

Почему аксиоматический метод в стиле Гильберта не годится для построения научных теорий?

Андрей Родин

Архив Анри Пуанкаре

14 января 2024 г.

Давид Гильберт, Основания геометрии (1899)

Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем точками и обозначаем A, B, C, \dots ; вещи второй системы мы называем прямыми и обозначаем a, b, c, \dots ; вещи третьей системы мы называем плоскостями и обозначаем $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ [..] Мы мыслим точки, прямые и плоскости в определенных соотношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как-то: “лежать”, “между”, “конгруэнтный”, “параллельный”, “непрерывный”. Точное и для математических целей полное описание этих соотношений достигается аксиомами геометрии. Эти аксиомы [..] выражают связанные друг с другом фундаментальные факты нашей [пространственной] интуиции (Anschauung)

Существует единственная теория, которая строится с нуля, а именно математическая логика. [...] Все другие теории предполагают по меньшей мере логику и как правило используют дополнительные предположения. Говоря более точно, минимальная теория, которую всякая математическая и вообще всякая научная теория принимает как данность - это обычная [то есть классическая] двузначная логика предикатов [по-видимому, первого порядка] дополненная микротеорией тождества.

Эта минимальная теория необходима и достаточна для того, чтобы анализировать понятия, формулы и рассуждения в науке и в математике — точнее говоря для того, чтобы анализировать их форму. Любое математическое или научное высказывание в формальном аспекте представляет собой формулу этого исчисления; всякое правильное рассуждение подпадает под схему вывода, которая определяется той же самой теорией.

[Ср. А. Тарский, Введение в логику и методологию дедуктивных наук, Москва 1948]

Ранние попытки применения аксиоматического метода в стиле Гильберта в науках:

Ранние попытки применения аксиоматического метода в стиле Гильберта в науках:

- ▶ Физика: Поль Дирак, Основания квантовой механики (1930), Дж. фон Нейман, Математические основы квантовой механики (1932). “Аксиомы Дирака-Неймана”, Ср. Principia Ньютона;

Ранние попытки применения аксиоматического метода в стиле Гильберта в науках:

- ▶ Физика: Поль Дирак, Основания квантовой механики (1930), Дж. фон Нейман, Математические основы квантовой механики (1932). “Аксиомы Дирака-Неймана”, Ср. Principia Ньютона;
- ▶ Биология: Джозеф Генри Вудгер: Аксиоматический метод в биологии (1937).
Халдейн: Книга Вудгера это попытка достичь в биологии того же, чего Рассел и Уайтхед достигли в математике.

Ранние попытки применения аксиоматического метода в стиле Гильберта в науках:

- ▶ Физика: Поль Дирак, Основания квантовой механики (1930), Дж. фон Нейман, Математические основы квантовой механики (1932). “Аксиомы Дирака-Неймана”, Ср. Principia Ньютона;
- ▶ Биология: Джозеф Генри Вудгер: Аксиоматический метод в биологии (1937).
Халдейн: Книга Вудгера это попытка достичь в биологии того же, чего Рассел и Уайтхед достигли в математике.
- ▶ Математика: Оствальд Веблен и Генри Уайтхед, Основания дифференциальной геометрии (1932)

Any mathematical science is a body of theorems deduced from a set of axioms. A geometry is a mathematical science. The question then arises why the name geometry is given to some mathematical sciences and not to others. It is likely that there is no definite answer to this question, but that a branch of mathematics is called a geometry because the name seems good, on emotional and traditional grounds, to a sufficient number of competent people.

Ошибочно думать, что фон Нейман [в книге 1932го года] действительно построил аксиоматические основания квантовой механики. В его изложении отсутствуют все характеристики современной аксиоматики: он не предъявляет своих предпосылок, не указывает основные понятия своей теории, не перечисляет основные предположения (аксиомы), не предлагает последовательной физической интерпретации своего формализма. В его изложении много противоречий и наивных утверждений философского характера. И тем не менее, по какой-то странной причине эта работа считается образцом физической аксиоматики.

Эйнштейн об аксиоматическом методе (Геометрия и опыт (1923))

Почему возможно такое превосходное соответствие математики с реальными предметами, если сама она является произведением только человеческой мысли, не связанной ни с каким опытом? Может ли человеческий разум без всякого опыта, путем только одного размышления понять свойства реальных вещей? [Ср. вопрос Вигнера о “непостижимой эффективности математики в естественных науках” (1960)]

Эйнштейн об аксиоматическом методе (Геометрия и опыт (1923), прод.

