математической и научной практике, даже если для его сохранения нам сегодня приходится в очередной раз уточнять (но не ослаблять) принятое в 20-м веке понятие о строгости математических доказательств.

### **Библиография:**

[1] В.В. Целищев, Эпистемология математического доказательства, Новосибирск, Параллель, 2006 г - 212 стр.

[2] В.В. Целищев, Математическое мышление: концептуальное доказательство или логический вывод? Эпистемология и философия науки, том 57, номер 4 (2020), стр. 74-86

[3] A. Rodin, One Mathematic(s) or Many? Foundations of Mathematics in the 20th century Mathematical Practice, B. Sriraman et al. (eds.) Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice, Springer 2021, URL = <[https://doi.org/10.1007/978-3-030-19071-2\\_28-1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-19071-2_28-1)>

[4] P. Schroeder-Heister, Proof-Theoretic Semantics, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/proof-theoretic-semantics/>>

[5] S. Artemov and M. Fitting, Justification Logic: Reasoning with Reasons, Cambridge University

Press 2019

[6] D.R. Grayson, An Introduction to Univalent Foundations for Mathematicians, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (2018), 427-450

[7] А. Родин, Компьютерные доказательства и их понимание человеком: случай унивалентных оснований, Интеллектуальные системы: теория и приложения, т. 25 (2021) вып. 4, стр. 337-342