Raison présente

De la très déraisonnable efficacité des mathématiques en physique

Richard Courant, Jeanne Brunschwig

Citer ce document / Cite this document :

Courant Richard, Brunschwig Jeanne. De la très déraisonnable efficacité des mathématiques en physique. In: Raison présente, n°84, 4e trimestre 1987. La nouvelle physique abolit-elle le réel ? pp. 49-63;

doi : https://doi.org/10.3406/raipr.1987.2633

https://www.persee.fr/doc/raipr_0033-9075_1987_num_84_1_2633

Fichier pdf généré le 15/03/2019

creative commons

De la très déraisonnable efficacité des mathématiques en physique

Richard COURANT

C'est l'histoire de deux anciens condisciples qui discutent de leurs métiers respectifs. L'un d'entre eux est statisticien et s'occupe de démographie. Il sort un tiré-à-part d'une de ses dernières publications pour le montrer à son copain. Comme toutes les études de démographie, celle-ci traite de distributions gaussiennes et le statisticien explique à son ancien camarade d'études la signification des divers symboles utilisés : ça, c'est la population réelle, ça la population moyenne etc. Cependant le copain n'a pas l'air convaincu ; il se demande même si l'autre n'est pas en train de le mener en bateau. « Comment fais-tu pour les déterminer ? » demande-t-il — « Et puis, qu'est-ce que c'est que ce symbole là ? » — « Mais c'est Π, tout simplement » répond le statisticien — « Π ? » — « Mais oui, le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre ! » — « Eh, ça va, arrête ; il ne faut pas me prendre pour plus bête que je ne suis : les statistiques sur la population n'ont sûrement rien à voir avec la circonférence d'un cercle ».

Certes, la réaction du copain nous paraît bien naïve. Pourtant, je dois dire que l'histoire, lorsqu'elle m'a été racontée pour la première fois, m'a causé quelqu'embarras. Car, il ne fait guère de doute : la réponse du copain est frappée au coin du bon sens. Mon embarras n'a fait que croître lorsqu'à quelques jours de là, quelqu'un m'a fait part de son étonnement devant le fait que nous, les physiciens, effectuons toujours une certaine sélection parmi les données lorsque nous décidons quelles sont celles qui vont être utilisées pour mettre à l'épreuve nos théories. « Sommes-nous sûrs que si nous bâtissions une théorie mettant l'accent sur les phénomènes dont nous ne tenons pas compte (et si nous ne tenions pas compte des phénomènes sur lesquels nous concentrons notre attention), nous n'obtiendrions pas au bout du compte une théorie physique radicalement différente de celle qui est la nôtre actuellement, et qui pourtant expliquerait tout autant de phénomènes que cette dernière ? » Il m'a

fallu admettre qu'effectivement rien ne nous prouve qu'une telle théorie n'existe pas.

Ces deux histoires illustrent parfaitement les deux principales considérations que je voudrais développer ici. A savoir, premièrement que les concepts mathématiques sont susceptibles d'être mis en correspondance avec les phénomènes les plus inattendus et que ce faisant ils autorisent une description de ces phénomènes étonnamment précise et exacte. Et deuxièmement, que précisément parce que nous ne connaissons pas les raisons de leur utilité, nous ne pouvons dire si une théorie formulée à l'aide de ces concepts mathématiques est la seule valable. En fait, nous sommes dans la même position qu'un homme auquel on a donné un trousseau de clefs, et qui, au fur et à mesure qu'il essaie d'ouvrir les portes qui se présentent à lui y arrive toujours — sinon du premier coup, du moins au deuxième essai. Il en vient à se demander si les clefs qu'on lui a données ne sont pas des passe-partout.

Je n'ai rien à dire sur ces deux points qui soit radicalement nouveau ; la plupart de mes collègues se sont sûrement fait d'une façon ou d'une autre, les mêmes réflexions que moi. Je me propose simplement d'envisager ces questions sous divers angles.

Le premier point concerne donc le fait que l'immense utilité des mathématiques pour les sciences de la nature a quelque chose de prodigieux et que ce mystère ne peut être expliqué de façon rationnelle. D'où mon second point : c'est précisément parce que l'utilité des concepts mathématiques reste un mystère que se pose la question de l'unicité de nos théories physiques.

Afin de bien faire comprendre l'importance déraisonnable que prennent les mathématiques en physique, il convient de répondre (en quelques mots) aux questions suivantes. D'abord : « Qu'est-ce que les mathématiques ? », ensuite : « Qu'est-ce que la physique ? » ; et puis : « Où les mathématiques interviennent-elles en physique ? » ; et enfin : « Pourquoi le succès des mathématiques en physique a-t-il de quoi déconcerter ? » Je ne m'attarderai pas sur le second point mentionné plus haut (l'unicité des théories physiques) ; il faudrait pour cela développer des travaux à la fois théoriques et expérimentaux qui n'ont pas encore été entrepris.

Qu'est-ce que les mathématiques ?