На мой взгляд, ответ на этот вопрос вкратце таков: если теоремы математики прилагаются к отражению реального мира, они не точны; они точны до тех пор, пока они не ссылаются на действительность. Полной ясности в этом вопросе, как мне кажется, можно достичь лишь с помощью того направления в математике, которое известно как аксиоматика.

Эйнштейн об аксиоматическом методе (Геометрия и опыт (1923), прод.

[...] Такому пониманию геометрии я придаю особое значение, поскольку без него я не смог бы установить теорию относительности. Именно, без нее было бы невозможно следующее соображение: в системе отсчета, которая вращается относительно некоторой инерциальной системы, законы расположения твердых тел не соответствуют правилам евклидовой геометрии вследствие лоренцова сокращения.

Роль логики в науке и математике сегодня (сто лет спустя)

Факт: Логические методы практически НЕ используются сегодня ни в естественных науках, ни в математике (за очень небольшими исключениями, например, в теории множеств или при компьютерной проверке доказательств).

Роль логики в науке и математике сегодня (сто лет спустя)

Факт: Логические методы практически НЕ используются сегодня ни в естественных науках, ни в математике (за очень небольшими исключениями, например, в теории множеств или при компьютерной проверке доказательств).

При этом логические методы и подходы широко используются в философии науки, в частности, при реконструкции научных теорий в целях их философского анализа.

Роль логики в науке и математике сегодня (сто лет спустя)

Факт: Логические методы практически НЕ используются сегодня ни в естественных науках, ни в математике (за очень небольшими исключениями, например, в теории множеств или при компьютерной проверке доказательств).

При этом логические методы и подходы широко используются в философии науки, в частности, при реконструкции научных теорий в целях их философского анализа.

Вопрос: Нужно ли эту ситуацию пытаться исправить?

Роль логики в науке и математике сегодня (сто лет спустя), прод.

- ▶ Pro: структура научных теорий и любых научных рассуждений (включая математические) должна быть логически корректной; критерии логической корректности должны быть предъявлены в явном виде, и логическая корректность любой научной теории должна быть проверена. Дополнительный аргумент практического характера: необходимость логических подходов при разработке средств компьютерного представления научных знаний.

Роль логики в науке и математике сегодня (сто лет спустя), прод.

- ▶ Pro: структура научных теорий и любых научных рассуждений (включая математические) должна быть логически корректной; критерии логической корректности должны быть предъявлены в явном виде, и логическая корректность любой научной теории должна быть проверена. Дополнительный аргумент практического характера: необходимость логических подходов при разработке средств компьютерного представления научных знаний.
- ▶ Contra: Логика не должна использоваться в качестве практического средства для построения научных теорий и контроля научных рассуждений; функция логики в науке должна быть ограничена философским анализом научных теорий. (Эта точка зрения идет в разрез с идеей сближения науки и ее философии).

Вопрос: Почему аксиоматический метод Гильберта в его исходной форме по-видимости плохо годится для построения научных и математических теорий (на практике)?

Вопрос: Почему аксиоматический метод Гильберта в его исходной форме по-видимости плохо годится для построения научных и математических теорий (на практике)?

Возможный ответ: Потому что представление о теории как о множестве высказываний неадекватно понятию традиционному для научной и математической практики понятию теории, которое и сегодня не потеряло свою актуальность.

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories)

Патрик Суппес, начиная с 1953: синтаксическое понятие (аксиоматической) теории как множества высказываний связанных отношением выводимости неадекватно понятию теории, используемому в науке. Научные теории это классы моделей, которые могут допускать различные аксиоматизации.

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories)

Патрик Суппес, начиная с 1953: синтаксическое понятие (аксиоматической) теории как множества высказываний связанных отношением выводимости неадекватно понятию теории, используемому в науке. Научные теории это классы моделей, которые могут допускать различные аксиоматизации.

Предложение Суппеса: использовать для реконструкции научных теорий семантический вариант аксиоматического метода ранее предложенный в математике Бурбаки и другими авторами.

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Суть семантического варианта аксиоматического метода (Бурбаки): формулировать аксиомы и теоремы теории содержательно, используя их каноническую интерпретацию в теории множеств.

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Суть семантического варианта аксиоматического метода (Бурбаки): формулировать аксиомы и теоремы теории содержательно, используя их каноническую интерпретацию в теории множеств.

Ср. определение алгебраической группы как множества с бинарной операцией, удовлетворяющей определенным формальным свойствам (аксиомам теории групп).

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Построенная таким образом теория групп - это теория теоретико-множественных моделей формальной теории групп, а не множество логических следствий аксиом этой формальной теории.

