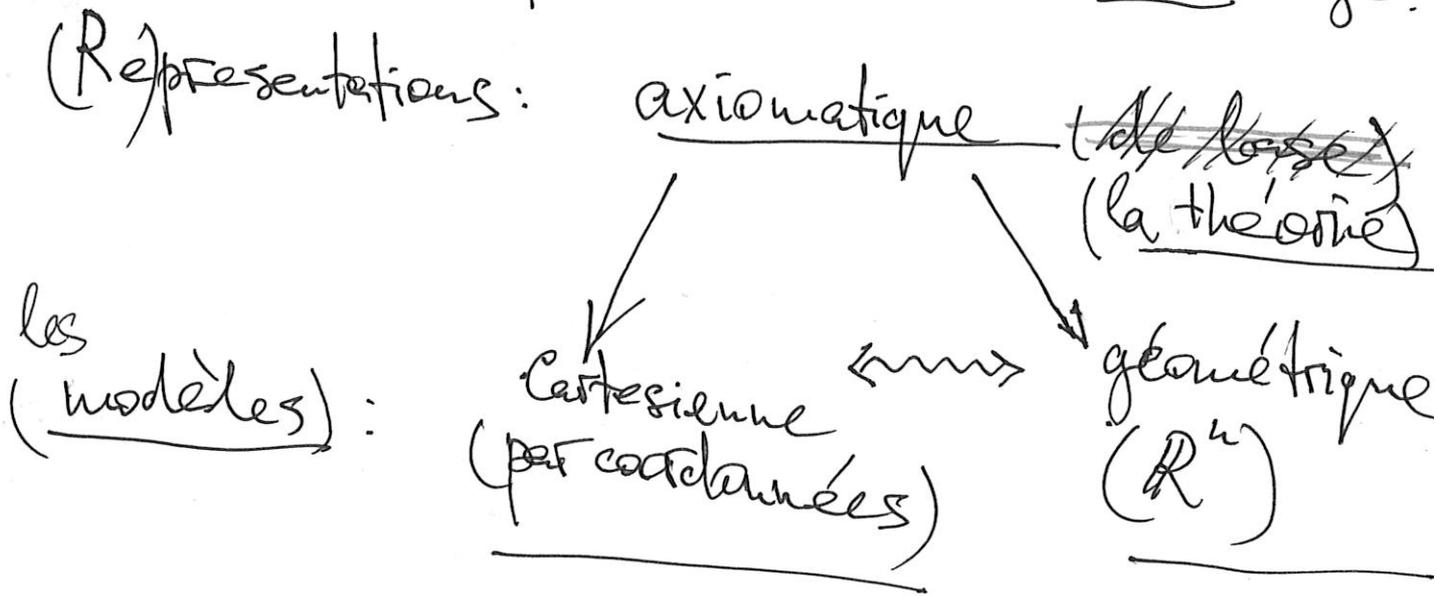


# Espaces vectoriels (linéaires) <sup>espaces</sup>

(1)

Remarque Dans les maths. modernes on appelle un espace un ensemble quelconques des éléments avec des relations (opérations) entre eux d'une nature "spatiale" dans un sens très large.



Présent. axiomatique d'un espace vectoriel

- ensemble  $\mathcal{V}$   $\vec{V}$ , on appelle vecteurs les éléments de  $\vec{V}$
- 2 opérations binaires sur les vecteurs
  - addition:  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{V}$   
 $\vec{u} + \vec{v} \in \vec{V}$   $\leftarrow$  cloture algébrique
  - multiplication (dit scalaire) par un nombre réel  
 $\vec{u} \in \vec{V}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k\vec{u} \in \vec{V}$

• 8 axiomes pour les 2 opérations:

(2)

①  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  - assoc.

②  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  - commut.

③ il existe  $\vec{0}$ , t.q.  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$  pour tout  $\vec{u} \in V$   
 $\vec{0} \in V$

④ pour chaque  $\vec{u}$  il existe  $-\vec{u}$   
t.q.  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$   $\vec{u}, -\vec{u} \in V$

⑤  $(k+l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$ ,  $k, l \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{u} \in V$

⑥  $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$

⑦  $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ ,  $\vec{v} \in V$

⑧  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ ,  $1 \in \mathbb{R}$

---

Def. Un sous-espace (vectoriel) d'un espace véct.  $V$  est un sous-ensemble de  $V$ ,  $U \subseteq V$  t.q.  $U$  est aussi un espace vectoriel.

Ex. Un plan dans l'espace Euclid. de 3 dim ( $\mathbb{R}^3$ )

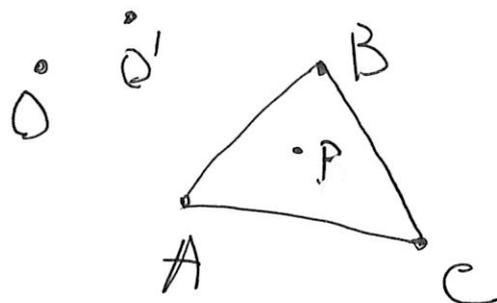
# Coordonnées barycentriques

(2.0)

(3)

d'un point dans le plan  $\mathbb{R}^2$

Soient  $u, v, w \in \mathbb{R}$   
t.q.  $u+v+w \neq 0$



$O, O', A, B, C, P, P'$  - points

Soient  $A, B, C$  fixes

$P$  est le centre de masses  
(le barycentre) des  $A, B, C$

$$\forall O \exists P \text{ t.q. } (u+v+w)\vec{OP} = u\vec{OA} + v\vec{OB} + w\vec{OC}$$

Théorème  $P$  ne dépend pas du choix de  $O$

Preuve

~~Prévoir~~

Soit  $O' \neq O$

on va montrer que  $P' = P$

$$(u+v+w)\vec{O'P'} = u\vec{O'A} + v\vec{O'B} + w\vec{O'C}$$

$$(u+v+w)(\vec{O'P'} - \vec{O'P}) = u(\vec{O'A} - \vec{O'A}) + v(\vec{O'B} - \vec{O'B}) + w(\vec{O'C} - \vec{O'C}) =$$
$$= (u+v+w)(\vec{O'O})$$

$$\vec{O'P'} = \vec{O'O} + \vec{OP} = \vec{O'P} \Rightarrow P' = P \quad \square$$

Un changement d'un point de vue:

$u, v, w$  sont variables

$A, B, C$  restent fixes

On appelle  $u, v, w$  les coordonnées

Une remarque:  $(u, v, w)$  et  $(\lambda u, \lambda v, \lambda w)$

définissent le même point pour chaque  $\lambda \in \mathbb{R}$  t.q.  $\lambda \neq 0$

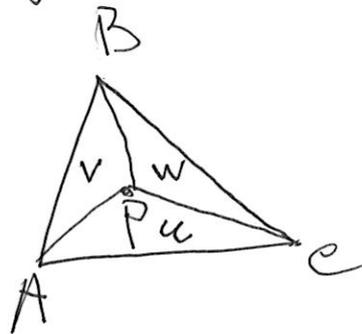
Si on fixe  $u+v+w=1$ , le système des coord. barycentrique est dit normé.