Quelqu'un a dit un jour que la philosophie consiste à abuser d'une terminologie qui a précisément été inventée pour cela [1]. Dans le même

(1) Extrait de W. Dubislav, « Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart » (Berlin, Junker und Dünnhaupt Verlag, 1932) p. 1.

ordre d'idées, je dirai que les mathématiques sont la science des opérations portant sur des concepts et des règles qui ont précisément été inventées pour cet usage. L'idée essentielle ici est celle d'« invention de concepts ». Les mathématiques seraient rapidement incapables de produire des théorèmes intéressants si ceux-ci ne devaient porter que sur des concepts déjà présents dans les axiomes. De plus, s'il est vrai que les concepts des mathématiques élémentaires, et plus particulièrement de la géométrie élémentaire, ont été formulés afin de permettre la description d'entités directement suggérées par le monde réel, il n'en va pas de même en ce qui concerne les concepts plus élaborés, en particulier ceux qui jouent un rôle crucial en physique. Ainsi, par exemple, les règles concernant les opérations portant sur des couples de nombres sont-elles construites de manière à donner les mêmes résultats que les opérations portant sur des fractions, lesquelles nous sont d'abord enseignées sans parler de « couples de nombres ». De même, les règles relatives aux opérations portant sur des suites, et donc sur des nombres irrationnels, appartiennent encore à la catégorie des règles qui ont été énoncées de manière à reproduire les règles relatives à des opérations portant sur des quantités déjà connues auparavant. Mais la plupart des concepts mathématiques un tant soit peu élaborés — les nombres complexes, les diverses algèbres, les opérateurs linéaires, les ensembles de Borel etc. (cette liste pourrait être prolongée à l'infini) — ont été construits afin de donner la possibilité au mathématicien de faire la preuve de son ingéniosité et de son sens de la beauté formelle.

De fait, la définition de ces concepts, liée à la perception du fait que d'intéressantes et ingénieuses considérations peuvent leur être appliquées, est déjà en soi la preuve de l'ingéniosité du mathématicien qui formule la définition. La profondeur de pensée que requiert la formulation des concepts mathématiques est justifiée a posteriori par l'habileté avec laquelle on en use. Le mathématicien de talent est celui qui exploite complètement et sans répit le domaine des raisonnements permis, et flirte avec l'interdit. Qu'il ne se trouve pas enlisé dans un fatras de contradictions du fait de son intrépidité constitue déjà en soi une sorte de miracle. Car il est difficile d'imaginer que notre faculté de raisonner ait pu être portée, par le seul fait de la sélection naturelle, à un tel degré de perfection. Quoi qu'il en soit, ce n'est pas de cela que je veux parler. Le point important, pour la suite de ce que je vais dire, c'est que le mathématicien ne pourrait formuler qu'un nombre très restreint de théorèmes intéressants s'il s'en tenait aux seuls concepts inclus dans les axiomes et que les concepts qu'il définit en dehors des axiomes le sont en vue d'autoriser des opérations logiques ingénieuses, lesquelles doivent satisfaire notre sens de la beauté, à la fois en tant qu'opérations et par la généralité et

la simplicité des résultats auxquels elles conduisent [2].

Les nombres complexes illustrent parfaitement ce que je viens de dire. Rien dans notre expérience ordinaire n'incite à introduire de telles quantités. Et de fait, si vous demandez à un mathématicien de justifier l'intérêt qu'il porte aux nombres complexes, il sera indigné, et invoquera la théorie des équations, les développements en série, et de façon générale, la théorie des fonctions analytiques, qui reposent entièrement sur l'introduction des complexes. Le mathématicien n'est pas prêt à renoncer à tous ces monuments qui témoignent de son génie [3].

Qu'est-ce que la physique ?

Ce qui intéresse le physicien, c'est de découvrir les lois de la nature inanimée. Afin de bien saisir cet énoncé, il est nécessaire d'analyser un peu plus le concept de « loi de la nature ».

Le monde qui nous entoure est d'une complexité déconcertante. Il est on ne peut plus clair qu'il ne nous est pas possible de prédire le futur. On dit souvent, en manière de plaisanterie, que seuls les optimistes croient que l'avenir est incertain : en l'occurrence il se trouve que ce sont les optimistes qui ont raison : le futur est imprévisible. Comme l'a fait remarquer Schrödinger, il est miraculeux que sous la complexité déconcertante du monde nous ayions pu découvrir certaines régularités concernant les événements. L'une de ces régularités, découverte par Galilée, s'énonce ainsi : deux pierres lâchées, au même instant et depuis une même hauteur, atteignent le sol au même instant. Les lois de la nature ont trait à de telles régularités. La régularité découverte par Galilée peut être considérée comme le prototype d'une large classe de régularités. Elle présente trois caractéristiques remarquables.

