Exercices MIA1 2024

Analyse de plusieurs variables

1) Soit $V(x,y)$ un potentiel éléctrique sur un plan. Représentez quelques lignes où le potentiel est constant (courbes equipotentielles) si

$$V(x,y) = \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

(où c, r sont des constantes positives)

2) Est-ce que la limite existe ?

2.1 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \ ?$$

Réponse : Non

Preuve : $\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\text{lim selon l'axe } OX} \neq \underset{\overset{\shortparallel}{-1}}{\text{lim selon } OY}$

2.2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Réponse : Non

Preuve : $\underset{\substack{\| \\ 0}}{\lim \text{ selon } \overset{OY}{OX}} \neq \underset{\substack{\| \\ 1/2}}{\lim \text{ selon } x=y}$

2.3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

Réponse : Oui $=0$

Preuve : $x^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 3|y|$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{3|y|}_{\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|} = 0$

$\lim \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

(La lemme de deux flics)

3.) Est-ce que la fonction est continue en $(0,0)$?

3.1. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Rép. Non (non définie en $(0,0)$)

3.2 $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Rép. Non ($\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ n'existe pas) voir 2.2.

3.3. $h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Rép Oui (voir 2.3)

4) Est-ce que la fonction est différentiable en $(0,0)$?

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Rép. Non car elle n'est pas continue en $(0,0)$
(Mais ses dérivée partielles existent en $(0,0)$!)

5) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

Rép.

$$-\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}$$

6) Calculer $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z}$

$$f(x,y,z) = \sin(3x+yz)$$

Rép. $-9\cos(3x+yz) + 9yz\sin(3x+yz)$

7) Montrer que $u(x,y) = e^x \sin y$ est une solution d'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

8) Montrer que $V(x,t) = \sin(x-at)$ est une solution d'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

9) Vérifier le théorème de Clairaut $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$ avec

9.1 $f(x,y) = x\sin(x+2y)$; 9.2 $f(x,y) = x^4y^3 - 2xy^5$

10) Calcular

10.1 $\iint_R 3\, dA$ où $R=\left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} x\in[-2;2] \\ y\in[1;6] \end{array}\right\}$

10.2 $\iint_R (5-x)\,dA$, $R=\left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} x\in[0;5] \\ y\in[0;3] \end{array}\right\}$

10.3 $\iint_R (x-3y^2)\,dA$, $R=\left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} x\in[0,2] \\ y\in[1,2] \end{array}\right\}$

10.4 $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$, $D=\left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} x\in[0,2] \\ y\in[0,\frac{x}{2}] \end{array}\right\}$