Dérivée directionnelle (dim = 2) et gradient

Soit $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ un vecteur

Def.: $f(x,y)$ – une fonction à 2 variables

$$D_{\vec{u}}\,(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Th. Si $f(x,y)$ est diff. alors f possède toutes dérivées directionnelles pour tout $\vec{u}$ et

$$D_u f(x,y) = f'_x(x,y)\,a + f'_y(x,y)\,b$$

Preuve. Soit $g(h) = f(x_0+ha, y_0+hb)$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = D_u f(x_0,y_0)$$

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f'_x(x,y)\,a + f'_y(x,y)\,b$$

$h=0$: $$g'(0) = D_u f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\,a + f'_y(x_0,y_0)\,b$$

$$\left|\begin{array}{l} \vec{i} = \langle 1, 0 \rangle \\ \vec{j} = \langle 0, 1 \rangle \end{array}\right|$$

$$D_u f(x,y) = \langle f'_x, f'_y \rangle \cdot \vec{u}$$

Def. gradient (un vecteur)

$$\nabla f(x,y) = \langle f'_x, f'_y \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

dim = n

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

prod. scalaire

$$D_{\bar{u}} f(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{u}$$

$$f(\bar{x}) \approx f(x_0) + \nabla f\big|_{x_0} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0)$$

(approximation lin.)

Th. Le valeur *maximal* de $D_{\bar{u}} f(\bar{x}, y)$ est $|\nabla f(\bar{x})|$; quand $\bar{u} \parallel \nabla(\bar{x})$

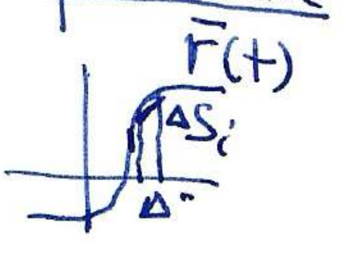
Preuve: $D_u f = \nabla f \cdot \bar{u} = \|\nabla f\| \cdot \|\bar{u}\| \cdot \cos\theta$

Intégrale curviligne

a)

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — un champ scalaire

$C: \bar{r}(t);\ t \in [a, b]$



$$\int_C f(\bar{r})\,ds = \int_a^b f(\bar{r}(t))\,\|r'(t)\|\,dt =$$

$$= \lim_{\substack{\max(\Delta S_i) \to 0 \\ \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}(t_i)) \frac{\Delta S_i}{\Delta t_i} \Delta t_i$$

b) un champ vectoriel $\bar{F}: D \to \mathbb{R}^n$

$D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_C \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot \bar{r}'(t)\,dt \quad \Big| \; C \text{ comme avant}$$

$$= \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(\bar{r}(t_i))\cdot \frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta t_i}\,\Delta t_i$$

Déf. $\bar{F}$ est conservatif ssi il existe G (champ scalaire) t.q. $\bar{F} = \nabla G$

$$\frac{dG(\bar{r}(t))}{dt} = \nabla G(\bar{r}(t))\cdot \bar{r}'(t) = \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot \bar{r}'(t)$$

$$\int_C \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot \bar{r}'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d\,G(\bar{r}(t))}{dt}\,dt = G(\bar{r}(b)) - G(\bar{r}(a))$$

Le valeur d'integrale ne depend pas d'un ~~chemin~~ chemin!

Un integrale selon un boucle est toujours null!

Sense physique: travail d'une force

D'une manière réciproque, un champ vect. conservatif ($\oint_C F(\bar{r})d\bar{r} = 0$ pour tout C) est toujours un gradient d'une fonction (= champ scalaire).