Géométrie 1AP, Test 1

7 novembre 2022

Exercice 1 (6 points):

Quatre particules A, B, C, D avec les coordonnées $A(1,0,1)$, $B(-1,1,0)$, $C(0,2,-1)$, $D(2,2,2)$ sont situées dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni par un système de co-ordonnées orthogonales. Les masses des particules sont les suivantes: $m_A = 2$, $m_B = 3$, $m_C = 2$, $m_D = 3$.

(a) (a) Trouvez les coordonnées du centre de masse P (le barycentre) du système des points $\{A, B, C, D\}$;

(b) (b) Quelle masse doit avoir la particule E avec les coordonnées $E(3,3,3)$ pour que le centre de masse du système élargi $\{A, B, C, D, E\}$ soit situé en point Q avec les coordonnées $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, où $x_Q = 2$?

(c) (c) Étant donné que $Q(2, y_Q, z_Q)$ est le centre de masse du système $\{A, B, C, D, E\}$, calculez les valeurs de y_Q et z_Q.

Solution :
(a) $\vec{OP} = \frac{m_A \cdot \vec{OA} + m_B \cdot \vec{OB} + m_C \cdot \vec{OC} + m_D \cdot \vec{OD}}{m_A + m_B + m_C + m_D}$

où O est l'origine du système de coordonnées. Calculons les 3 coordonnées de point P (rappel : les coordonnées d'un point quelconque M dans un système des coordonnées avec l'origine O sont aussi les coordonnées de vecteur $\vec{OM}$) :

$x_P = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2}{2+3+2+3} = \frac{5}{10} = 0,5$

$y_P = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2}{2+3+2+3} = \frac{13}{10} = 1,3$

$z_P = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2}{2+3+2+3} = \frac{6}{10} = 0,6$

Donc, $P(0,5; 1,3; 0,6)$

(b) Soit m_E la masse recherchée. De même,

$\vec{OQ} = \frac{m_A \cdot \vec{OA} + m_B \cdot \vec{OB} + m_C \cdot \vec{OC} + m_D \cdot \vec{OD} + m_E \cdot \vec{OE}}{m_A + m_B + m_C + m_D + m_E}$

$x_Q = 2 = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + m_E \cdot 3}{2+3+2+3+m_E} = \frac{5+3m_E}{10+m_E}$

d'où $5 + 3m_E = 20 + 2m_E$,
$m_E = 15$.

(c) De même,

$y_Q = \frac{5+3 \cdot 15}{10+15} = \frac{58}{25}$
$z_Q = \frac{6+3 \cdot 15}{10+15} = \frac{51}{25}$.

Exercice 2 (9 points):

Dans le plan muni du repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère le point $\Omega(-1, 1)$ et les vecteurs $\vec{I}(2, 1)$ et $\vec{J}(1, -2)$.

(a) Peut-on définir $R'(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ comme un nouveau repère? Ce repère est-il orthonormé?

(b) Le point $M(-3, 2)_R$ a les coordonnées (-3, 2) dans le repère R. Quelle sont les coordonnées du point M dans le repère R'?

(c) (Inversement.) Le point $N(1, 0)_{R'}$ a les coordonnées (1, 0) dans le repère R'. Quelle sont les coordonnées du point N dans le repère de départ R?

Solution :
(a) $R'(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ peut servir comme un repère ssi les vecteurs $\vec{I}, \vec{J}$ forment un système *libre*, i.e., ssi $\vec{I}, \vec{J}$ ne sont pas collinéaires. Les vecteurs $\vec{I}(2, 1), \vec{J}(1, -2)$ ne sont pas collinéaires ssi

$$det \begin{bmatrix} x_I & x_J \\ y_I & y_J \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_I & x_J \\ y_I & y_J \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = (-5) \neq 0$

Donc, $R'(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère.

Le repère $R'(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ est *orthonormal* ssi

- $\vec{I}, \vec{J}$ sont orthogonaux et
- $\|\vec{I}\| = \|\vec{J}\| = 1$

Les vecteurs $\vec{I}, \vec{J}$ sont orthogonaux ssi $\vec{I} \cdot \vec{J} = 0$.
$\vec{I} \cdot \vec{J} = x_I \cdot x_J + y_I \cdot y_J = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$. Donc, Les vecteurs $\vec{I}, \vec{J}$ sont orthogonaux.

Par contre, $\|\vec{I}\| = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \neq 1$.

Donc, repère $R'(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ n'est pas orthonormal.

(b) Le changement de repère $R \to R'$ se compose de 2 types de changements :

- changement de la base vectorielle : $(\vec{i}, \vec{j}) \to (\vec{I}, \vec{J})$
- changement du point d'origine $O \to \Omega$.

Les coordonnées du point M dans repère R sont les coordonnées du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$;
Les coordonnées du point M dans repère R' sont les coordonnées de vecteur $\Omega\vec{M}$ dans la base $B' = (\vec{I}, \vec{J})$

Remarquons que $\vec{OM} = \vec{O\Omega} + \Omega\vec{M}$, d'où $\Omega\vec{M} = \vec{OM} - \vec{O\Omega}$.

