19

К ТОЛКОВАНИЮ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ *

На данную работу можно смотреть с двух совершенно различных точек зрения.

1. Если не признавать интуиционистских теоретико-познавательных предпосылок, то следует принимать во внимание лишь первый параграф. Выводы этого параграфа могут быть суммированы приблизительно следующим образом.

Наряду с теоретической логикой, систематизирующей схемы доказательств теоретических истин, возможна систематизация схем решений задач, например, геометрических задач на построение. Принципу силлогизма будет здесь соответствовать, например, следующий принцип: *если мы можем свести решение задачи b к решению задачи a, а решение задачи c — к решению задачи b, то и решение задачи c мы можем свести к решению задачи a.*

Введя соответствующую символику, можно дать формальные исчислительные правила, позволяющие осуществить символистическое построение системы подобных схем решения задач. Таким образом, наряду с теоретической логикой возникает некоторое новое *исчисление задач*. При этом нет нужды в каких-либо специальных (например, интуиционистских) теоретико-познавательных предпосылках.

Имеет место следующий замечательный факт: *исчисление задач по форме совпадает с брауэровой интуиционистской логикой, недавно формализованной Гейтингом* [1, 2].

2. Во втором параграфе при признании общих интуиционистских предпосылок критически исследуется интуиционистская логика; при этом указывается, что она должна быть заменена исчислением задач, поскольку ее объекты суть в действительности не теоретические высказывания, а, напротив, задачи.

§ 1

Мы не определяем, что такое *задача*, а объясняем это на примерах. Вот задачи:

1. Найти такие четыре целые числа x, y, z, n, для которых выполняются соотношения

$$x^n + y^n = z^n, \qquad n > 2. \tag{1}$$

2. Доказать, что теорема Ферма неверна.

---

* Zur Deutung der intuitionistischen Logik.— Math. Ztschr., 1932, Bd. 35, S. 58—65. *Перевод В. А. Успенского.*

3. Через три заданные точки (x, y, z) провести окружность [1].

4. Предположив, что один корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ дан, найти другой.

5. Предположив, что число π допускает рациональное выражение

$$\pi = m/n,$$

найти аналогичное выражение для числа e.

Отличие второй задачи от первой понятно и еще не составляет предмет специфически интуиционистского утверждения [2]. Четвертая и пятая суть примеры *условных* задач; при этом посылка в пятой задаче невозможна и, следовательно, сама задача бессодержательна или пуста. Доказательство *бессодержательности* задачи будет всегда в дальнейшем рассматриваться как ее решение.

Мы полагаем, что после этих примеров и разъяснений понятия «задача» и «решение задачи» во всех случаях, которые встречаются в конкретных областях математики, могут употребляться без недоразумений [3]. В дальнейшем задачи будут обозначаться посредством строчных латинских букв a, b, c, . . .

Коль скоро a и b — задачи, $a \wedge b$ означает задачу «решить обе задачи a и b», а $a \vee b$ — задачу «решить по крайней мере одну из задач a и b». Далее, $a \supset b$ есть задача «предположив, что решение задачи a дано, решить задачу b» или, что значит то же самое, «свести решение задачи b к решению задачи a».

Мы нигде не предполагали, что каждая задача разрешима. Пусть, например, теорема Ферма верна; в таком случае решение первой задачи было бы противоречивым. Соответственно этому $\neg a$ означает задачу «предположив, что решение задачи a дано, получить противоречие» [4].

Согласно этим определениям, если a, b, c, d суть задачи, каждая формула p (a, b, c, . . .), составленная с помощью знаков $\wedge$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$, также обозначает некоторую задачу. Если же a, b, c, . . . суть только символы неопределенных задач, можно сказать, что p (a, b, c, . . .) представляет собой функцию заданных переменных a, b, c, . . . В общем случае если x есть переменная (произвольного сорта) и a (x) обозначает задачу, смысл которой зависит от значений

[1] Чтобы быть совершенно точным, следует при формулировании этой задачи указать дозволенные средства построения.