Première caractéristique : elle vaut non seulement à Pise, et à l'époque de Galilée, mais partout sur la Terre et en tout temps ; elle a toujours été vraie et le sera toujours. Cette propriété est ce que l'on appelle une propriété d'invariance et, comme j'ai eu l'occasion il y a quelque temps de le faire remarquer, sans des principes d'invariance semblables à ceux qui sont à l'œuvre dans la généralisation qui vient d'être opérée, la physique n'est tout simplement pas possible. Deuxième

---

(2) Cf. M. Polanyi, dans « Personal Knowledge » (Chicago, Univ. of Chicago Press, 1958). « Toute la difficulté provient de ce que nous refusons de voir que les mathématiques ne peuvent pas être définies si l'on n'en reconnaît pas la caractéristique essentielle, à savoir qu'elles sont intéressantes » p. 188.

(3) Voir les remarques de Hilbert concernant l'intuitionisme « qui cherche à briser et défigurer les mathématiques » in « Gesammte Werke » (Berlin, Springer, 1935), p. 188.

caractéristique remarquable : la régularité en question ne dépend pas de circonstances dont on aurait pu imaginer qu'elles aient une certaine influence. Elle vaut qu'il pleuve ou qu'il fasse beau, que l'on effectue l'expérience dans une pièce ou du haut de la Tour penchée de Pise, que ce soit un homme ou une femme qui lance les pierres. Elle vaut même si les deux pierres sont lâchées, au même instant et de la même hauteur, mais par deux personnes différentes. On pourrait multiplier à l'envie les circonstances qui n'ont aucune incidence sur la validité de la régularité découverte par Galilée. A cette indifférence aux conditions qui, a priori, pourraient avoir un rôle à jouer dans le phénomène observé, on a également donné le nom d'invariance. Cette invariance n'est cependant pas du même type que la précédente, dans la mesure où on ne peut pas l'exprimer sous forme de principe général. Déterminer quelles sont les circonstances qui influent sur un phénomène donné, et qu'elles sont celles qui n'ont aucune incidence, est l'une des premières tâches que se fixe un expérimentateur. Dans cette recherche, l'expérimentateur doit faire preuve d'adresse et d'ingéniosité, afin de déterminer quels sont les phénomènes qui dépendent d'un nombre limité de circonstances facilement reproductibles [4]. Dans le cas présent, et de ce point de vue, Galilée, en se limitant à des corps relativement lourds, a accompli un pas décisif. Là encore, il faut dire que s'il n'existait pas de phénomènes qui ne dépendent que d'un nombre restreint de circonstances facilement modifiables, la physique serait tout simplement impossible.

Ces deux caractéristiques, significatives du point de vue philosophique, ne sont pourtant pas celles qui ont le plus retenu l'attention de Galilée. Elles ne contiennent aucune loi de la nature. La loi de la nature énoncée par Galilée est la suivante : le temps mis par un objet pesant pour tomber d'une certaine hauteur ne dépend ni de la taille, ni de la forme, ni de la composition de l'objet en question. Transcrit dans le langage des « lois de Newton », cet énoncé devient : la force de gravitation agissant sur un corps qui tombe est proportionnelle à sa masse, mais indépendante de sa taille, de sa forme et de sa composition.

Si j'ai développé les considérations précédentes, c'est pour faire sentir que l'existence de « lois de la nature » n'a rien d'évident et qu'il est encore moins évident qu'il nous soit possible de les découvrir [5]. J'ai eu l'occasion, il y a quelque temps, de faire remarquer que les lois de la nature sont réparties en strates successives, chaque strate contenant des lois plus générales et plus larges que la précédente ; la découverte d'une strate

---

(4) Voir également C.S. PIERCE, *Essays in Philosophy of Science*, N.Y. The Liberal Art Press, 1957, p. 237.

(5) Voir aussi E. SCHRODINGER, « Qu'est-ce que la vie ? », Édition française, Coll. Epistémé, C. Bourgois (1986).

nouvelle correspond dès lors à une connaissance de plus en plus approfondie de la structure de l'univers. Il est important de noter, pour ce qui nous intéresse ici, que toutes ces lois de la nature, même si on les pousse à l'extrême de leurs conséquences, ne correspondent qu'à une fraction de la connaissance que nous avons du monde inanimé. En effet, les lois de la nature sont des énoncés conditionnels, permettant de prédire des événements futurs connaissant l'état présent des choses, étant entendu que certains aspects de l'état présent des choses (à vrai dire l'essentiel de ce qui détermine l'état présent des choses) n'ont aucune incidence sur les prédictions en question, (comme il a été expliqué dans la seconde partie de la discussion du théorème de Galilée un peu plus haut) [6].