Interprétation géométrique des  
coordonnées barycentriques:

~~2.01~~

4

$$P = (u:v:w)_{ABC}$$



$$u = \frac{S_{APC}}{S_{ABC}}; \quad v = \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}; \quad w = \frac{S_{BCP}}{S_{ABC}}$$

---

Def Deux vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}$  ~~est~~ sont dits colle colinéaires

si  $\exists c \neq 0, q. \vec{a} = c \vec{b} \quad c \in \mathbb{R}$

Def. Combinaison lin. des vecteurs

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  : linéaire

vecteur  $\vec{b} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_k \vec{a}_k$   
où  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$

Def. (Famille) Système des vecteurs est lié

si  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$   
t.q.  $\exists c_1, \dots, c_k$   
 $\exists c_i \neq 0$  t.q.  $c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_k \vec{a}_k = \vec{0}$   
 $\sum_{i=1}^k c_i \vec{a}_i = \vec{0}$

Si non libre

Def Système de vects est générateur

~~est~~  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$   
si chaque vecteur  $\vec{v} \in V$   
~~est~~ est une comb. linéaire de  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ .

③  
⑥

Def. Un espace vect.  $V$  est d'une dimension finie si dans  $V$  il existe un système de vecteurs  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  qui est générateur: chaque  $\vec{v} \in V$  est une combinaison linéaire des  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$   
 $\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + \dots + a_k \vec{e}_k$  où  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$

Th.  
(sans preuve)

Si système  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  est générateur pour  $V$ , il existe dans  $V$  système  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ ,  $n \leq k$ , t.q.  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  est générateur dans  $V$  et libre dans  $V$

On appelle  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  une base de  $V$   
 $\hookrightarrow$  la dimension de  $V$

Pour tout  $m > n$  un système  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$  est lié

Pour tout  $l < n$ , système  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$  n'est pas générateur

Soit  $\vec{a} (a_1, a_2), \vec{b} (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ . Est-ce que  $\vec{c} (c_1, c_2)$  est une combinaison linéaire de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ ?

$\vec{c} (c_1, c_2)$  une combinaison linéaire de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ ?

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \neq 0$$

On cherche  $x, y \in \mathbb{R}$  t.g.  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

$$\begin{cases} -a_2 / a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \neq 0$$

Cas  $\dim = 2$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

diagonale supplémentaire

diagonale principale

(Th. de Cramer)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Tels  $x, y$  existe ssi.  $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$

Si non,  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow \vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow$   
 $(\det A = 0) \Leftrightarrow$  système  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  est lié!

Cas  $\dim = n =$  cas général

~~32~~  
8

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in N(d_1, \dots, d_n)} (-1)^\sigma a_{d_1 1} \cdot a_{d_2 2} \cdots a_{d_n n}$$

matrice  $n \times n$   $(d_1, d_2, \dots, d_n)$

$N = \#$  de permutations

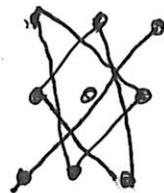
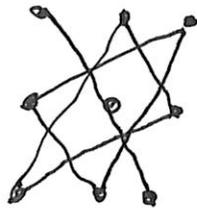
2 lignes (colonnes) sont égales  $\Rightarrow \det A = 0$

—  $\nu$  — proportionnelles  $\Rightarrow \det A = 0$

1 ligne (colonne) est nul  $\Rightarrow \det A = 0$

déterminant de matrice

Cas  $3 \times 3$  matrice  $3 \times 3$



+

-



# Espace affine (présentation axiomatique)

- Espace vectoriel  $V$
  - Ensemble des "points"
  - Application  $P \times P \rightarrow V$
- (8 axiomes)  
de dim fini  
+ 1 = 9

$$\begin{array}{l} A, B \in P \\ \vec{v} \in V \end{array} \quad (A, B) \rightarrow \vec{v}$$

A: point de départ de  $\vec{v}$   
B: point d'arrivée de  $\vec{v}$

- 2 axiomes en plus  $\vec{v} = \vec{AB}$

(10) Pour chaque  $A \in P$   
chaque  $\vec{v} \in V$   
il y a un seul  $B \in P$  t.q.  $\vec{v} = \vec{AB}$

(11) Pour tout  $A, B, C \in P$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

---

Un repère  $(O, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  est  
une notion affine! / repère = syst. des  
coordonnées affines!

Def.

Cas  $\dim=2$  | Base : deux vecteurs non-co linéaires  
(Plan) véctorielle  $\vec{i}, \vec{j}$  :

$$\vec{v} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$$

Reperè : + point fixe  $O : (O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_R \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_R$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} : \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \beta + \delta \end{pmatrix}_R$$

$$\vec{BA} : \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$k \vec{AB} : \begin{pmatrix} k\alpha \\ k\beta \end{pmatrix}$$

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AB} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def. ① si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  et  $\vec{i} \perp \vec{j}$  la base est dite orthonormée =

= orthogonale et normée  
② (1)

# Changement de base vectorielle

Cas dim=2

Soit  $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$  la base de départ.

Soit  $B' = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$  une nouvelle base.

$$\vec{i}' = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_B, \quad \vec{j}' = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}_B$$

Condition:  $\vec{i}'$  et  $\vec{j}'$  ne sont pas colinéaires

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j}, \quad \vec{j}' = c\vec{i} + d\vec{j}$$

$$\text{Soit } \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}_{B'}$$

Problème 1:  $x, y$  sont données; trouver  $x', y'$

Problème 2:  $x', y'$  sont données; retrouver  $x, y$

Solution:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = x'(a\vec{i} + b\vec{j}) + y'(c\vec{i} + d\vec{j}) = \\ &= (ax' + cy')\vec{i} + (bx' + dy')\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

le Pbm 2 est plus facile!

# Prob 1

## méthode 1:

$$\begin{cases} x = ax' + cy' \\ y = bx' + dy' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x' &= ? \\ y' &= ? \end{aligned}$$

Si  $\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = 0$ , le système ~~est~~ a une solution unique!

## méthode 2:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

### matrice inverse

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = [1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

### Propriétés de matrice inverse

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Propriété de [1]:  
pour toute matrice A

$$[1] \times A = A \times [1] = A$$

méthode 2 se généralise pour toute dimension n

# Changement de repère

Soit  $R = (O, B)$  le repère de départ

Soit  $R' = (O', B')$  un nouveau repère

Changement  $R \rightarrow R'$  se compose de

- changement  $B \rightarrow B'$  (comme avant)
- changement de point d'origine  $O \rightarrow O'$

Soit  $M = (x_M, y_M)_R$

Problème 1: trouver  $(x'_M, y'_M)_{R'}$

Problème 2: retrouver  $(x_M, y_M)_R$  si  $(x'_M, y'_M)_{R'}$  sont données

Solution:  $(x'_M, y'_M)_{R'} = \overrightarrow{O'M}$ ,  $(x_M, y_M)_R = \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ , d'où  $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$

puis changer la base  $B \rightarrow B'$  ou  $B' \leftarrow B$  comme avant

un concepte dual à ce de changement de base vectorielle.