[2] В противоположность этому *высказывания* «теорема Ферма неверна» и «существуют четыре числа, удовлетворяющие соотношениям (1)» с точки зрения классической логики эквивалентны.

[3] Главные понятия логики высказываний «высказывание» и «доказательство высказывания» находятся не в лучшем положении.

[4] Отметим, что $\neg a$ не следует понимать как задачу «доказать неразрешимость задачи a». В общем случае, если рассматривать «неразрешимость a» как вполне определенное понятие, мы получаем лишь, что из $\neg a$ вытекает неразрешимость a, но не обратное. Если бы, например, было доказано, что осуществление вполне-упорядочения континуума превосходит наши способности, еще нельзя было бы утверждать, что из наличия такого вполне-упорядочения вытекает противоречие.

x, то $(x)\ a\ (x)$ обозначает задачу «указать общий метод решения задачи $a\ (x)$ при каждом отдельном значении x». Это следует понимать так: решить задачу $(x)\ a\ (x)$ значит быть в состоянии для каждого заданного единичного значения x_0 переменной x решить задачу $a\ (x_0)$ посредством конечной последовательности заранее (до выбора этого x_0) известных шагов [5].

Для функций $p\ (a,\ b,\ c,\ \ldots)$ от неопределенных задач a, b, c, ... в дальнейшем вместо

$$(a)(b)(c)\ \ldots\ p\ (a,\ b,\ c,\ \ldots)$$

пишем просто [6]

$$\vdash p\ (a,\ b,\ c,\ \ldots).$$

Следовательно, $\vdash p\ (a,\ b,\ c,\ \ldots)$ обозначает задачу «указать общий метод решения задачи $p\ (a,\ b,\ c,\ \ldots)$ при каждом отдельном выборе задач a, b, c, ...».

Задачи вида $\vdash p\ (a,\ b,\ c,\ \ldots)$, где p выражено посредством знаков $\vee$, $\wedge$, $\supset$ и $\neg$, составляют предмет *элементарного исчисления задач* [7].

Соответствующие функции $p\ (a,\ b,\ c,\ \ldots)$ суть *элементарные задачные функции.*

То, что *я* решил задачу, является чисто субъективным фактом, который сам по себе еще не представляет никакого общего интереса. Логические и математические задачи обладают, однако, специальным свойством *общеобязательной значимости их решений*: если *я* решил логическую или математическую задачу, то *я* могу изложить это решение общепонятным способом и оно *с необходимостью* будет признано правильным, хотя эта необходимость и носит идеальный, в некоторой степени, характер, поскольку предполагает достаточное развитие слушателей [8].

Цель исчисления задач состоит, собственно говоря, в том, чтобы дать метод, позволяющий посредством механического применения нескольких простых исчислительных правил решать задачи вида $\vdash p\ (a,\ b,\ c,\ \ldots)$, где $p\ (a,\ b,\ c,\ \ldots)$ представляет собой элементарную задачную функцию. Чтобы свести все к этим исчислительным правилам, мы должны предположить, однако, что решения некоторых элементарных задач нам уже известны. Мы принимаем как *постулаты*, что две следующие группы задач A и B уже решены.

---

[5] Как и ранее, мы надеемся, что в конкретных областях математики это определение не может привести к недоразумениям.

[6] Такое объяснение значения значка $\vdash$ полностью отличается от предложенного Гейтингом, хотя и приводит к тем же самым правилам исчисления.

[7] Это определение аналогично определению элементарного исчисления высказываний. Однако в исчислении высказываний логические функции, аналогичные функциям $\wedge$, $\vee$, $\supset$, и $\neg$, могут быть выражены через две из них. В исчислении задач все четыре функции независимы.

[8] Дословно то же справедливо и для доказательств теоретических высказываний. Существенно, однако, что каждое доказанное высказывание является *верным*; для задач подобное понятие верности отсутствует.

