Géométrie 1AP, Test 2

Date : le 16 janvier 2023

Exercice 1 (6 points):
Trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites d, e dans $\mathbb{R}^3$ ou montrer que les deux droites n'intersectent pas. Les droites d, e sont données par ses équations paramétriques dans un repère standard :

$$\begin{cases} \vec{r_d} = \vec{a} + t\vec{u} \\ \vec{r_e} = \vec{b} + s\vec{v} \end{cases}$$

où $\vec{a}(2,0,1), \vec{b}(1,-2,2), \vec{u}(1,2,1), \vec{v}(-1,1,-2); s,t \in \mathbb{R}$.

Solution :
- l'équation paramétrique de la droite d en coordonnées :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \tag{1}$$

- l'équation paramétrique de la droite e en coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1 - s \\ y = -2 + s \\ z = 2 - 2s \end{cases} \tag{2}$$

D'où la condition d'intersection des droites d et e :

$$\begin{cases} 2 + t = 1 - s \\ 2t = -2 + s \\ 1 + t = 2 - 2s \end{cases} \tag{3}$$

- d'où $t = -s$ (la troisième ligne), $2 = 1$ (substitution dans la première ligne) : CONTRADICTION!

Donc, le système (3) n'a pas de solutions (= il n'existe pas de valeurs des variable s, t tels que le système (3) soit satisfait.).

Conclusion : les droites d, e ne se coupent pas ($=$ l'intersection des droites d et e est vide).

Exercice 2 (8 points):
Trouver une équation paramétrique de la ligne d'intersection de deux plans Π, Σ dans $\mathbb{R}^3$ ou montrer que les deux plans n'intersectent pas. Les plans sont donnés par ses équations paramétriques dans un repère standard :

$$\begin{cases} \vec{r_\Pi} = \vec{a} + t\vec{u} + s\vec{v} \\ \vec{r_\Sigma} = \vec{b} + t'\vec{w} + s'\vec{p} \end{cases}$$

où $\vec{a}(2,0,1), \vec{b}(1,-2,2), \vec{u}(1,2,1), \vec{v}(-1,1,-2), \vec{w}(0,-1,1), \vec{p}(-2,1,0); s, t, s', t' \in \mathbb{R}$.

Solution :
- Trouvons les vecteurs normals des plans Π, Σ:

$$\vec{n_\Pi} = \vec{u} \times \vec{u} = det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$-5 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} = (-5, 1, 3).$$

$$\vec{n_\Sigma} = \vec{w} \times \vec{p} = det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$-1 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k} = (-1, -2, -2).$$

Observons que les vecteurs $\vec{n_\Pi}, \vec{n_\Sigma}$ ne sont pas colinéaires. D'où les plans Π, Σ ne sont pas parallels. Donc l'intersections des Π, Σ n'est pas vide ; posons $(\Pi \cap \Sigma = l)$.
Le vecteur $\vec{g} = \vec{n_\Pi} \times \vec{n_\Sigma}$ est perpendiculair au plan des $\vec{n_\Pi}, \vec{n_\Sigma}$ et parallel à la ligne droite $l$de l'intersection des plans Π, Σ. Donc, $\vec{g}$ est un vecteur directeur de l.

$$\vec{g} = \vec{n_\Pi} \times \vec{n_\Sigma} = det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} =$$
$$4 \cdot \vec{i} - 13 \cdot \vec{j} + 11 \cdot \vec{k} = (4, -13, 11).$$

Pour obtenir l'équation paramétrique de la droite l il suffit de trouver un point d'intersection des plans Π, Σ. Pour cette raison retrouvons les équations paramétriques des Π, Σ en coordonnées et puis une condition de leur intersection :

- l'équation paramétrique du plan Π en coordonnées :

$$\begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 0 + 2t + s \\ z = 1 + t - 2s \end{cases} \tag{4}$$

- l'équation paramétrique du plan Σ en coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1 + 0 \cdot t' - 2s' \\ y = -2 - t' + s' \\ z = 2 + t' + 0 \cdot s' \end{cases} \tag{5}$$

D'où la condition d'intersection des plan Π et Σ :

$$\begin{cases} 2 + t - s = 1 - 2s' \\ 2t + s = -2 - t' + s' \\ 1 + t - 2s = 2 + t' \end{cases} \tag{6}$$

Posons $t = 0$, alors

$$\begin{cases} 2 - s = 1 - 2s' \\ s = -2 - t' + s' \\ 1 - 2s = 2 + t' \end{cases} \tag{7}$$

d'où $s = \frac{5}{3}, t' = -\frac{10}{3}, s' = \frac{1}{3}$; après la substitution des valeurs de t et de s dans le système (4) nous obtenons

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \\ y_0 = \frac{5}{3} \\ z_0 = -\frac{7}{3} \end{cases} \tag{8}$$

où point $M_0(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{3}) \in l$. D'où l'équation paramétrique de la droite l

$$\vec{r_M} = \vec{r_{M_0}} + t''g \tag{9}$$

ou en coordonnées

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + 4t'' \\ y = \frac{5}{3} - 13t'' \\ z_0 = -\frac{7}{3} + 11t'' \end{cases} \tag{10}$$

Les solutions alternatives:

(A)Avec la même méthode à partir du système (6) on peut trouver un autre point d'intersection des deux plans en prenant un autre valeur initial du paramètre t ou un valeur initial d'un autre aramètre parmi t, s, t', s'.