Transf. linéaire:  
formation

Def.:  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Axiomes:  
 $T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$   
 $T(a\vec{v}) = aT(\vec{v}), a \in \mathbb{R}$

linéaire:  $T(a\vec{v} + b\vec{w}) = aT(\vec{v}) + bT(\vec{w})$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_1} + v_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_2} + \dots + v_n \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_n}$$
  
matrice  $m \times n$   
la base

$$T(\vec{v}) = T \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n v_i T(\vec{e}_i) =$$

Ex.: projection  $= [T] \vec{v}$  matrice de transformation T



$$\vec{v}(x, y) \rightarrow \vec{v}_x(x, 0) \quad \Bigg| \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Opérations avec des vecteurs

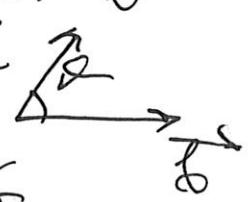
## ① Produit scalaire

$$\text{Dim } \vec{a} = \text{Dim } \vec{b}$$

1. Définition (motivation)

géométrique  
l'angle entre  
 $\vec{a}$  et  $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \theta$$

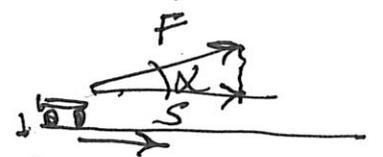


$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2, \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

scalaire  
Ex. Physique

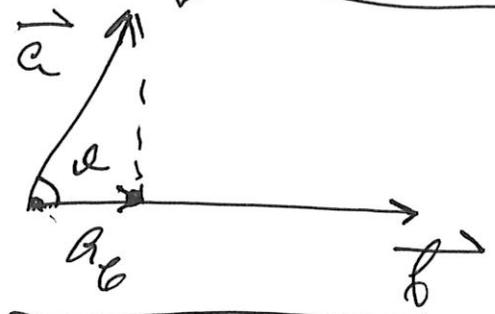


$$\text{Trav.} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{S}\| \cdot \cos \theta$$

### Projections

$$a_b = \|\vec{a}\| \cos \theta$$

$$b_a = \|\vec{b}\| \cos \theta$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b \|\vec{b}\| = b_a \|\vec{a}\|$$

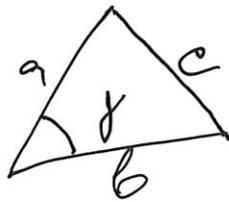
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Prop.

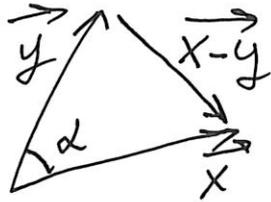
1) scaling

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b})$$

$$2) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$



$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{x}) + (\vec{y} \cdot \vec{y}) - 2(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2(\vec{x} \cdot \vec{y}) \end{aligned}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

Schwarz

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Dans une base vect. orthogonale:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, \dots, a_n) \\ \vec{b} &= (b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i \end{aligned}$$

Equivalence des def. géométrique et def. algébrique.

$$\vec{a} = [a_1, \dots, a_n] = \sum_i a_i \vec{e}_i$$

$$\vec{b} = [b_1, \dots, b_n] = \sum_i b_i \vec{e}_i$$

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

repère base

$$\left| \begin{array}{l} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \text{ si } i \neq j \end{array} \right|$$

orthonormale  
(orientation)  
directe et (i, j) →  
inverse → (j, i)

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \text{ (Kronecker)}$$

↑ angle positive

main, droit / gauche

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_i = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{e}_i\| \cdot \cos \theta_i = a_i$$

$$\vec{b} \cdot \vec{e}_i = \dots = b_i$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

n=2

n=3

Definition (de base) algébrique

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i = [\vec{a}] \times ([\vec{b}])^T = [\vec{a}]^T \times [\vec{b}]$$

forme matricielle

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \times [b_1 \dots b_n]$$

# Angle entre deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ (18)

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{\sum_i a_i b_i}{\sqrt{\sum_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_i b_i^2}}$$

$$\sum_i a_i b_i = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

## ② Produit vectorielle (cross-product) (n=3 !)

Def  $\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta \cdot \vec{n}$  — vect. orthogonale (main droite)

$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$  (règle de la main droite)

Soit  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  une base directe, orthogonale

index =  $\vec{a}$  (Orientation)

def. géométrique

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$   
 $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$   
 $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

distrib., linéaire

Soit  $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$   
 $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$

prod. vect.
def. algébrique

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ -\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Prop. géométriques

1)  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

2)  $|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{area of parallelogram} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$

3) directe, orth.

Cos  $\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \dots}$

$$\begin{aligned}
 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2} \\
 &= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2} \\
 &= |\vec{a} \times \vec{b}|
 \end{aligned}$$

Equivalence entre def. algébrique et def. géométrique

Auffrement:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \cancel{a_1 b_1 \vec{i} \times \vec{i}} + a_1 b_2 \vec{i} \times \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \times \vec{k} + \\
&+ a_2 b_1 \vec{j} \times \vec{i} + \cancel{a_2 b_2 \vec{j} \times \vec{j}} + a_2 b_3 \vec{j} \times \vec{k} + \\
&+ a_3 b_1 \vec{k} \times \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \times \vec{j} + \cancel{a_3 b_3 \vec{k} \times \vec{k}} =
\end{aligned}
\left. \begin{array}{l}
\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \\
\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\
\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\
\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\
\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}
\end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{0} + a_1 b_2 \vec{k} + (-a_1 b_3) \vec{j} + \\
&+ (-a_2 b_1) \vec{k} + \vec{0} + a_2 b_3 \vec{i} + \\
&+ a_3 b_1 \vec{j} + (-a_3 b_2) \vec{i} + \vec{0} = \\
&- (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{S_1} \vec{i} + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{S_2} \vec{j} + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{S_3} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \textcircled{i} & \textcircled{j} & \textcircled{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

(21)

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Properties

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\alpha \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \alpha \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$$

Jacobi pas ~~est~~ associative mais

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$\vec{b} = \vec{c}$$

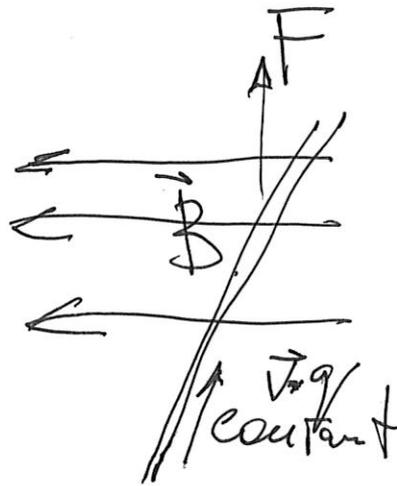
# Cross-product in physics

## Lois de Lorentz

$$F_{\text{mag}} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

charge vitesse

champ  
magnétique



id. de Lagrange

(23)

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2(\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{b})) =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

---

Produit vectoriel triple

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

dans le même plan que  $\vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

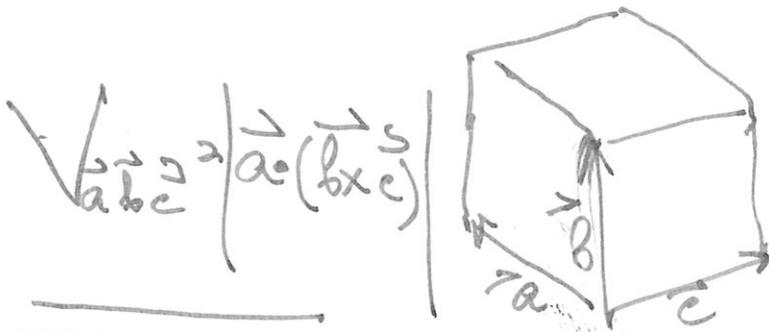
Sans preuve

### ③ Produit mixte

24

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{bmatrix}$$

interprétation géométrique :



