L'analyse à plusieurs variables

1) Domaine et co-domaine d'une fonction

Ex. $f(x,y) = 4x^2 + y^2$; $f(x,y) = y^2 - x^2$

Voir JSMP p. 679

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (pense $n=2$)

$\cup$

D

(a,b) : int fermé

$]a,b[$: int ouvert

Ex : $\mathbb{R}$, $\emptyset$

D ouvert : un voisinage de chaque point contient un autre point de D

∂D (frontière de D) un voisinage de ∂D contient un point de D et un point qui n'est pas en D

$D \cup \partial D$: la fermeture de D

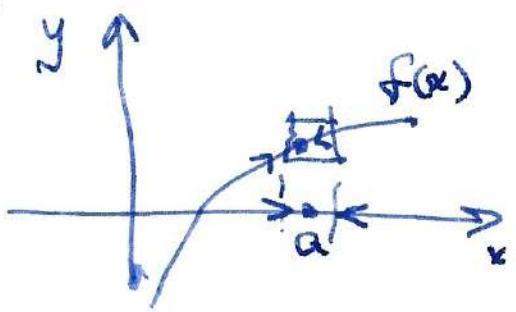
Fonction continue (le rôle de la cont. dans la modélisation)

Déf. $n=1$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \to D$ ← ouvert

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ si $|x-a| < \delta$, alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$

$\forall x \in D$



Contre-exemples

a) $y = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in D \\ 0 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$

fonction δ de Dirac

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cas

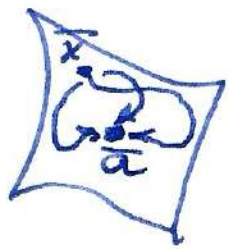
$\overline{X} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ cortège, vecteur

$\overline{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

Def. $\lim_{\overline{X} \to \overline{a}} f(\overline{X}) = f(\overline{a})$ pour tout $\overline{a} \in D$

$\overline{X} \to \overline{a} \iff \|\overline{X} - \overline{a}\| \to 0$

distance



Fonction diff., une dérivée

$n=1$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

pour tout $x_0 \in D_f$

Th. f est diff $\Rightarrow$ f est continue

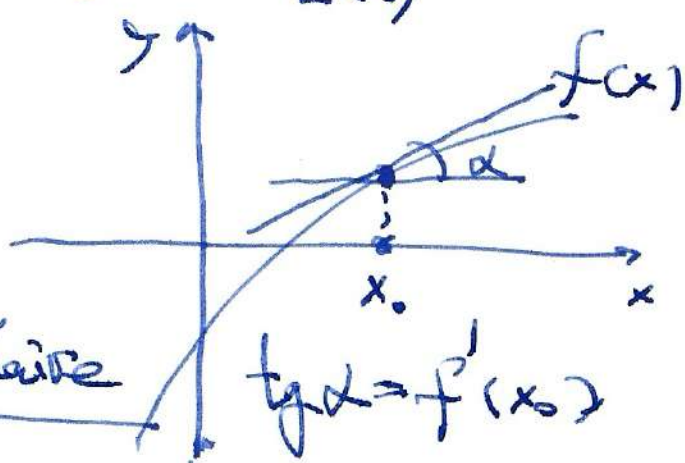
(Mais pas réciproquement : ~~contre~~ contre-exemple $f(x) = |x|$

Sens géométrique: tangente $L(x)$

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$

approximation linéaire



Sens ~~géométrique~~ physique: vitesse

$n=2 \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

une droite tangente $\longrightarrow$ un plan tangent

1 paramètre $f(x_0)$ — 2 paramètres

$$L(x,y) = L(x_0,y_0) + h_1(x-x_0) + h_2(y-y_0)$$

$\langle h_1, h_2, -1 \rangle = \vec{n}$ - normal

$f: D \to \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}^n$

Def. f est diff. ssi $\exists L \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \dfrac{f(\bar{x}) - L(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}$

approximation linéaire

Th. Si $L(\bar{x})$ existe, alors elle est unique

$$L(\bar{x}) = L(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - x_{i0})$$

