Exercices 2 : courbes

(1) Décrivez la ligne définie par la fonction (vectorielle)

$$\bar{r}(t) = \langle 1+t, 2+5t, -1+6t \rangle$$

Représentez la même ligne sous une forme différente

Rép. Droite $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{v}$ où $\bar{r}_0 = \langle 1, 2, -1 \rangle$

$\bar{v} = \langle 1, 5, 6 \rangle$

(2) Décrivez la courbe définie par la fonct.

$$\bar{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$$

Rép:

une spirale (hélix)

③ Trouvez une fonction vectorielle qui représente l'intersection du cylindre $x^2+y^2=1$ et le plan $y+z=2$

Rép. $\bar{r}(t)=\langle \cos t, \sin t, 2-\sin t\rangle$, $t\in[0,2\pi]$

④ Trouvez une fonction vect. qui représente l'intersection du cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ et le plan $z=1+y$

Rép. $\bar{r}(t)=\langle t, \frac{t^2-1}{2}, \frac{t^2+1}{2}\rangle$

(Analyzer 2 paramétrisations: $x=t$ et $y=t$. Quelle est ~~une~~ l'avantage de $\underline{x=t}$?)

⑤ Les trajectoires de deux particules sont définies par

$\bar{r}_1=\langle t^2, 7t-12, t^2\rangle$, $\bar{r}_2=\langle 4t-3, t^2, 5t-6\rangle$

Est-ce que le deux particules entrent en collision?

Rép oui

⑥ La même question pour

$\bar{r}_1=\langle t_1, t_2^2, t^3\rangle$, $\bar{r}_2=\langle 1+2t, 1+6t, 1+14t\rangle$

Est-ce les deux chemins s'intersectent? (Ce n'est pas la même question!)

Rép a) non, b) oui ($t=1$, $s=0$)

⑦ L'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ où $a,b>0$
définie un ellipse sur $\mathbb{R}^2$

7.1. Dessinez le graph de l'ellipse

7.2. Trouvez une représentation paramétrique de l'ellipse

Rép: $x = a\cos t$
$y = b\sin t$ $\quad t\in[0,2\pi]$

⑧ Trouvez l'équation vectorielle (et paramétrique) de la droite tangente à l'hélix définie par
$$\bar{r}(t)=<2\cos t, \sin t, t>$$
au point $(0,1,\pi/2)$

Rép $<0,1,\frac{\pi}{2}>+t<-2,1,\frac{\pi}{2}>$

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=1 \\ z=\frac{\pi}{2}+t \end{cases}$$

⑨ Trouvez les équations paramétriques pour la tangente ~~#~~ de la courbe $\bar{r}(t)=<t^5,t^4,t^3>$ au point $(1,1,1)$

Rép
$$\begin{cases} x=1+5t \\ y=1+4t \\ z=1+3t \end{cases}$$

(10) Trouvez la longueur de la hélix

$\bar{r}(t) = \langle -\sin t, \cos t, t \rangle$

du point $(1, 0, 0)$ au point $(1, 0, 2\pi)$

Rép. $\|\bar{r}'\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\bar{r}'\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\sqrt{2}\pi$$

(11) Montrez que les fonctions

$t \in [1,2] : \bar{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ et

$u \in [0, \ln 2] : \bar{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle$

représentent la même courbe

(12) Reparamétrisez l'hélix $\bar{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ par rapport à la longueur d'une arc mesuré du point $(1, 0, 0)$.

Rép. $\bar{r}_1(s) = \langle \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \rangle$

Un Projet

(pour ceux et celles qui ont fait les exercices 1-12)

À ~~D~~éduire les 3 lois de Kepler (1571-1630) de 2 lois de Newton (Isaac Newton l'a fait en 1687 dans son ouvrage Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)

Lois de Kepler

1) Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers

2) Des aires égales sont balayées dans ~~le~~ des temps égaux

3) Le carré de la période sidérale d'une planète (= temps entre deux passages devant une étoile) est proportionnel au cube de demi-grand axe a de la trajectoire elliptique de la planète

Les 2 lois de Newton

(dans la forme vectorielle)

① (Lois N2 du mouvement méchanique)

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

la force exercée sur la particule

l'accélération d'une particule

la masse de la particule

② (Lois de la gravitation)

la force de gravitation

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^3}\vec{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\vec{u}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{O_M O_m}$, $r = \|\vec{r}\|$, $\vec{u} = \frac{1}{r}\vec{r}$

2 centres des masses