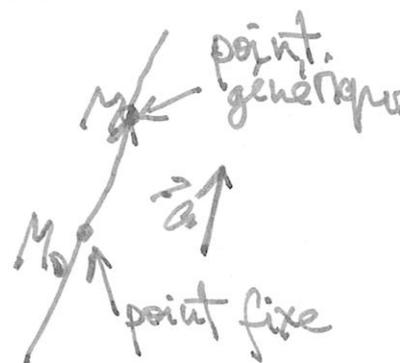
# Ligne droite (affine)

vecteur directeur

5  
25

$$\underline{\underline{M_0 M = t \vec{a} \quad t \in \mathbb{R}}}$$

$\vec{a}$  est parallèle à



tous vect.  $\parallel$  à droite donnée forment  $V^1$

$$\vec{AB} = \vec{M_0 A} - \vec{M_0 B} : A^1$$

Prop. 1

Soit  $N_0 \in (M_0 M)$ ,  $\vec{b} \parallel (M_0 M)$   $\vec{b} \neq \vec{0}$

$N_0, \vec{b}$  définissent une droite  $(N_0, \vec{b}) = (M_0, M)$

Prop. 2

$M_0, M_1 \notin P$  définissent une droite unique

Soit  $O \in P$

$$\vec{\Gamma}_0 = \vec{OM_0}$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{OM}$$

$$\underline{\underline{\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_0 + t \vec{R}}}$$

$$\vec{M_0 M} = \vec{\Gamma} - \vec{\Gamma}_0$$

équation vectorielle d'une ligne droite

Repres. "cartésienne":

26

$$M: (x_M, y_M)$$

$$\vec{a}: (x_a, y_a)$$

$$\vec{r} = (x, y)$$

$$\begin{cases} X = x_0 + t x_a \\ Y = y_0 + t y_a \end{cases}$$

$n=2$

$$\begin{cases} X - x_0 \\ Y - y_0 \end{cases} = 0$$

Sans vecteurs:  $ax + by + c = 0$

plan

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$x = x_0 + t x_a$$

$$y = y_0 + t y_a$$

$$z = z_0 + t z_a$$

$n=3$ ?

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Per  $M_0, M_1 \in P$

$$\vec{M_0 M_1} = \vec{r_1} - \vec{r_0} \quad \text{--- directeur}$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t (\vec{r_1} - \vec{r_0})$$

$$\vec{r} = (1-t) \vec{r_0} + t \vec{r_1}$$

Dans les coordonnées

dim = 3

$$X = (1-t)x_0 + tx_1$$

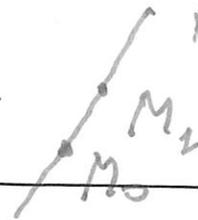
$$y = (1-t)y_0 + ty_1$$

$$z = (1-t)z_0 + tz_1$$

$M(x, y, z)$  - P. géométrique

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$



$h=2$

$$\begin{cases} X = x_0 + t m \\ y = y_0 + t l \end{cases}$$

$$\vec{a}: (m, l)$$

$$\underline{(x-x_0)m = (y-y_0)l}$$

si

~~$m \neq 0$~~   
 ~~$l \neq 0$~~

$$\left| \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} \right| \text{ equation canonique}$$

droite

$M_0 M_1$

$$l = x_1 - x_0, \quad m = y_1 - y_0$$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

$$\det \begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{bmatrix} = 0$$

Soit  $A = -m$ ,  $B = c$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

gen. eq.  
par  $M(x_0, y_0)$

$$C = -Ax_0 - By_0$$

$$Ax + By + C = 0$$

vect. directeur

$$\vec{u} = (B, -A)$$

vect. normal

$$\vec{n} = (A, B)$$

$$\vec{u} \perp \vec{n}, \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

Def:  $(M_0M_1) \parallel (M'_0M'_1)$  ~~iff~~ ~~ssi~~ ~~ssi~~ ~~ssi~~ sont collinéaires

$(M_0M_1): \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \vec{a} = (B, -A) \end{cases}$

$(M'_0M'_1): \begin{cases} A'x + B'y + C' = 0 \\ \vec{a}' = (B', -A') \end{cases}$

$(M_0M_1) \parallel (M'_0M'_1)$  ssi  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$  tq.  $A' = kA, B' = kB$

$\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$  - pas des points en commun

$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$  - coïncident

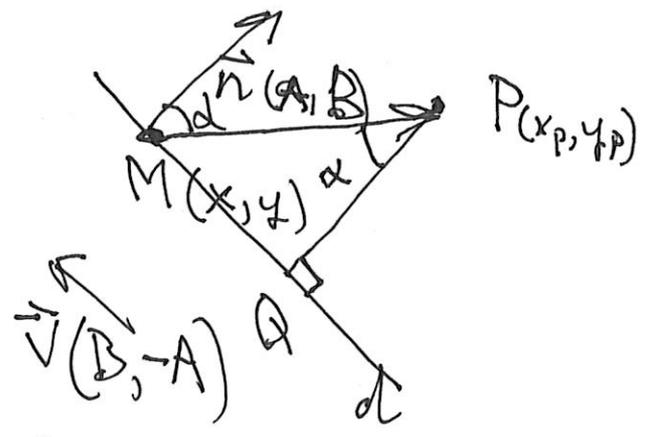
Soit  $Ax + By + C = 0$  une droite  $d$   
son vect. directeur est  $(B, -A) = \vec{v}$

$C = -Ax - By$   
 $\vec{n} = (A, B)$  est normal (perpendiculaire)  
à  $d$

$(\vec{v} \cdot \vec{n} = AB - AB = 0)$

Distance d'un point  $P(x_p, y_p)$   
à droite  $d = |PQ|$  où  $(PQ) \perp d$

$\vec{MP} = (x_p - x, y_p - y)$



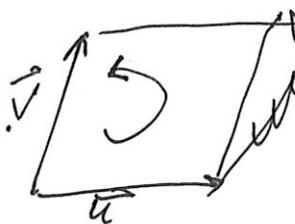
$h = |PQ| = \|\vec{MP}\| \cos \alpha =$

$= \frac{\|\vec{MP}\| \|\vec{n}\| \cos \alpha}{\|\vec{n}\|} = \frac{\vec{MP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{(x_p - x)A + (y_p - y)B}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$

$\Rightarrow \frac{Ax_p - Ax + By_p - By}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_p + By_p + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

# Plan (affine)

Bivecteur:  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  



$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u}' \wedge \vec{v}' \Leftrightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}' \times \vec{v}'\|$

Plan dans l'espace par point  $M_0$  et

$\vec{M_0M} \parallel \vec{u} \wedge \vec{v}$  bivecteur directeur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$\exists a, b \in \mathbb{R} \quad \vec{M_0M} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Prop. Soit  $N_0$  un point de plan  $P$ ,  
 $(\vec{u}' \wedge \vec{v}') \parallel P$ , alors  $\vec{N_0N} \parallel \vec{u}' \wedge \vec{v}'$   
définie le même plan  $P$