(B) Pour retrouver un vecteur directeur de la droite l il suffit trouver une deuxième point M_1 d'intersection des deux plan ; puis l'équation paramétrique de la droite l s'écrit dans la forme

$$\vec{r_M} = \vec{r_{M_0}} + t'' M_0 M_1. \tag{11}$$

(C) Avec les vecteurs normals $\vec{n_\Pi}, \vec{n_\Sigma}$ il est facile de retrouver les équations cartésiennes des plans Π, Σ :

$$(\Pi :) - 5x + y + 3z + 7 = 0$$

$$(\Sigma :)\ x + 2y + 2z - 1 = 0$$

et puis trouver un ou deux points d'intersection des plans Π, Σ à partir du système d'équations

$$\begin{cases} -5x + y + 3z + 7 = 0 \\ x + 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Exercice 3 (6 points):

Soient $R_{O,\frac{\pi}{4}}$ une rotation du plan $\mathbb{R}^2$ par l'angle $\frac{\pi}{4}$ (dans le sens positif) atour le point O d'origine de son repère standard et $T_{\vec{v}}$ une translation du plan par vecteur $\vec{v}(-1, 2)$.

(a) Calculer l'image du point $M(-2, 1)$ par la transformation composée $T_{\vec{v}} \circ R_{O,\frac{\pi}{4}}$ (d'abord la rotation, puis la translation) ;

(b) Calculer l'image du point $M(-2, 1)$ par la transformation composée $R_{O,\frac{\pi}{4}} \circ T_{\vec{v}}$ (d'abord la translation, puis la rotation)

Solution :

a : La matrice de rotation $R_{O,\frac{\pi}{4}}$: $\begin{bmatrix} Cos\frac{\pi}{4} & -Sin\frac{\pi}{4} \\ Cos\frac{\pi}{4} & Sin\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$\vec{OM} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, le vecteur de la translation $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Posons $\vec{OM'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où $M' = R_{O,\frac{\pi}{4}}(M)$. Alors

$$\vec{OM'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \vec{OM} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Posons $\vec{OM''} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ où $M'' = T_{\vec{v}}(M')$. Alors

$$\vec{OM''} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \vec{OM'} + \vec{v} = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \end{bmatrix}$$

Donc, $M'' = T_{\vec{v}} \circ R_{O,\frac{\pi}{4}}(M) = (-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2)$.

P : Posons $\vec{OM'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où $M' = T_{\vec{v}}(M)$. [ATTENTION : ici nous définissons M' et puis M'' à nouveau!] Alors

$$O\vec{M}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = O\vec{M} + \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Posons $O\vec{M}'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ où $M'' = R_{O,\frac{\pi}{4}}(M')$. Alors

$$O\vec{M}'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc, $M'' = R_{O,\frac{\pi}{4}} \circ T_{\vec{v}}(M) = (-3\sqrt{2}, 0)$.

La solution alternative: (avec les nombres complèxes)
On associe au vecteur $\vec{u}(x, y)$ le nombre complèxe $z = x + iy$ où $i = \sqrt{-1}$. Donc,
$O\vec{M} \rightsquigarrow m = -2 + i$
$\vec{v} \rightsquigarrow v = -1 + 2i$

La rotation du vercteur $O\vec{M}$ autour de l'origine du repère O sur le plan complèxe $\mathbb{C}$ par l'angle α s'agit de la multiplication $me^{i\alpha} = m(Cos\alpha + iSin\alpha)$.

a :

$$M' = R_{O,\frac{\pi}{4}}(M) \rightsquigarrow m(Cos\frac{\pi}{4} + iSin\frac{\pi}{4}) = (-2 + i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M'' = T_{\vec{v}}(M') = T_{\vec{v}} \circ R_{O,\frac{\pi}{4}}(M) \rightsquigarrow (-\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) + (-1 + 2i) = (-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1) + (i\frac{-\sqrt{2}}{2} + 2)$$

b :

$$M' = T_{\vec{v}}(M) \rightsquigarrow (-2 + i) + (-1 + 2i) = -3 + 3i$$

$$M'' = R_{O,\frac{\pi}{4}}(M') = R_{O,\frac{\pi}{4}} \circ T_{\vec{v}}(M) \rightsquigarrow (-3 + 3i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -3\sqrt{2}$$