Par ailleurs, les lois de la nature ne disent absolument rien sur certaines caractéristiques de l'état présent des choses, telles que l'existence de la Terre sur laquelle nous nous trouvons et sur laquelle les expériences de Galilée furent effectuées, ou telles que l'existence du Soleil et de tout ce qui nous entoure. C'est dans ce contexte que les lois de la nature permettent de prédire des événements futurs, mais seulement dans certaines circonstances exceptionnelles (quand toutes les caractéristiques appropriées de l'état des choses sont connues). C'est également dans ce contexte que la construction de machines dont on peut prévoir le fonctionnement représente l'exploit majeur accompli par les physiciens. Lors de la construction d'une machine, le physicien réalise une situation où tous les paramètres déterminants sont connus, ce qui lui permet de prévoir le comportement de la machine. Les radars et les centrales nucléaires sont deux exemples d'une telle réalisation.

J'ai voulu, à l'aide de cette discussion, insister sur le fait que les lois de la nature ne sont que des énoncés conditionnels qui n'établissent de lien qu'entre de très infimes parties de notre connaissance du monde. La mécanique classique, généralement citée comme le prototype de toute théorie physique, fournit les dérivées secondes des coordonnées de position de tous les corps, connaissant les positions etc. de ces corps. Elle ne fournit aucun renseignement quant à l'existence de ces corps, ni quant à leurs positions et vitesses à l'instant présent. Il convient de dire, pour être tout à fait exact, que l'on a découvert il y a environ trente ans, que ces énoncés conditionnels eux-mêmes ne sont pas complètement précis : ces énoncés conditionnels sont en fait des lois probabilistes qui ne nous permettent guère plus que de faire des paris intelligents quant à l'état futur du monde inanimé connaissant son état présent. Ces lois ne nous permettent d'énoncer aucun jugement catégorique, pas même des juge-

---

(6) L'énoncé donné ici du théorème de Galilée n'épuise pas l'ensemble des données expérimentales recueillies par Galilée sur ce sujet.

ments catégoriques conditionnels sur l'état présent du monde. Le caractère probabiliste des lois de la nature se manifeste aussi dans le cas des machines ; ceci a pu être vérifié, du moins dans le cas des réacteurs nucléaires en les faisant fonctionner à puissance réduite. Cela dit, dans ce qui suit je ferai abstraction des limitations imposées aux lois de la nature par leur caractère probabiliste [7].

Le role les mathématiques en physique.

Ces précisions concernant l'essence des mathématiques et de la physiques étant rappelées, nous sommes mieux à même d'envisager le rôle des mathématiques en physique.

Il va de soi que nous faisons appel aux mathématiques à tout instant de notre vie de physicien, pour évaluer les résultats prédits par les lois de la nature, pour appliquer leurs énoncés conditionnels aux conditions particulières qui sont celles auxquelles nous sommes confrontés ou qui nous intéressent. Pour que cela soit possible, il faut que les lois de la nature soient déjà exprimées dans le langage des mathématiques. Cependant, ce rôle — évaluer les conséquences de théories déjà existantes — n'est pas le plus important : les mathématiques, ou plus précisément les mathématiques appliquées, ne sont pas en cette circonstance maîtresses de la situation, elles n'ont qu'un rôle instrumental.

Or les mathématiques jouent en physique un rôle souverain. Cela est déjà implicite dans l'énoncé formulé plus haut, (à propos des mathématiques appliquées), selon lequel les lois de la nature doivent être formulées en langage mathématique si l'on veut pouvoir en faire un objet d'application des mathématiques. L'idée que les lois de la nature sont écrites dans le langage des mathématiques [8], énoncée il y a trois cents ans, est aujourd'hui plus vraie que jamais. Pour mesurer l'importance des concepts mathématiques lors de la formulation des lois de la physique, citons à titre d'exemple, le cas des axiomes propres à la théorie quantique qui furent formulés explicitement par le mathématicien von Neumann et implicitement par le physicien Dirac. Les deux concepts fondamentaux de la théorie quantique sont ceux d'état et d'observable. Les états sont des vecteurs d'un espace de Hilbert et les observables des opérateurs auto-adjoints agissant sur ces vecteurs. Les valeurs que livre l'observation sont alors les valeurs propres de ces opérateurs... mais je m'arrête, car ce n'est pas le lieu ici de dresser la liste des concepts mathématiques de la théorie des opérateurs linéaires.

---

(7) Voir Schrödinger.
(8) Idée dont l'énoncé est attribué à Galilée.

Il est vrai que la physique choisit certains concepts mathématiques plutôt que d'autres pour exprimer les lois de la nature, et il est sûr que seule une infime fraction des concepts mathématiques se trouve ainsi utilisée. Il est non moins vrai cependant que ces concepts qui ont été choisis ne l'ont pas été de façon arbitraire, à partir d'une liste des termes mathématiques. En général, et même dans la plupart des cas, ils ont été développés de façon indépendante par les physiciens qui se sont ensuite aperçus que les mathématiciens les avaient déjà inventés. Comme il a été dit plus haut, les concepts mathématiques sont sélectionnés en vertu non pas de leur simplicité conceptuelle (un concept tel celui d'ensemble de couples de nombres [9] est loin d'être ce que l'on imagine de plus simple), mais en vertu de leur capacité à produire des raisonnements brillants ou à être astucieusement manipulés. Or, justement, l'espace de Hilbert de la mécanique quantique est un espace sur le corps des complexes, muni d'un produit scalaire hermétique. On ne peut pas dire que l'ensemble des complexes soit a priori une chose simple et naturelle, ni que son introduction puisse être motivée par l'observation des phénomènes physiques.