$\vec{\Gamma}_0 = \vec{OM}_0, \vec{\Gamma} = \vec{OM}$

$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_0 + a\vec{u} + b\vec{v}, a, b \in \mathbb{R}$

point générique | eq. paramétrique d'un plan

point fixe  $P_0$  par coordonnées:

$M(x, y, z)$   
 $M_0(x_0, y_0, z_0)$   
 $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$   
 $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$

$\left( \begin{array}{l} x = x_0 + ax_u + bx_v \\ y = y_0 + ay_u + by_v \\ z = z_0 + az_u + bz_v \end{array} \right)$

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \vec{r}-\vec{r}_0, \vec{u}, \vec{v}$   
sont co-planaires

$\Leftrightarrow M(x, y, z) \in P = M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{u} \wedge \vec{v}$

$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}$

$C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$

$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

$Ax + By + Cz + D = 0$

Soit  $M_1, M_2$  s.t.  $\vec{M_0M_1} \wedge \vec{M_0M_2}$   $M_1, M_2 \in P$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$   
 $M_2(x_2, y_2, z_2)$

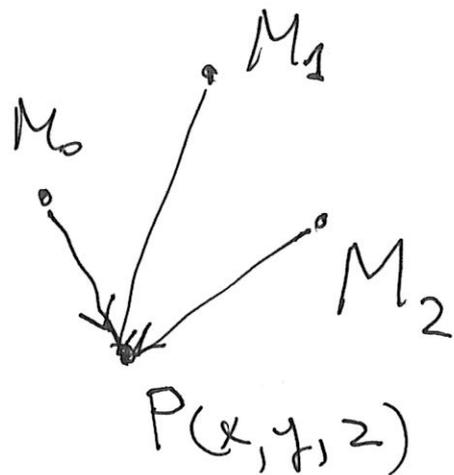
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

# Plan (continué)

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2)$$



$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

eq. de plan qui passe par points  $M_0, M_1, M_2$



$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Prop. Un plan est déterminé par son point  $M(x_0, y_0, z_0)$  et un vecteur normal  $\vec{n}$ :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = p \quad (= \vec{n} \cdot \vec{r}_0)$$

$$M_0: \vec{r}_0$$

$$M: \vec{r}$$

eq. cartés.  $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$   
de plan

33

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$M(x, y, z) \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

$M, M_0 \in \Pi$

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

Prop.  $\vec{v} \parallel \Pi$  ssi  $Ax_v + By_v + Cz_v = 0$

Distance d'un point à un plan

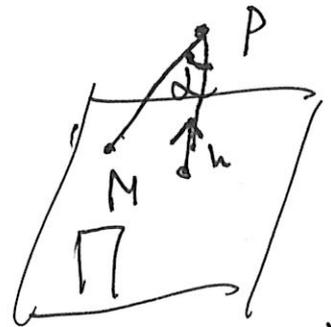
$P(x_p, y_p, z_p)$ ,  $\Pi$  comme avant

$M(x, y, z) \in \Pi$

$$\vec{PM} (x_p - x, y_p - y, z_p - z)$$

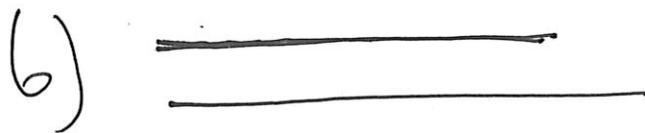
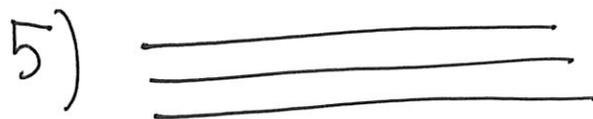
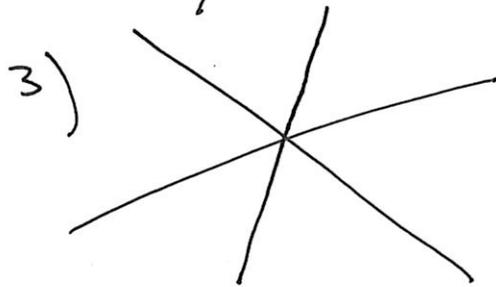
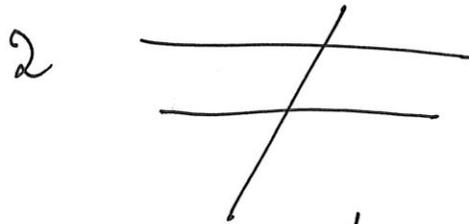
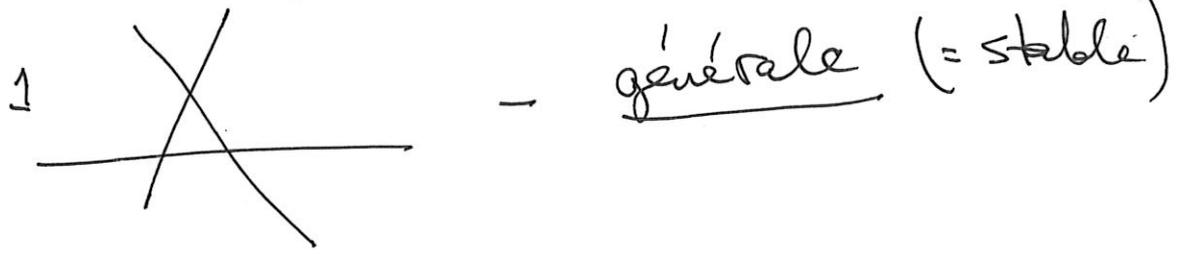
$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C), \quad \|\vec{u}\| = 1$$

$$d(P, M) = \left| \vec{PM} \cdot \vec{u} \right| = |\vec{PM}| \cdot \cos \alpha =$$
$$= \frac{Ax_p + By_p + Cz_p + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



$$(D = -(Ax + By + Cz))$$

Positions relatives de <sup>3</sup> droites sur ~~3~~ 34  
le plan



Combien positions relatives pour 3 plans dans l'espace ?

Réponse : 8

# Droites dans l'espace 3D

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} \quad - \text{pour tout dimensions!}$$

d=3

$$l: \begin{cases} x = x_0 + t x_a \\ y = y_0 + t y_a \\ z = z_0 + t z_a \end{cases}$$

$$l: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

droite l comme l'intersection de deux plans

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 2$$

Def.  
rang d'une matrice est le nombre max. de ses lignes (= ses colonnes) lin. indépendants.