Дальнейшее изложение обращено только к такому читателю, который решил все эти задачи[9]:

2.1 $\vdash a \supset a \wedge a$
2.11 $\vdash a \wedge b \supset b \wedge a$
2.12 $\vdash (a \supset b) \supset (a \wedge c \supset b \wedge c)$
2.13 $\vdash (a \supset b) \wedge (b \supset c) \supset (a \supset c)$
2.14 $\vdash b \supset (a \supset b)$
A 2.15 $\vdash a \wedge (a \supset b) \supset b$
3.1 $\vdash a \supset a \vee b$
3.11 $\vdash a \vee b \supset b \vee a$
3.12 $\vdash (a \supset c) \wedge (b \supset c) \supset (a \vee b \supset c)$
4.1 $\vdash \neg a \supset (a \supset b)$
4.11 $\vdash (a \supset b) \wedge (a \supset \neg b) \supset \neg a.$

Итак, мы предполагаем, что при любом выборе задач a, b, c читатель может решить все стоящие здесь после знака $\vdash$ задачи. Это не представляет никаких трудностей. Например, в задаче 2.12, предполагая, что решение b уже сведено к решению a, следует свести решение $b \wedge c$ к решению $a \wedge c$. Пусть решение $a \wedge c$ дано; это означает, что даны как решение a, так и решение c; из решения a мы можем по предположению вывести решение b, а так как решение c уже является данным, мы получаем решения обеих задач b и c, а следовательно, и решение задачи $b \wedge c$.
В этом рассуждении заключается общий метод решения задачи

$$(a \supset b) \supset (a \wedge c \supset b \wedge c),$$

справедливый при любых a, b, c. Таким образом, мы имеем право рассматривать задачу

2.12. $\vdash (a \supset b) \supset (a \wedge c \supset b \wedge c)$

(со знаком общности $\vdash$) как решенную.

Вторая *группа задач*, для которой мы постулировали наличие решений,— *группа* B — содержит лишь три задачи[10]. А именно мы исходим из того, что мы всегда в состоянии (владеем общим методом) решить для любых элементарных задачных функций p, q, r, s,. . . следующие задачи:

I. Если $\vdash p \wedge q$ решена, решить $\vdash p$.
II. Если $\vdash p$ и $\vdash p \supset q$ решены, решить $\vdash q$.
III. Если $\vdash p\ (a, b, c, \ldots)$ решена, решить $\vdash p\ (q, r, s, \ldots)$.

Теперь мы можем указать *правила* нашего исчисления задач.

---

[9] В случае исчисления высказываний, если желать установить верность следствий, следует сперва убедиться в верности аксиом. Относительно нумерации формул ср. [1].

[10] Их нельзя, однако, выразить символически посредством знаков элементарного исчисления задач.

1. Сперва мы заносим в список решенных задач задачи группы А.

2. Если в нашем списке уже находится $\vdash p \wedge q$, разрешается поместить туда также и $\vdash p$.

3. Если там находятся обе формулы $\vdash p$ и $\vdash p \supset q$, можно поместить и $\vdash q$.

4. Если $\vdash p\ (a, b, c, \ldots)$ уже находится в списке и $q, r, s, \ldots$ суть произвольные задачные функции, разрешается поместить туда также и $\vdash p\ (q, r, s, \ldots)$.

На основании ранее принятых постулатов легко убедиться, что это формальное исчисление действительно обеспечивает решение соответствующих задач.

Мы отказываемся здесь от дальнейшего развития этого исчисления поскольку все только что указанные формальные исчислительные правила и a priori написанные формулы совпадают с исчислительными правилами и аксиомами Гейтинга [1]; следовательно, все формулы названной статьи мы можем трактовать как задачи и все эти задачи считать решенными.

Здесь мы отметим лишь некоторые особенно интересные из таких задач (они также рассматриваются как решенные):

4.3 $\vdash a \supset \neg\neg a$

4.2 $\vdash (a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$

4.3.2 $\vdash \neg\neg\neg a \supset \neg a$

Решения задач 4.3 и 4.2 ясны и без вычислений. Решение задачи 4.3.2 получается из 4.3 и 4.2, если в 4.2 заменить b на $\neg\neg a$.