Dérivées partielles

$n=2 \quad f(x,y)$

$$f'_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

$$f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

Cas $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f'_{x_i}(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = \frac{d}{dx_i} f(x_{10}, \dots, x_i, \dots, x_{n0}) \Big|_{x_i = x_{i0}}$$

ex. $f(x,y,z) = x^3 - y^2 z$, $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle = \langle 1, 2, 3 \rangle$

Dérivées part d'ordres sup.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \to \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \to \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \to \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Th. (Clairaut 1740) :

Si $f''_{x_i x_j}$ et $f''_{x_j x_i}$ sont continues

alors $f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$ pour tout $\bar{x}$

Fonction primitive

$n=1$ $f'(x) = G(x) \Rightarrow f(x) = \int G(x)\,dx + \text{const}$

n $f'_{x_i}(\bar{x}) = G_i(\bar{x})$ pour $1 \le i \le n$

comment retrouver la primitive $f(\bar{x})$?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial G_i(\bar{x})}{\partial x_j}$$

$\Vert$ Les condition d'integrabilité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}$$

pour tout $1 \le i, j \le n$

ex. $f_x'(x,y) = 3x^2y$
$f(x,y) = x^3y + y^2 + c$

L'existence des dérivées partielles
VS
la différentiabilité d'une f à plusieurs variables (voir $L(\bar{x})$, approximation linéaire)

L'existence des der. part n'implique pas la diff. !!

Th. Si $f(\bar{x})$ définie sur $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a toutes ses der. part qui sont continues alors $f(\bar{x})$ est diff. sur D !

$$L(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i - x_{i0})$$

Remarque : Cette condition est suffisante mais elle n'est pas nécessaire.

Th. Si $f(\bar{x})$ est diff. à $\bar{x}_0$ alors elle est continue à $\bar{x}_0$ et elle possède toutes ses dér. partielles

Intégration multiple

$n=1$ $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$ somme rimannienne

f est continue sauf un nombre fini des points

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $\quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$

Sens géométrique: l'aire sous le graph de f

Sens physique distance $\int_0^t = \int_0^t v(t)dt$

Int. de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$ formule

où $F'(x) = f(x)$

intuition de ne suffit pas!

intégrale impropre : $a, b = \infty$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Contre-exemple

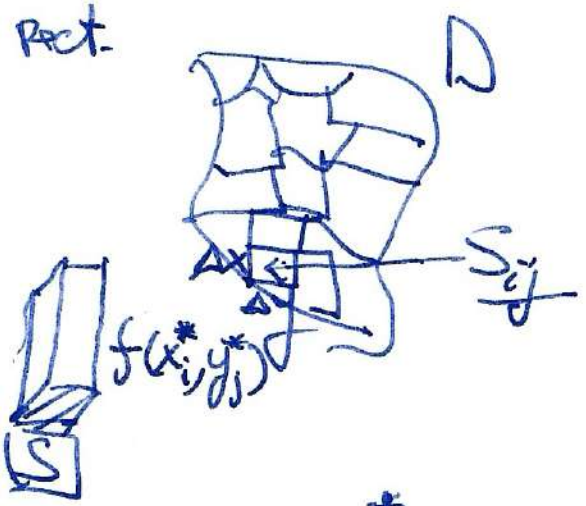
$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_1^\infty = \infty$ $\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$ $\quad \delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$

distributions

Sens géométrique: volume sous une surface | partition Rect.

$n=2$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dS$$



$$= \lim_{\max(\Delta x_i \Delta y_j)\to 0} \sum_i \sum_j f(x_i^*, y_j^*) \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta S_{ij}}$$

$x_i^* \in \Delta x_i$

$y_j^* \in \Delta y_j$

Contre-exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x,y \text{ sont rationels} \\ 2 & \text{si } x,y \text{ sont irrationels} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$n=3$

$$\iiint_E f\,dV = \lim \sum_{ijk} f(\overline{x_i})\,\Delta V_{ijk}$$

$$f(\overline{x}) = 1$$

$$\iiint_E dV = V(E) \quad \text{volume}$$

Th. Si f est continue sur $E = [a,b]\times[c,d]\times[r,q]$ alors

$$\iiint_E f\,dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^q f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

ordre !