$M \in l, \vec{a}$

Pour  $M_0$ : Posons  $Z=0$  à condition

Pour  $\vec{a}$ : méthode:  $M_1 \in l$   
 $\vec{a} = \vec{M_0 M_1}$

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(si non prenons une autre valeur)

me  
 (2) méthode

$$\begin{matrix} \vec{a} \parallel \Pi_1 \\ \vec{a} \parallel \Pi_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} A_1 x_a + B_1 y_a + C_1 z_a = 0 \\ A_2 x_a + B_2 y_a + C_2 z_a = 0 \end{cases}$$

$$x_a = \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix} ; \text{ solution possible}$$

$$y_a = - \begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix}$$

$$z_a = \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \\ A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \end{vmatrix}$$

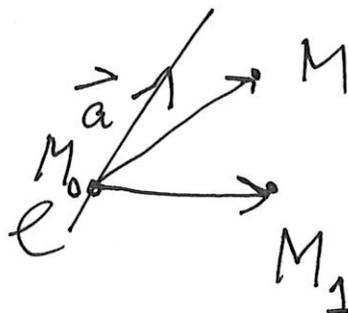
37

Prob. 1 Trouver un plan  $\Pi$  qui passe par droite  $l$  (comme avant) et ~~par~~ point  $M_1 \notin l$ ,

Solution

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$$



$$M(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a} \text{ sont } \underline{\text{coplanaires}}$$

d'où :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = 0 \quad \underline{\underline{(\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \vec{a})}}$$

Prob. 2 Trouver plan  $\Pi$  qui passe par droite  $l$  et qui est  $\parallel$  à droite  $l'$ , à condition  $l \nparallel l'$ ,  $l'$  donnée par  $M_1, \vec{a}_1(x'_a, y'_a, z'_a)$

# Solution

$$\Pi \parallel \vec{a}, \quad \Pi \parallel \vec{a}_1$$

$\overrightarrow{M_0M}$

$$|T| = \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_a & y_a & z_a \\ x'_a & y'_a & z'_a \end{vmatrix} = 0$$

$$S = \begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x'_a & y'_a & z'_a \end{bmatrix}$$

Positions relatives des droites  $e, e'$  dans l'espace

a) non coplanaire (skew lines)

$$\text{rang}(T) = 3$$



b) intersectent

$$\text{rang}(S) = 2, \quad \text{rang}(T) = 2$$



c) parallèles

$$\text{rang}(S) = 1, \quad \text{rang}(T) = 2$$

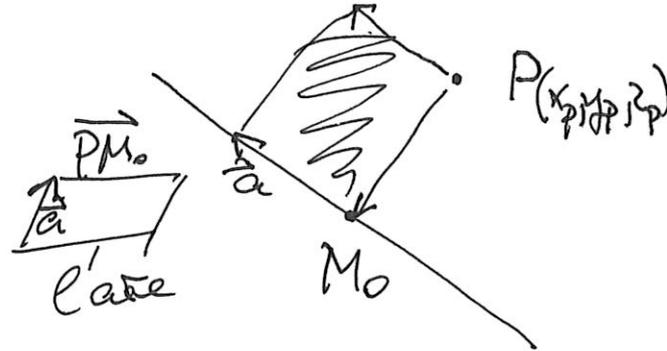


d) coïncident

$$\text{rang}(S) = 1, \quad \text{rang}(T) = 1$$

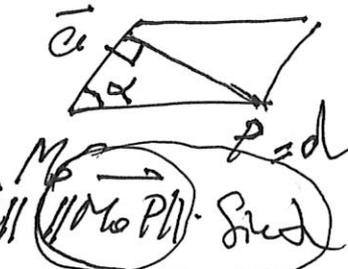


Distance d'un point P à droite l (39)  
 dans l'espace.

$$|(\vec{r}_P - \vec{r}_0) \times \vec{a}| = \text{aire}$$


$P(x_P, y_P, z_P)$

$$d = \frac{\text{aire}}{\|\vec{a}\|} =$$

$$= \frac{\|(\vec{r}_P - \vec{r}_0) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{S = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{M_0 P}\| \cdot \sin \alpha}{\|\vec{a}\|}$$


$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_P - x_0 & y_P - y_0 \\ x_a & y_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_P - x_0 & z_P - z_0 \\ x_a & z_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_P - y_0 & z_P - z_0 \\ y_a & z_a \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}$$

# Transformations géométriques

$$T: \underset{\text{espace}}{S} \xrightarrow{\sim} \underset{\text{le même espace}}{S}$$

T est inversible, i.e.

ex.

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\exists T^{-1} \text{ t.q. } T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathbb{1}$$

où  $\mathbb{1}$  est la trans. d'identité:

pour chaque point  $p \in S$

$$\mathbb{1}(p) = p$$

Transformations sont caractérisées par  
ses invariants, i.e., par les éléments  
conservés

## Types de transformations géométriques

<u>Transformation</u>	<u>Invariants</u>	<u>Exemples</u>
Déplacements (Mouvements)	Distances et angles <u>orientés</u>	Translations Rotations
Isométries	Distances et angles (non-orientés)	Déplacements, réflexions, anti-rotations
Similitudes	Rapports (ratios) des distances, <u>angles</u>	Isométries et homothéties
Trans. affines (affinités)	Parallélisme des droites	Similitudes et affinités

## Remarques :

2  
41

— Transformations géométriques sont  
composables

$$S \xrightarrow{T_2} S \xrightarrow{T_1} S$$

$$T_1 \circ T_2$$

(l'ordre algébrique)

(cf la composition des fonctions)

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$\downarrow +1$        $\downarrow ^2$

$$f(g(x)) = (x+1)^2$$

— Composition de transformations est

associative:  $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$

mais en général n'est pas commutative

$$T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$$

$$\text{Cf. } (x+1)^2 \neq x^2 + 1 = g(f(x))$$

rotation  $\circ$  translation  $\neq$  translation  $\circ$  rotation

## Remarque historique :

3  
42

L'idée d'étudier la géométrie à la base du concept de transformation a été proposée par Felix KLEIN en 1872 dans un article programmatique (manifesto) connu comme le "Programme d'Erlangen".

Transformations géométriques forment les structures algébriques de groupes (par rapport à l'opération de composition).

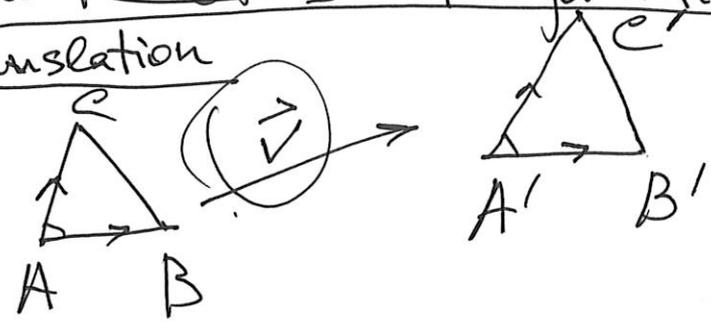
Chaque transformation géométrique est caractérisée par son propre group ~~de~~ algébrique.

---

Les invariants de transformations géométrique donnent les ~~en~~ concepts des espaces géométrique abstrait t.q. espace metric, espace affine, espace projectif, etc.

