

геометрии» он рассматривает только самые начальные шаги идеализирующей деятельности математиков – изобретение доказательств [6]. Сам Гуссерль на этом пути не продвинулся, насколько мне известно, также не известны мне работы на эту тему в рамках феноменологического направления и в последующие годы, хотя обсуждению «непостижимой эффективности математике в естествознании» посвящено множество работ.

Список литературы

1. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвенты до квазикристаллов. М.: Наука, 1989. 96 с.
2. Успенский В.А. Апология математики. С.-Пб., Амфора, 2011. 546 с.
3. Кант И. Критика чистого разума. Соч. в 6 т. М.: Мысль, 1963. Т.3
4. Юшкевич А.П. (ред.) История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т.3. М. Наука, 1972.
5. Гуссерль Э. Кризис европейских наук и трансцендентальная феноменология: Введение в феноменологическую философию. СПб. Фонд Университет; Владимир Даль, 2004. 749 с.
6. Гуссерль Э. Начало геометрии. М. Ad Marginem. 1996. 267 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА У ЕВКЛИДА И ПОНЯТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ У ВОЕВОДСКОГО

Родин А.В.

*Доктор философских наук
Университет Лотарингии
E-mail: andrei.rodin@univ-lorraine.fr*

Аннотация. В письме к автору от 16 декабря 2016-го года Владимир Воеводский проиллюстрировал новое понятие о математической структуре, истоки которого восходят к работам Александра Гротендика, с помощью исторического примера, заимствованного из «Комментария к Евклиду» Прокла. Это понятие структуры лежит в основе проекта построения унивалентных оснований математики, начало которому положил Воеводский в конце 2000-х годов, и существенно отличается от более привычного представления о структуре, развитого в XX-м веке в рамках теоретико-множественной математики. В статье подробно разобран исторический пример Воеводского и показано, каким образом новое понятие о математической структуре расширяет стандартное понятие. В заключительной части статьи рассмотрены некоторые эпистемологические следствия нового понятия о математической структуре, касающиеся аксиоматического метода построения теорий и роли теории моделей.

Ключевые слова: отношение, математическая структура, множество, модель, унивалентные основания.

EUCLID'S DEFINITION OF ANGLE AND THE CONCEPT OF MATHEMATICAL STRUCTURE ACCORDING TO VOEVODSKY

Rodin A.

*Ph.D.
University of Lorraine
E-mail: andrei.rodin@univ-lorraine.fr*

Abstract. In a letter to the author dated December 16, 2016, Vladimir Voevodsky used a historical example borrowed from the "Commentary on Euclid" by Proclus to illustrate a novel concept of mathematical structure, which stems from works by Alexander Grothendieck, and which essentially differs from the more familiar concept of structure developed in the 20th century within the set-theoretic mathematics. We present and analyse Voevodsky's historical example, and show how the novel concept of mathematical structure extends the standard concept. In the

concluding part of the article we draw some epistemological consequences from the new concept of mathematical structure, which concern the axiomatic method and the role of model theory.

Keywords: relation, mathematical structure, set, model, univalent foundations of mathematics.

Комментируя данное Евклидом определение плоского угла как «наклонения друг к другу двух линий» (определение 1.8 «Начал», см. [1, с. 11]), Прокл формулирует следующее возражение [2, с. 127], которое я пересказываю своими словами.

Если угол — это бинарное отношение «наклонения» между линиями, то заданной паре линий будет соответствовать единственный угол. Чтобы показать, что это на самом деле не так, рассмотрим сечение конуса плоскостью, содержащей его ось. Тогда получится два разных угла с вершиной, совпадающей с вершиной конуса: (1) плоский угол, стороны которого ограничивают лежащую внутри конуса часть секущей плоскости и (2) угол с теми же сторонами, но включающий в себя половину поверхности конуса. Таким образом, получается, что одно и то же отношение «наклонения» задает два разных двумерных угла.

Прежде чем мы перейдем к обсуждению интерпретации этого аргумента Воеводским, сделаем несколько очевидных замечаний чисто математического характера:

(а) Конструкция Прокла использует не понятие плоского угла, которое задается определением 1.8 «Начал», а более общий случай двумерного угла, который допускает, что натягиваемая на возникающие в этой конструкции полупрямые поверхность может быть кривой поверхностью конуса, а не фрагментом плоскости.

(б) В то же время, конструкция Прокла использует частный случай прямолинейного угла (определение 1.9 «Начал»), а не общий случай, который допускает, что сторонами угла могут быть кривые линии (как в случае т.н. роговидных углов, образованных касающимися окружностями). В дальнейшем мы также будем рассматривать только прямолинейный случай.

(в) Проблема выбора поверхности, на которую указывает Прокл, возникает уже при пересечении двух различных прямых линий на плоскости, если считать эти прямые неограниченными в обе стороны. Эта элементарная конструкция разбивает плоскость на четыре соприкасающихся сектора, каждый из которых можно считать углом в обычном интуитивном смысле слова. Таким образом тезис Прокла о неоднозначности определения угла как особого рода отношения между линиями можно обосновать и с помощью такой более простой конструкции.

Замечания (а) и (б) влекут за собой вопрос о релевантности аргумента Прокла по отношению к определению 1.8 «Начал» Евклида, однако эта проблема не имеет сейчас для нас никакого значения. Упрощенный вариант аргумента Прокла из замечания (в) будет использован нами в дальнейшем.