Если к принятым a priori формулам А присоединить еще формулу

$$\vdash a \vee \neg a \tag{2}$$

(в логике высказываний — принцип исключенного третьего), мы получим полную систему аксиом классической логики высказываний. При нашем толковании задач формула (2) читается следующим образом: указать общий метод, позволяющий для каждой задачи a либо найти ее решение, либо же из наличия такого решения вывести противоречие! В частности, когда задача a состоит в доказательстве высказывания, надо располагать общим методом, позволяющим каждое высказывание либо доказать, либо привести к противоречию. Если наш читатель не считает себя всезнающим, он, пожалуй, согласится, что формула (2) не может находиться в списке решенных им задач.

Странным образом, однако, задачу [11]

4.8 $\vdash \neg\neg(a \vee \neg a)$

можно решить, как показывается исчислением Гейтинга.

---

[11] В логике высказываний 4.8 выражает брауэрову теорему о непротиворечивости закона исключенного третьего.

Формула

$$\vdash \neg\neg a \subset a \tag{3}$$

(в исчислении высказываний — правило двойного отрицания) также не может появиться в нашем исчислении задач, поскольку из нее с помощью 4.8 следует формула (2).

Мы видим, таким образом, что в противоположность формулам интуиционистской логики Гейтинга даже самые простые формулы классической логики высказываний не могут появиться в нашем исчислении задач.

Следует еще отметить, что если формула $\vdash p$ является ложной в классической логике высказываний, то соответствующая задача $\vdash p$ не может быть решена. В самом деле, из такой формулы $\vdash p$ с помощью ранее принятых формул и исчислительных правил исчисления задач можно вывести очевидным образом противоречивую формулу $\vdash a \wedge \neg a$ (ср. [3]).

§ 2

Основной принцип интуиционистской критики логических и математических теорий таков: *каждое не бессодержательное высказывание должно указывать на одно или несколько совершенно определенных, доступных нашему опыту положений вещей* [12].

Если a есть общее высказывание вида «каждый элемент множества K обладает свойством A» и если, сверх того, множество K бесконечно, то отрицание высказывания a, т. е. высказывание «a ложно», не удовлетворяет только что сформулированному принципу. Чтобы устранить это затруднение, Брауэр дает новое определение отрицания: «a ложно» следует понимать как «a ведет к противоречию». Таким образом, отрицание высказывания a превращается *в экзистенциальное высказывание*, или *высказывание о существовании*: «Существует цепь логических заключений, которая, если принять верность высказывания a, приводит к противоречию».

Экзистенциальные высказывания, однако, были подвергнуты Брауэром глубокой критике. А именно, с интуиционистской точки зрения не имеет смысла просто сказать: «среди элементов бесконечного множества K имеется по крайней мере один элемент со свойством A», не указав этот элемент.

Брауэр, однако, не намерен полностью изгнать из математики экзистенциальные высказывания. Он лишь разъясняет, что экзистенциальное высказывание не должно высказываться без приведения соответствующей конструкции. Вместе с тем экзистенциальное высказывание не является, согласно Брауэру, простой констатацией того факта, что мы уже нашли в K соответствующий элемент; в этом последнем случае экзистенциальное высказывание оказывалось бы

[12] Ср. [4]. Все дальнейшее исследование негативных и экзистенциальных высказываний примыкает в сущности к этой работе Вейля.

неверным *до* изобретения конструкции и верным лишь *после* этого. Так возникает этот совершенно особый тип высказываний, которые, хотя и не должны иметь меняющегося с течением времени содержания, могут тем не менее высказываться только при определенных условиях.

Может возникнуть естественный вопрос, не является ли этот особый тип высказываний всего лишь фикцией. В самом деле, предлагается *задача* «во множестве K найти элемент со свойством A»; эта задача имеет в действительности некоторый определенный, не зависящий от состояния наших знаний смысл; если эта задача *решена*, т. е. если соответствующий элемент x найден, мы получаем эмпирическое высказывание «теперь наша задача решена». Итак, то, что Брауэр понимает под экзистенциальным высказыванием, полностью разложено на два элемента: объективный элемент (задача) и субъективный (ее решение). Тем самым не остается ничего, что можно было бы трактовать как экзистенциальное высказывание в собственном смысле слова.

