Géométrie analytique

Représentation d'un objet géométique (dans $\mathbb{R}^n$) dans un syst. des coordonnées Cartesiennes

- comme un graphe d'une fonction;
- par une équation ou un système des équations

$\mathbb{R}^2$

ex: $ax + by + c = 0$

$F(x,y)=0$ $\quad x^2+y^2=R^2$

$\mathbb{R}^3$

une droite $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

repr. parametrique

ex:

$\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x = x_0 + t x_a \\ y = y_0 + t y_a \\ z = z_0 + t z_a \end{cases}$

$t \in \mathbb{R}$

droite

$s, t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = x_0 + s x_a + t x_b \\ y = y_0 + s y_a + t y_b \\ z = z_0 + s z_a + t z_b \end{cases}$

plan

Calcul vectoriel

Vecteur comme un objet <u>dans</u> E^n

ou

Vecteur comme un élément de E^n

- ens. $V \ni \bar{u}, \bar{v}$ (espace vectoriel)
- addition $\bar{u} + \bar{v}$ (ass, comm., $\vec{0}$, $-\bar{v}$)
- multiplication par un nombre réel (scalair)

(distr $\times 2$, $1\bar{u} = \bar{u}$)

Modèles: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

Base: $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$ t.q. (1) chaque $\bar{v} \in V$ est une combinison lin. de $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k$

(2) $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$ sont lin. independents (libres)

Espace <u>affine</u>:

- Espace vect. V de dim. finie
- Ens des points P
- $P \times P \longrightarrow V$ $\quad \langle A, B \rangle \to \vec{v}$
- pour chaque $A \in P$, $\bar{v} \in V$ il exists un seul $B \in P$ t.q. $\bar{v} = \overline{AB}$

- pour tout $A, B, C \in P$ $\quad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Repère $(O, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — point

dans un esp. affine — $\underbrace{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n}_{\text{une base vect.}}$

$O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

Point $P(x, y, z) \longrightarrow \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \langle x, y, z \rangle$

droite: $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t\vec{a}$ — point fixe ($\bar{r}_0$), vect. dir. ($\vec{a}$)

plan $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + s\vec{u} + t\bar{v}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

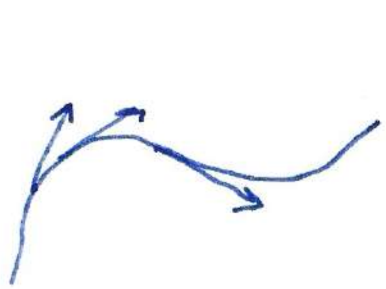
une ligne courbe: (param.)

$$\bar{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$$

une surface courbe

$$\bar{r}(s,t) = \langle x(s,t), y(s,t), z(s,t) \rangle = x(s,t)\vec{i} + y(s,t)\vec{j} + z(s,t)\bar{k}$$

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \bar{r}'(t) = \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle$$

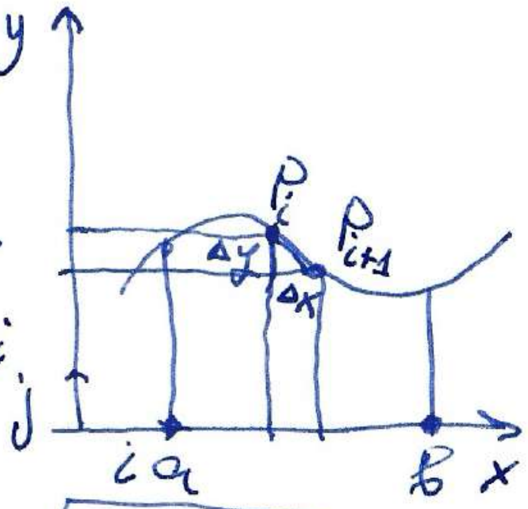


$$\frac{\partial \bar{r}(s,t)}{\partial s} = \bar{r}'_s = \langle \frac{\partial x(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial y(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial z(s,t)}{\partial s} \rangle$$

Longueur d'une courbe ($\mathbb{R}^2$)

$$C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad a \leq t \leq b$$

$$|P_i P_{i+1}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta S_i$$



$$\Delta x_i = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t_i} \cdot \Delta t_i$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

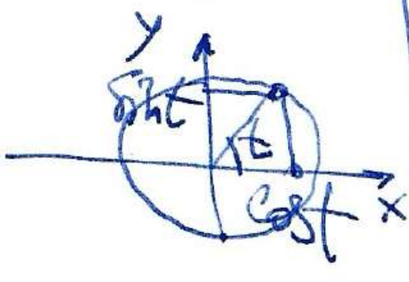
$$\lim_{\max(\Delta S_i) \to 0} \sum \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_C \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = L_C =$$

$$= \int_C ds \quad \text{où } ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

Paramétrisation "interne" ou normale :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1$$



Ex.

$C : \vec{r}(t) = \langle r\cos t, r\sin t \rangle$

$$L_C = r\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Produit scalaire des vecteurs

dans E^n : $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| \cos \widehat{\vec{a},\vec{b}}$

comme un élément de E^n

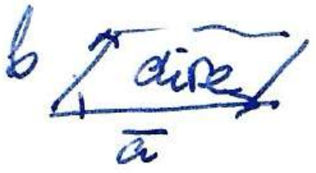
$$\cos \widehat{\vec{a},\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum a_i b_i = [\vec{a}] \times [\vec{b}]^T$$

forme matricielle $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \times [b_1, \cdots b_n]$

Produit vectorielle (dim = 3 uniquement !)

dans E^n $\vec{a}\times\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot \sin \widehat{\vec{a},\vec{b}} \cdot \vec{n}$ — vect. orthonormale



orientation : la règle de la main droite

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = \vec{0}$$
$$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

Soit $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Mnemonique :

det

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Propriétés

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

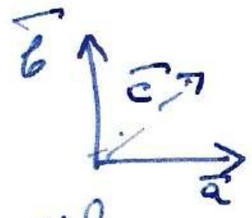
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$$

Produit mixte

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Volume

L'aire d'une surface ($\mathbb{R}^3$)

$S : \vec{r}(s,t)$ $\quad a \leq s \leq b$, $\quad c \leq t \leq d$

$d\vec{S}$ — élément inf. de S

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt$$

$\| d\vec{S} \|$ - l'aire du él. inf. de la surface

$$A = \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds\, dt = \int_S dS =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \sqrt{ \left(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 }\ ds\, dt$$