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Построенная таким образом теория групп - это теория теоретико-множественных моделей формальной теории групп, а не множество логических следствий аксиом этой формальной теории.

Однако, если фиксировать стандартную модель теории множеств, то такую семантическую теорию групп можно отождествить с множеством следствий формальной теории множеств. Именно в этом смысле в таких контекстах о теории множеств говорят как об основании теории групп и всей математики.

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Результаты:

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Результаты:

- ▶ Classical Particle Mechanics;

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Результаты:

- ▶ Classical Particle Mechanics;
- ▶ Индустрия “структуралистских” реконструкций научных теорий в истории и философии науки, которая не имела и не имеет никакого влияния на научную практику за пределами этой дисциплины.

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Возможные причины неэффективности семантического метода
Бурбаки-Суппеса в науке:

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Возможные причины неэффективности семантического метода
Бурбаки-Суппеса в науке:

- ▶ Бесконечные множества не имеют очевидной физической интерпретации и связи с измерительными процедурами;

Семантическая точка зрения на научные теории (semantic view aka non-statement view of theories), прод.

Возможные причины неэффективности семантического метода Бурбаки-Суппеса в науке:

- ▶ Бесконечные множества не имеют очевидной физической интерпретации и связи с измерительными процедурами;
- ▶ Семантический вариант аксиоматического метода не дает средств для построения сложных моделей из простых элементов (за пределами пропозициональной логики, где теоретико-множественная семантика избыточна).

Попытка пересмотра понятия аксиоматического метода: Конструктивный аксиоматический метод (Родин 2014, диссертация)

(на основе гомотопической теории типов). Некоторые свойства:

Попытка пересмотра понятия аксиоматического метода: Конструктивный аксиоматический метод (Родин 2014, диссертация)

- (на основе гомотопической теории типов). Некоторые свойства:
- ▶ Правила вместо аксиом (стиль Генцена);

Попытка пересмотра понятия аксиоматического метода: Конструктивный аксиоматический метод (Родин 2014, диссертация)

(на основе гомотопической теории типов). Некоторые свойства:

- ▶ Правила вместо аксиом (стиль Генцена);
- ▶ Проблемы (формальные конструкции) вместо теорем: совмещает черты генетического и аксиоматического методов в смысле Гильберта (как у Евклида): из всякой данной конструкции (сконструированного типа высшего порядка) можно выделить высказывание, о котором данная конструкция свидетельствует;

Попытка пересмотра понятия аксиоматического метода: Конструктивный аксиоматический метод (Родин 2014, диссертация)

(на основе гомотопической теории типов). Некоторые свойства:

- ▶ Правила вместо аксиом (стиль Генцена);
- ▶ Проблемы (формальные конструкции) вместо теорем: совмещает черты генетического и аксиоматического методов в смысле Гильберта (как у Евклида): из всякой данной конструкции (сконструированного типа высшего порядка) можно выделить высказывание, о котором данная конструкция свидетельствует;
- ▶ Поддерживает структуру логики обоснований: теоретические и экспериментальные методы оказываются полноценными элементами теорий;

Попытка пересмотра понятия аксиоматического метода: Конструктивный аксиоматический метод (Родин 2014, диссертация)

(на основе гомотопической теории типов). Некоторые свойства:

- ▶ Правила вместо аксиом (стиль Генцена);
- ▶ Проблемы (формальные конструкции) вместо теорем: совмещает черты генетического и аксиоматического методов в смысле Гильберта (как у Евклида): из всякой данной конструкции (сконструированного типа высшего порядка) можно выделить высказывание, о котором данная конструкция свидетельствует;
- ▶ Поддерживает структуру логики обоснований: теоретические и экспериментальные методы оказываются полноценными элементами теорий;
- ▶ Позволяет интерпретировать формальные конструкции как физические эксперименты (точнее, методы их реализации).

$$T \xrightarrow{m} M_T \xrightarrow{t} M_{TE} \xrightarrow{e} M_E$$

m - теоретическое моделирование

t - дизайн мысленного эксперимента

e - дизайн лабораторного эксперимента.

Пример: LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory): экспериментальное наблюдение гравитационных волн в 2015 предсказанных А. Эйнштейном в 1916 на основе ОТО.

Недостаток такого подхода и открытый вопрос

в том же, в чем и его основное достоинство: конструктивный (bottom-up, генетический) характер. Какой метод позволит более адекватно и более эффективно использовать неконструктивный (top-down) аспект аксиоматического подхода?

СПАСИБО!

<http://philomatica.org>