L'utilisation des nombres complexes dans ce cas là n'est pas un truc de calcul, mais bien plutôt une nécessité imposée par la formulation des lois de la mécanique quantique. Il semble bien d'ailleurs, qu'outre les nombres complexes, les fonctions dites analytiques soient amenées à jouer un rôle crucial dans la formulation de la théorie quantique ; je pense, en particulier à la théorie des relations de dispersion actuellement en plein essor.

On ne peut s'empêcher de penser qu'il s'agit là d'un miracle, comparable, dans sa nature, à cet autre miracle qu'est la faculté de l'esprit humain à saisir les implications de milliers d'arguments sans sombrer dans la confusion, ou encore à ces deux autres miracles que sont l'existence de lois de la nature et la capacité de l'esprit humain à les découvrir. Einstein a émis, à propos de ce surgissement de concepts mathématiques au sein de la physique, une remarque qui est, à ma connaissance, ce qui ressemble le plus à une explication : les seules théories physiques qui nous soient acceptables sont celles qui sont belles. Ce qui revient à dire que les concepts mathématiques qui suscitent le plus de brillante astuce sont ceux qui ont une valeur esthétique. La remarque d'Einstein cependant, ne vaut que pour les théories que nous sommes prêts à accepter ; elle ne fait pas référence à la précision intrinsèque de ces théories. C'est de cette question que nous allons nous occuper maintenant.

---

(9) Wigner désigne ici l'ensemble des nombres complexes, sur lequel repose le concept d'espace de Hilbert, fondamental en théorie quantique (N d T).

On pourrait expliquer le fait que les physiciens utilisent les mathématiques pour la formulation des lois de la nature en disant que ce sont des êtres irresponsables, qui agissent à la légère. Selon cette interprétation, lorsqu'un physicien tombe sur une relation entre deux quantités qui ressemble à une relation mathématique connue, il en conclue immédiatement que la relation physique est effectivement celle existant en mathématiques — tout simplement parce qu'il ne connaît pas d'autres relations du même type. Je n'ai pas l'intention de réfuter ici cet argument : peut-être le physicien agit-il réellement à la légère. Il faut cependant remarquer que dans un nombre curieusement grand de cas, la formulation mathématique de l'expérience grossière effectuée par le physicien donne lieu à une description incroyablement précise d'une large classe de phénomènes. Ce qui prouve que le langage mathématique a d'autres vertus que celle d'être le seul langage que nous sachions parler, qu'il est réellement le bon langage, celui qui convient. Je vais en donner quelques exemples.

Mon premier exemple est celui, souvent mentionné, du mouvement des planètes. Les lois de la chute des corps se sont imposées à la suite d'un certain nombre d'expériences réalisées essentiellement en Italie. Ces expériences n'étaient pas très précises, au sens où nous concevons la précision aujourd'hui, d'une part à cause de l'effet de la résistance de l'air et d'autre part parce qu'il n'était pas possible à l'époque de mesurer de courts intervalles de temps. Néanmoins, les savants italiens avaient acquis, grâce à ces expériences, une certaine familiarité avec la manière dont les objets se déplacent dans l'atmosphère. C'est Newton qui établit un lien entre la loi de la chute des corps et le mouvement de la Lune. C'est lui qui remarqua que la trajectoire parabolique d'une pierre lancée à la surface de la Terre et la trajectoire circulaire de la Lune dans le ciel ne sont que des cas particuliers d'un même objet mathématique, et postula la loi de la gravitation universelle, en s'appuyant sur une coïncidence numérique encore très approximative à l'époque. Cette loi de la gravitation, du point de vue physique, répugnait aux contemporains et à Newton lui-même. Du point de vue empirique, elle n'était soustendue que par des observations éparses. Quant à sa formulation mathématique, elle faisait apparaître des dérivées secondes ; tous ceux qui ont essayé de tracer un cercle osculateur savent à quel point ce concept n'a rien d'immédiat. Or la loi de la gravitation que Newton avait établie à contre cœur et qu'il n'avait pu vérifier avec une précision supérieure à 4 % s'est avérée exacte à un centième de dix-millième et est devenu synonyme

d'exactitude, au point même que les physiciens n'ont osé que très récemment se poser la question des limites de cette exactitude. Cet exemple, cité mainte et mainte fois, est certainement le premier auquel on doive penser ; c'est un cas typique de loi formulée en termes qu'un mathématicien considère comme simples et qui s'est révélée exacte au-delà de toute espérance. J'en profite pour récapituler ce qui est ici ma thèse : primo, cette loi, dans la mesure où elle fait apparaître une dérivée seconde n'est simple que pour un mathématicien, certainement pas pour un étudiant que les mathématiques rebutent ni pour quiconque ne raisonne qu'avec son bon sens ; secondo, c'est une loi conditionnelle d'une portée limitée. Elle n'explique aucunement comment s'est formée la Terre qui attire les pierres de Galilée, ni la forme circulaire de l'orbite lunaire, ni la trajectoire des planètes autour du Soleil. L'explication de ces conditions initiales est laissée aux géologues et aux astronomes... qui d'ailleurs ont bien du fil à retordre.