# Images géométriques de ~~translations~~ transformations

1. translation

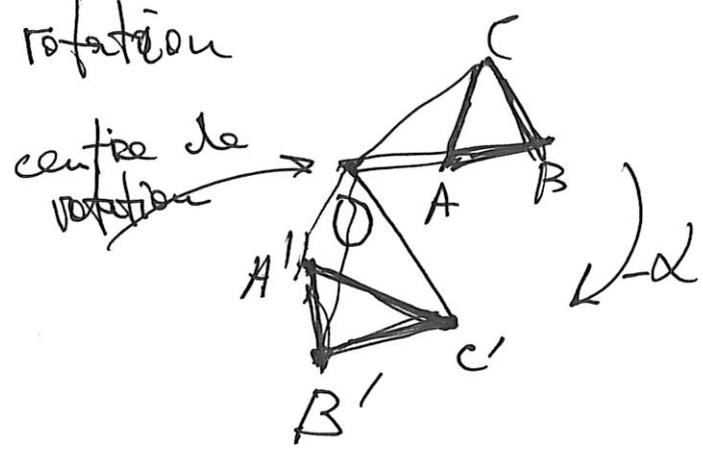


(+orientation)

$$\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

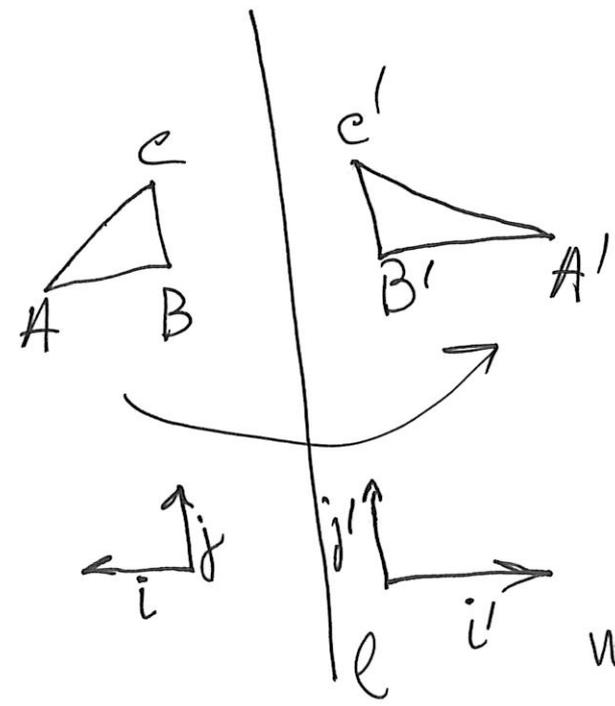
$$|AB| = |A'B'|$$

2. rotation



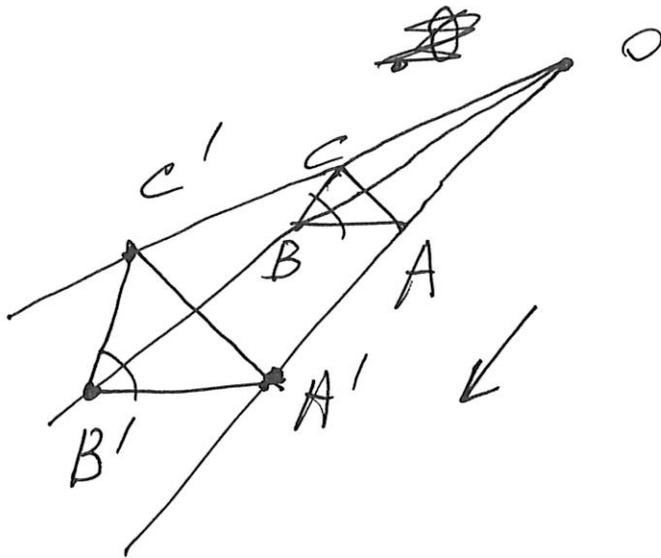
l'angle de rotation  $\alpha$

3. réflexion (symétrie axiale)



voit l'orientation!  
elle change!

# 4. Homothétie (scaling)

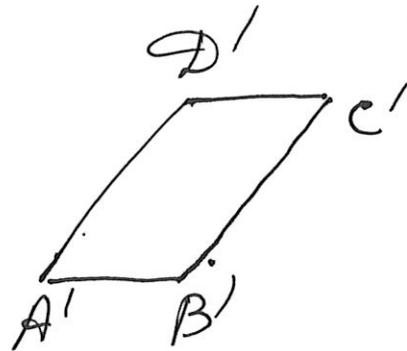
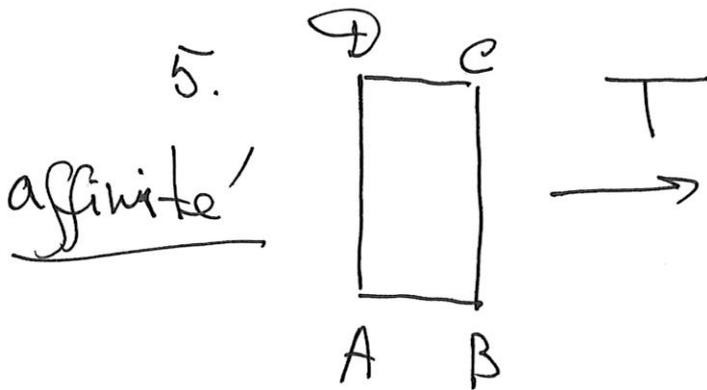


$k \in \mathbb{R}$

$|A'B'| = k |AB|$

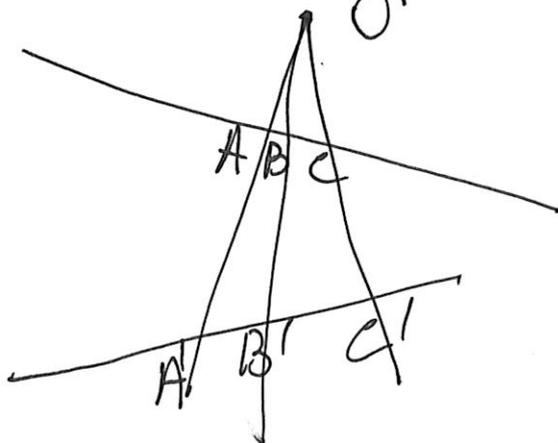
$|A'C'| = k |AC|$

$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$



$AD \parallel BC \Rightarrow T(AD) \parallel T(BC)$   
 $A'D' \parallel B'C'$

+ Projection = transformation projective  
 élément préservé: collinéarité des points



# Expressions analytiques

1. translation  $T$  in  $\mathbb{R}^2$  Rep.  $(0, \vec{i}, \vec{j})$   
 $\vec{u}(a, b)$

a) Cart.  $M(x, y)$

$$M'(x', y') = T(M)$$



$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

les distances  
 Prop.  $T$  preserve ~~les~~ distances ~~entre~~ les points

Preuve  $M_1(x_1, y_1) \xrightarrow{T} M'_1(x'_1, y'_1)$   
 $M_2(x_2, y_2) \xrightarrow{T} M'_2(x'_2, y'_2)$

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$x'_2 = x_2 + a \quad y'_1 = y_1 + b$$

$$x'_1 = x_1 + a \quad y'_2 = y_2 + b$$

$$x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1 \quad |M_1 M_2| = |M'_1 M'_2|$$