Поэтому главный результат интуиционистской критики негативных высказываний должен быть сформулирован следующим простым способом: *для общего высказывания бессмысленно; в общем случае рассматривать его отрицание как определенное высказывание.* Но тогда исчезает предмет интуиционистской логики, поскольку теперь принцип исключенного третьего оказывается справедливым для всех высказываний, для которых отрицание вообще имеет смысл [13].

Для математики отсюда следует, что решение задач должно рассматриваться как ее самостоятельная цель (наряду с доказательством теоретических высказываний). Как было показано в первом параграфе, в сфере задач и решений формулы интуиционистской логики также приобретает новый смысл [14].

Гёттинген, 15 января 1931 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1930, S. 42—56.
2. *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1930, S. 57—71, 158—169.
3. *Glivenko V.*— Sur quelques points de la logique de M. Brouwer.— Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., sér. 5, 1929, vol. 15, p. 183—188.
4. *Weyl H.* Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.— Math. Ztschr., 1921, Bd. 10, S. 39—79. Рус. пер.: О новом кризисе основ математики.— В кн.: *Вейль Г.* О философии математики. М.; Л.: ГТТИ, 1934, с. 92—128.
5. *Heyting A.* Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik.— Erkenntnis, 1931, Bd. 2, S. 106—115.

[13] Возникает однако, новый вопрос: какие логические законы справедливы для высказываний, отрицание которых не имеет смысла?

[14] Эта интерпретация интуиционистской логики тесно связана с идеей, которую развил Гейтинг в [5]; у Гейтинга, правда, отсутствует ясное различие между высказыванием и задачей.

20

К ОБОСНОВАНИЮ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ*

Мы хотим здесь указать на одно интересное приложение теоремы Понтрягина о непрерывных алгебраических телах [1]. Если при обосновании проективной геометрии принимать только (трехмерные) аксиомы инцидентности, то получится, как хорошо известно, большое количество возможных типов пространств. Эти различные типы проективных пространств соответствуют различным типам абстрактных алгебраических тел. В самом деле, в каждом проективном пространстве можно, обычным путем (с помощью теоремы Дезарга) ввести исчисление расстояний и получившееся при этом (вообще говоря, некоммутативное) тело расстояний определяется однозначно с точностью до изоморфизма при помощи исходного пространства. Обратно, если задано абстрактное алгебраическое тело, можно построить единственный, ему соответствующий тип проективного пространства.

Для того чтобы охарактеризовать обычную вещественную проективную геометрию, мы должны были бы следуя классическому методу, ввести две новые группы аксиом, а именно: аксиомы порядка и аксиомы непрерывности. Лишь после этого можно было бы добавлением комплексных элементов обосновать комплексную проективную геометрию. Но абстрактная топология дает нам теперь возможность рассматривать свойства непрерывности независимо от свойств порядка и, следовательно, обосновать аксиоматически комплексную геометрию *непосредственно*, без использования аксиом порядка, которые верны только в вещественной геометрии. Ниже мы и предлагаем один такой прямой путь.

Даны три системы элементов, которые называются точками, прямыми и плоскостями. Пусть они удовлетворяют следующим условиям.

I. Каждая из этих трех систем образует связное бикомпактное топологическое пространство.

II. Точки, прямые и плоскости удовлетворяют обычным проективным аксиомам инцидентности.

III. Отношения инцидентности непрерывны: проходящая через две точки прямая является непрерывной функцией этих двух точек (если они не сливаются) и т. д.

Если в проективном пространстве, удовлетворяющем I—III, выбрать на одной прямой три произвольные точки в качестве нуля, единицы и бесконечности и определить соответствующее исчисление расстояний, то, как легко показать, в получившемся теле расстояний выполнены все требования теоремы Понтрягина. Следовательно, это тело расстояний изоморфно либо телу вещественных, либо телу

* Zur Begründung der projektiven Geometrie.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 175—176. *Перевод И. Пенкова* (*НРБ*).

[1] Über stetige algebraische Körper.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 163—174.