Mon deuxième exemple porte sur la mécanique quantique ordinaire et élémentaire. Celle-ci est née de la remarque, effectuée par Max Born, selon laquelle les règles de calcul énoncées par Heisenberg étaient identiques formellement aux règles de calcul sur les matrices, établies longtemps auparavant par les mathématiciens. Born, Jordan et Heisenberg proposèrent alors de remplacer par des matrices les variables de position et de quantité de mouvement dans les équations de la mécanique classique. Ils appliquèrent les règles du calcul matriciel à un certain nombre de problèmes hautement simplifiés et obtinrent des résultats tout à fait satisfaisants. Mais rien ne permettait à l'époque d'assurer raisonnablement que cette mécanique des matrices garderait sa validité dans des cas plus réalistes. En fait, la première application de cette mécanique à un cas réaliste, celui de l'atome d'hydrogène, ne fut réalisée que plusieurs mois après, par Pauli. Les résultats obtenus étaient en accord avec ceux de l'expérience. Ce qui était évidemment très encourageant, mais pouvait néanmoins être prévisible dans la mesure où les règles de calcul élaborées par Heisenberg l'avaient été à partir de considérations portant sur l'ancienne théorie de l'atome d'hydrogène. Le miracle ne se produisit réellement que lorsque la mécanique matricielle (ou une forme de la théorie équivalente du point de vue mathématique) fut appliquée à des problèmes pour lesquels les règles de calcul de Heisenberg n'avaient plus aucun sens. Les règles de Heisenberg supposaient que les équations classiques du mouvement avaient des solutions présentant certaines propriétés de périodicité ; or les équations du mouvement pour les deux électrons de l'atome d'hélium (ou d'un nombre plus grand d'électrons dans le cas d'atomes plus lourds) n'ont tout simplement pas ces propriétés de périodicité ; si bien que les règles de calcul de Heisenberg ne s'appliquent pas dans ces cas là. Et pourtant, le calcul du niveau d'énergie le plus bas de

l'atome d'hélium, effectué il y a quelques mois par Kinoshita à Cornell et par Bazley au NBS, sont en accord avec les résultats expérimentaux à la précision des mesures, à savoir un dix millionième. Nul doute que nous n'ayions dans ce cas extrait des équations quelque chose que nous n'y avions pas mis.

Il en va de même dans le cas des « spectres complexes », c'est-à-dire dans le cas des spectres d'atomes lourds. Je me souviens à ce propos d'une conversation que j'ai eue avec Jordan au moment où l'on a calculé les premiers spectres d'atomes lourds. Jordan pensait que s'il était apparu un désaccord entre les règles déduites de la théorie quantique et celles établies de façon empirique, cela aurait été notre dernière occasion de modifier le cadre de la mécanique des matrices. Autrement dit, Jordan pensait que si un désaccord s'était manifesté dans la théorie de l'hélium, nous aurions été, du moins pendant un certain temps, sans ressources. Le formalisme mathématique de la théorie était si limpide, si peu modifiable, que si le miracle de l'hélium, dont je viens de parler il y a un instant, ne s'était pas produit, il y aurait eu véritablement crise. Certes la physique aurait surmonté cette crise d'une manière ou d'une autre. Mais il est évident que la physique telle que nous la pratiquons aujourd'hui a été rendue possible par une succession de miracles comparables à celui de l'atome d'hélium. Ce miracle de l'atome d'hélium est peut-être le plus étonnant de ceux qui ont jalonné l'histoire de la mécanique quantique, mais ce n'est pas le seul. A mon avis, le nombre de tels miracles n'est limité que par notre envie d'en solliciter d'autres. Néanmoins la mécanique quantique a connu de nombreux miracles tout aussi étonnants et c'est ce qui nous donne confiance dans ce que nous appelons sa justesse.

Mon dernier exemple est relatif à l'électrodynamique quantique ou théorie du « Lamb shift ». La théorie de Newton avait, de toute évidence quelque rapport avec l'expérience et l'expérience n'était pas étrangère à la formulation de la mécanique matricielle, même si c'était sous une forme sublimée et raffinée, via les prescriptions de Heisenberg. La théorie du « Lamb shift », en revanche, telle qu'elle a été conçue par Bethe et élaborée par Schwinger, se présente comme une théorie purement mathématique et l'expérience n'a contribué à sa découverte qu'en montrant qu'il existait un effet mesurable. L'accord entre théorie et expérience est supérieur à un millième [10].