Calculons les coordonnées de $\Omega\vec{M}$ dans la base B (changement du point d'origine) :
$\vec{OM} = (-3, 2)_B; \vec{O\Omega} = (-1, 1)_B$ d'où
$\Omega\vec{M} = \vec{OM} - \vec{O\Omega} = (-3 - (-1), 2 - 1)_B = (-2, 1)_B$
Calculons les coordonnées de $\Omega\vec{M}$ dans la base B' (changement de la base vectorielle)

$$\Omega\vec{M} = \begin{bmatrix} x_{\Omega M} \\ y_{\Omega M} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} x_I & x_J \\ y_I & y_J \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x'_{\Omega M} \\ y'_{\Omega M} \end{bmatrix}_{B'} \text{ ou après la subsitution}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x'_{\Omega M} \\ y'_{\Omega M} \end{bmatrix} \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} -2 = 2 \cdot x'_{\Omega M} + 1 \cdot y'_{\Omega M} \\ 1 = 1 \cdot x'_{\Omega M} - 2 \cdot y'_{\Omega M} \end{cases}$$

d'où

$$x'_{\Omega M} = -\tfrac{3}{5}; \quad y'_{\Omega M} = -\tfrac{4}{5}$$

(Une <u>autre méthode</u> pour calculer les valeurs de $x'_{\Omega M}$ et de $y'_{\Omega M}$ est la suivante. Pour utiliser cette méthode il faut bien savoir calculer la matrice inverse!

$$\begin{bmatrix} x'_{\Omega M} \\ y'_{\Omega M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_I & x_J \\ y_I & y_J \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} x_{\Omega M} \\ y_{\Omega M} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_{\Omega M} \\ y'_{\Omega M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} x'_{\Omega M} = -2 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{3}{5} \\ y'_{\Omega M} = -2 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot -\frac{2}{5} = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

)

Donc, les coordonées du point M dans le repère R' (= les coordonées de vecteur $\vec{\Omega M}$ dans la base B') sont $(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$.

(Encore une <u>autre méthode</u> : au lieu de

- (i) calculer les coordonnées de $\vec{\Omega M}$ dans la base B : $\vec{\Omega M} = \vec{OM} - \vec{O\Omega}$) et puis
- (ii) re-calculer les coordonnées de $\vec{\Omega M}$ dans la nouvelle base B' (par une des deux méthodes présentées ci-dessus)

on peut également

- (i') calculer les coordonnées de $\vec{OM}$ dans la base B' : $\vec{OM} = (-\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})_{B'}$;
- (ii') calculer les coordonnées de $\vec{O\Omega}$ dans la base B' : $\vec{O\Omega} = (-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})_{B'}$;
- (iii') calculer les coordonnées de $\vec{\Omega M}$ dans la nouvelle base B' : $\vec{\Omega M} = \vec{OM} - \vec{O\Omega} = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})_{B'}$.

Le calcul de différence de deux vecteurs dans la même base étant toujours plus facile qu'un changement de base pour un vecteur donné, cette dernière méthode est moins efficace : elle exige plus de calculs.)

(c) Les coordonnées de point N dans le repère R sont les coordonnées de vecteur $\vec{ON}$ dans la base B. Remarquons que $\vec{ON} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega N}$.

$\vec{\Omega N} = (1, 0)_{B'}$
$\vec{O\Omega} = (-1, 1)_B$

Pour calculer les coordonnées de $\vec{ON}$ dans la base B il suffit de calculer les coordonnées de $\vec{\Omega N}$ dans la base B et puis calculer $\vec{ON} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega N}$ dans cette base.

$$\vec{\Omega N} = \begin{bmatrix} x_{\Omega N} \\ y_{\Omega N} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} x_I & x_J \\ y_I & y_J \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x'_{\Omega N} \\ y'_{\Omega N} \end{bmatrix}_{B'} \text{ ou après la subsitution}$$

$$\begin{bmatrix} x_{\Omega N} \\ y_{\Omega N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} x_{\Omega N} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2 \\ y_{\Omega N} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

Alors, $\vec{ON} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega N} = (-1, 1)_B + (2, 1)_B = (1, 2)_B$. Donc, les coordonnées de point N dans le repère de depart R sont (1, 2).

Exercice 3 (5 points):
Etant donnés trois vecteurs $\vec{u}(1, -2, 1)$, $\vec{v}(-1, 0, -2)$, $\vec{w}(2, -1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$ calculez

(a) l'aire du parallélogramme avec les côtés $\vec{u}, \vec{v}$

(b) le volume du parallélépipède avec les côtés $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Solution :
(a) Soit S l'aire de parallélogramme avec les côtés $\vec{u}, \vec{v}$. Alors $S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \vec{i} - det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \vec{j} + det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{k} =$$

$$= ((-2) \cdot (-2) - 0 \cdot 1)\vec{i} - (1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1))\vec{j} + (1 \cdot 0 - (-2) \cdot (-1))\vec{k} =$$
$$= 4\vec{i} + 1\vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|4\vec{i} + 1\vec{j} - 2\vec{k}\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}.$$

Donc, $S = \sqrt{21}$
(b) Soit V le volume de parallélépipède avec les côtés $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Alors, $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = det \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 7.$$

Alors, $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |7| = 7$