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$$

b) dans le plan complexe

$$M: x + iy = z \in \mathbb{C}, \quad \vec{v} \mapsto a + ib = t \in \mathbb{C}$$

$$M': x' + iy' = z'$$

$$z' = z + t$$

$$T(z) = z + t$$

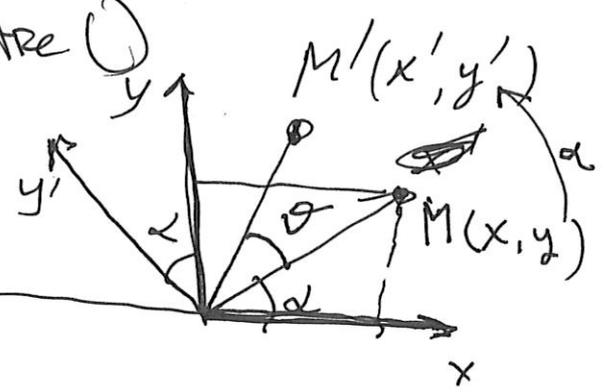
$$T^{-1}(z) = z - t$$

$t = \text{const}$

2.) rotation avec centre O

a) coord. polaires

$$M(x, y) \xrightarrow{R_{\theta}} M'(x', y')$$



$$R_{\theta} \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= |OM| \cos \alpha \\ y &= |OM| \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= |OM| \cos(\alpha + \theta) \\ y' &= |OM| \sin(\alpha + \theta) \end{aligned}$$

matrice de rotation

$$R_{\theta}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R_{\theta, -\theta}$$

b) dans le plan complexe

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -[id]$$

nombre conjugué  $i\theta \rightarrow \bar{t} = \cos \theta - i \sin \theta$

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$R_{\theta}^{-1}(z) = z \cdot \bar{t}$$

$$M(x, y) \mapsto x + iy = z \in \mathbb{C}$$

$$M(x', y') \mapsto x' + iy' = z' \in \mathbb{C}$$

$$R_{\theta}(z) = z \cdot t \quad t = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

(47) ~~8~~

# Rotation en $\mathbb{R}^2$ avec centre quelconque $C(x_c, y_c)$

$$R_{c,\alpha} = T_c \circ R_{0,\alpha} \circ T_c^{-1}$$

$$T_c: O \rightarrow C$$

$$T(x) = x + x_c$$

$$T(y) = y + y_c$$

$$T(\vec{OM}) = \vec{OM} + \vec{Oc}$$

$$R_{c,\alpha}(M) = T_c \circ R_{0,\alpha} \circ T_c^{-1}(M)$$

$$R_{c,\alpha}(x) = R_{0,\alpha}(M(x,y))$$

$$T_c^{-1}: C \rightarrow O$$

$$R_{c,\alpha} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \vec{Oc}$$

$$T_c^{-1}(x) = x - x_c$$

$$T_c^{-1}(y) = y - y_c$$

$$T_c^{-1}(\vec{OM}) = \vec{OM} - \vec{Oc}$$

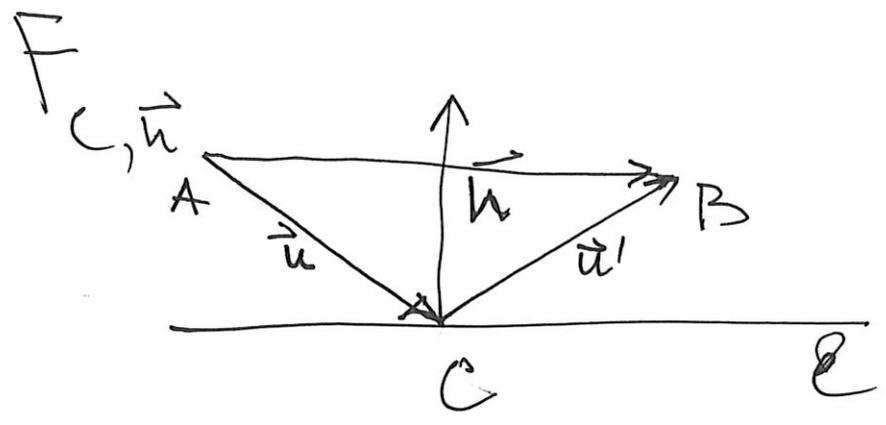
$$\vec{R} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{bmatrix}$$

Avec les complexes ( $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ )

$$R_{c,\alpha}(z) = (z - z_c)t + z_c = zt + z_c(1-t) \quad \text{où } t = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$$

Theorème  
 Une composition  
 d'une rotation  
 avec une  
 translation  
 est une  
 rotation ou  
 une translation

# Reflexions (en miroir)



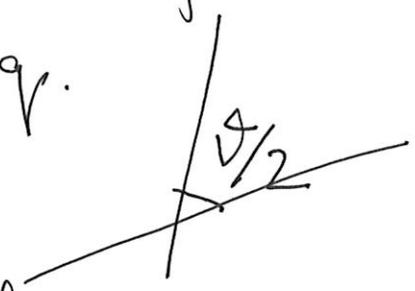
$$\vec{u}' = \vec{u} - 2 \text{Proj}_{\vec{n}} \vec{u} = \vec{u} - 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n}$$

$$\vec{u} = \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$$

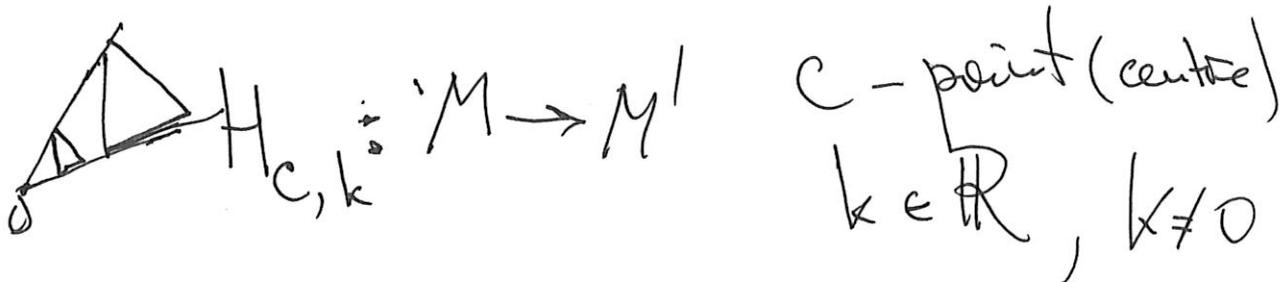
$$\vec{u}' = \vec{A'C} = \vec{OC} - \vec{OA'}$$

Theorème Chaque rotation  $R_{c,\alpha}$  est une composition de 2 reflexions par rapport de 2 droites t.q.

Theorème Chaque isometrie est une composition de 1, 2 ou 3 reflexions!



# Transformations homothétiques (~~similitude~~) (49)



$$\vec{cM}' = k \cdot \vec{cM}$$

$$\vec{OM}' = \vec{Oc} + k(\vec{OM} - \vec{Oc})$$

$$H_{c,m} \circ H_{c,k} = H_{c, \underline{mk}}$$

$$\begin{cases} x' = x_c + k(x - x_c) \\ y' = y_c + k(y - y_c) \end{cases}$$

Chaque homothétie est une similitude!

## Transformations affines

$$A: M \rightarrow M'$$
$$(x, y) \quad (x', y')$$

$$A^* = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$$

$$\vec{OM}' = A^* \vec{OM} + \vec{u}$$

$$x' = ax + by + e$$

~~$$y' = cx + dy + f$$~~

$$y' = dx + ey + f$$

$$\vec{u} = (e, f)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$