Les trois exemples précédents, trois parmi une infinité d'autres, montrent assez à quel point la formulation des lois de la nature en termes

---

(10) Aujourd'hui, la précision de l'électrodynamique quantique est du même) ordre que celle qui consisterait à mesurer la distance Paris-New York à l'épaisseur d'un cheveu près (N d T).

de concepts mathématiques (choisis en vertu de leur facilité de manipulation) est adéquate et précise ; les lois de la nature sont, rappelons-le, d'une précision fantastique mais d'une portée limitée. Cette remarque est ce que je propose d'appeler « la loi empirique de l'épistémologie ». Elle est, conjointement avec les lois d'invariance, la base indispensable à toute théorie physique. Sans les lois d'invariance, les théories physiques n'auraient pas de fondement factuel ; si la loi empirique de l'épistémologie n'était pas vraie, nous n'aurions pas le courage et l'assurance qui sont nécessaires à l'exploration fructueuse des lois de la nature. R.G. Sachs avec qui je discutais de la loi empirique de l'épistémologie m'a fait remarquer qu'il s'agissait d'un véritable acte de foi, l'acte de foi du théoricien. Certes, mais notre acte de foi est justifié par de multiples exemples réels, bien plus nombreux que les trois que j'ai mentionnés.

L'utilité des théories physiques.

Le caractère empirique des considérations précédentes me semble évident. Il ne s'agit en aucune façon d'une nécessité de la raison. Inutile de dire que ces considérations ne s'appliquent qu'à une partie infime de notre connaissance du monde inanimé. Il serait absurde de prétendre que l'existence d'expressions mathématiques simples portant sur la dérivée seconde du déplacement est naturelle, alors même qu'il n'existe rien de semblable pour le déplacement lui-même, ni pour la vitesse. En conséquence, il est étonnant de constater avec quel empressement la loi empirique de l'épistémologie a été acceptée comme allant de soi. Cette loi est un cadeau miraculeux, tout aussi miraculeux que la capacité déjà mentionnée, de l'esprit humain à saisir les implications de milliers d'arguments sans sombrer dans l'erreur.

Toute loi empirique présente cette particularité inquétante que l'on n'en connaît pas les limitations. Nous venons de voir que les événements du monde qui nous entoure présentent des régularités qui peuvent être formulées à l'aide de concepts mathématiques, et ce avec une précision mystérieuse. A côté de cela, il y a certains aspects du monde à propos desquels nous ne pensons pas qu'il puisse exister de régularités exactes. C'est ce que nous appelons des conditions initiales. Se pose alors la question de savoir si les diverses régularités, c'est-à-dire les différentes lois de la nature qui vont être découvertes, fusionneront en une seule unité, ou si du moins elles tendront asymptotiquement vers une telle unification. Il se pourrait très bien qu'au contraire certaines lois de la nature n'aient jamais rien en commun. A l'heure actuelle par exemple, c'est le cas des lois de l'hérédité et de celles de la physique. Il pourrait même advenir que certaines lois de la nature aient des impli-

cations contradictoires les unes avec les autres, chaque loi étant suffisamment convaincante dans son propre domaine pour que nous ne voulions renoncer ni aux unes ni aux autres. Il nous faudrait alors nous résigner à cet état de choses, à moins que l'intérêt que nous avons à vouloir régler les conflits entre théories perde de son importance. Peut-être aurons-nous un jour perdu tout intérêt pour la « vérité ultime », pour une image du monde qui fonde en une seule entité cohérente les diverses représentations partielles que nous avons des divers aspects de la nature.

Il ne me paraît pas inutile d'illustrer ces diverses possibilités à l'aide d'un exemple. Nous possédons à l'heure actuelle en physique deux théories d'une puissance et d'un intérêt extrêmes : la théorie des phénomènes quantiques et la théorie de la relativité. Ces deux théories tirent leur origine de deux groupes de phénomènes exclusifs les uns des autres. La théorie de la relativité s'applique à des corps macroscopiques, tels que les étoiles. L'événement appelé « coïncidence », c'est-à-dire en dernier ressort la collision, est en théorie de la relativité l'événement de base élémentaire. Une coïncidence définit un point de l'espace-temps, ou du moins définirait un point de l'espace-temps si les particules qui entrent en collision étaient infiniment petites. La théorie quantique, elle, s'origine dans le domaine du microscopique, et de son point de vue, une coïncidence, ou collision, même si elle portait sur des particules sans extension spatiale, n'a rien d'élémentaire et n'est pas isolée dans l'espace-temps. Les deux théories opèrent sur des concepts mathématiques différents : un espace riemanien à quatre dimensions et un espace de Hilbert de dimension infinie, respectivement. Jusqu'à présent, les deux théories n'ont pu être unifiées, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de formulation mathématique dont ces deux théories soient des approximations. Tous les physiciens pensent que cette unification est possible en principe et qu'on finira bien par y arriver. Mais on peut aussi imaginer que l'on n'arrive jamais à la réaliser. Cet exemple illustre bien ce dont je parlais il y a un instant : il peut y avoir soit union soit conflit.

[...]

On peut objecter au point de vue développé ici le fait que certaines théories dont nous savons qu'elles sont fausses donnent des résultats d'une précision étonnante. Mais si nos connaissances étaient moins étendues, le groupe des phénomènes que ces théories « fausses » expliquent nous apparaîtrait comme étant la preuve de leur véracité. En fait, ces théories sont considérées comme fausses pour une unique raison : elles sont, en dernière analyse, incompatibles avec d'autres représentations plus générales ; d'ailleurs, plus on découvrira de « fausses » théories, plus on s'apercevra qu'elles sont en contradiction les unes avec les autres. De même, il se peut que les théories que nous considérons comme « vérifiées » par un nombre de preuves numériques qui nous paraît suffisant,

soient fausses parce qu'elles sont en contradiction avec une théorie plus générale que nous sommes dans l'incapacité de découvrir. Si tel était le cas, il faudrait s'attendre à ce qu'au fur et à mesure qu'augmente le nombre de nos théories, et que s'accroît le nombre de phénomènes dont elles rendent compte des contradictions entre théories fassent leur apparition. Cette éventualité qui va à l'encontre de l'acte de foi du théoricien nous apparaît comme un véritable cauchemar.

Laissez-moi vous citer quelques exemples de théories « fausses » dont la précision a de quoi inquiéter... étant donné qu'elles sont fausses. Avec un peu de bonne volonté, on peut récuser les preuves qu'apportent certains de ces exemples. Ainsi, le succès du modèle de Bohr de l'atome a-t-il toujours été limité ; il en va de même de la théorie des épicycles de Ptolémée ; notre point de vue actuel a l'avantage de nous permettre une description des phénomènes plus exacte que ces théories plus primitives. Il n'en va pas de même s'agissant de ce que l'on appelle la théorie des électrons libres, laquelle fournit une représentation on ne peut plus exacte de ce qui se passe dans un métal, un isolant ou un semi-conducteur. Cette théorie explique en particulier ce fait, jamais réellement bien expliqué par la « vraie théorie », à savoir que les isolants ont une résistance électrique dix fois plus grande que celle des métaux. De fait, il n'existe aucun résultat expérimental qui prouve que la résistance n'est pas infinie dans les conditions où la théorie des électrons libres prévoit une valeur infinie. Il n'en reste pas moins que nous sommes convaincus que la théorie des électrons libres n'est qu'une approximation grossière qui doit céder la place à une théorie plus exacte de la description des phénomènes relatifs à l'état solide.

Pourtant, de notre point de vue, la situation présentée par la théorie des électrons libres, si elle a de quoi irriter, ne laisse présager aucune difficulté que nous ne puissions surmonter. La théorie des électrons libres engendre quelques doutes quant à la confiance que nous pouvons avoir dans l'accord théorie-expérience comme indice de la validité d'une théorie. Mais de ce genre de doutes, nous avons l'habitude.

La situation serait beaucoup plus sombre et beaucoup plus troublante si l'on arrivait un jour à une théorie des phénomènes de la conscience ou de la biologie qui présente le même degré de cohérence et la même force de conviction que notre théorie actuelle du monde inanimé. Les lois de Mendel et les travaux sur les gènes qui en ont découlé sont peut-être l'embryon d'une telle théorie pour ce qui est de la biologie. Il n'est pas impensable que l'on trouve un raisonnement abstrait qui démontre qu'il y a conflit entre cette théorie et les principes de la physique. Ce raisonnement pourrait être suffisamment abstrait pour qu'il ne soit pas possible de trancher en faveur de l'une ou l'autre théorie par l'expérience. Si cela se produisait, notre foi en la réalité de nos concepts

serait sérieusement ébranlée. Nous serions frustrés dans la quête de ce que j'ai appelé « la vérité ultime ». Une telle situation n'a rien d'inconcevable, pour une raison simple, qui est que nous ne savons pas pourquoi nos théories marchent si bien. Leur précision, du coup, n'est pas une preuve de leur vérité et de leur cohérence. De fait, l'auteur de cet article pense qu'une situation comparable à celle qui vient d'être décrite ne peut manquer de se réaliser si l'on établit une confrontation entre les lois de l'hérédité et celles de la physique.

Je voudrais terminer par une note un peu plus optimiste. Le miracle de l'adéquation du langage des mathématiques à la formulation des lois de la physique est un don du ciel que nous ne comprenons pas et que nous ne méritons pas. Nous devons nous en réjouir et espérer que ce don continuera à se manifester dans l'avenir, et aussi espérer que, pour le meilleur et pour le pire, pour notre plaisir et aussi quelques fois à notre étonnement, sa manifestation s'étendra à des secteurs de plus en plus vastes de la connaissance.

(Repris de *The Skeptical enquirer*, organe du C.S.I.C.O.P. et traduit par Jeanne Brunswig).