Указывая на цитированный выше фрагмент «Комментария» Прокла, Владимир Воеводский в письме к автору от 16 декабря 2016 г. замечает, что «у Прокла есть четкое понимание различия между свойством и структурой», уточняя при этом, что в его понимании «отношение — это совместное свойство двух или более объектов». Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы прояснить это замечание Воеводского и уточнить использованное им понятие о математической структуре, которое, как мы увидим, существенно отличается от более привычного о структуре развитого в рамках теоретико-множественной математики.

Очевидно, что замечание Воеводского о Прокле — это анахронистическое суждение, сделанное путем проецирования современной математической теории на исторический источник. Воеводский имеет здесь в виду гомотопическую теорию типов (ГТТ) и связанную с этой теорией проект построения новых «универсальных» оснований математики [3], над которым он работал во время нашей переписки. Не имея возможности в рамках короткой статьи описать принципы ГТТ систематически, я все же постараюсь в двух словах объяснить, о чем тут идет речь.

Гомотопическая теория типов — это интерпретация теории типов Мартина-Лёфа (или другой родственной формальной логической системы) с помощью геометрической теории гомотопий, при которой типы интерпретируются как пространства, их термы интерпретируются как точки этих пространств, а пути в пространствах интерпретируются как доказательства тождества (равенства) точек, соответствующих началу и концу данного пути. Эта конструкция допускает расширение на новый «этаж» (гомотопический уровень) с помощью введение в рассмотрение «путей между путями», которые называют гомотопиями, и отождествлению путей, между которыми гомотопии существуют. Такое добавление новых уровней может быть продолжено неограниченно. Возникающую многоуровневую конструкцию в ГТТ называют гомотопической иерархией или лестницей типов.

Идея Воеводского, связанная с его проектом построения унивалентных оснований математики, состоит в том, что теоретико-множественная математика 20-го века «живет» на самых нижних уровнях гомотопической иерархии, выходя за эти пределы только в отдельных случаях, в частности, в работах Гротендика и его последователей в области алгебраической геометрии. Унивалентные основания, по замыслу Воеводского, открывают математическому сообществу новые возможности для систематической математической работы на более высоких ступенях гомотопической лестницы.

Вернемся теперь к понятию математической структуры. Популярное во второй половине 20-го века понятие о математической структуре в духе Бурбаки опирается на идею о том, что всякую структуру можно представить с помощью некоторого базового множества (или семейства множеств) и системы отношений между элементами этого множества удовлетворяющих набору формальных условий, которые задаются в виде аксиом [4]. Например, структура алгебраической группы получается путем задания на произвольном множестве бинарной операции (то есть, трехместного отношения), удовлетворяющей обычным аксиомам теории групп. Такой общий подход к понятию структуры оставляет широкое поле для разных версий и уточнений [5], однако для понимания идеи Воеводского эти нюансы не имеют значения.

Пусть $x=y$ — это обычное бинарное отношение равенства, заданное на множестве M . Это значит, что про любую пару элементов x, y из M можно сказать, состоит ли эта пара из равных элементов (случай, когда $x=y$ истинно) или нет (случай, когда $x=y$ ложно). В ГТТ множество M рассматривается как пространство, элементы x, y — как точки этого пространства, а равенство $x=y$ — как пространство всех путей между точками x, y , которое может быть либо пустым (если точки x, y разные), либо содержать единственный путь из элемента x в себя (если x и y — это одна и та же точка). Пространство $x=y$ в этом случае относится к типу высказываний, а M к типу множеств (дискретных пространств), для которых гомотопическая структура путей является тривиальной: любой путь стягивается в «свою» точку.

На следующей ступени гомотопической лестницы имеет значение не только то, есть ли между данными точками какой-либо путь или нет, но и различия между разными путями между данными точками. Разные пути можно понимать в этой конструкции как разные доказательства равенства $x=y$. При этом гомотопные пути отождествляются. Структура путей в этом случае уже не всегда будет тривиальной, поскольку она зависит от топологической структуры данного пространства. Все это рассуждение переносится со случая отношения равенства на любые свойства и отношения.

Посмотрим теперь на конструкцию Прокла — или на упрощенную конструкцию из нашего замечания (в) — через призму гомотопической оптики. Альтернатива произвольному выбору сектора в этой конструкции или попытке переопределить элементы отношения так, чтобы получающийся угол был единственным, состоит в том, чтобы рассмотреть множество всех получающихся в данной конструкции углов и выяснить, какие из них следует считать равными. Истоки такого рода универсального подхода к конструированию математических понятий можно найти в работах Александра Гротендика, на которые опирается Воеводский [6]. Получающаяся таким образом конструкция — это именно то, что в своем письме Воеводский называет «структурой». Заметим, что структура понятия угла в нашей конструкции оценивается уже с помощью общего понятия множества, а не множества, состоящего из единственного элемента «истина», который указывает нам на то, что требуемое определением отношение действительно имеет место. Определение угла имеющее характер структуры в смысле Воеводского не просто задает некоторое отличительное свойство, которое позволяет сказать, является ли данный математический объект углом или нет, но и описывает множество (или класс) всех объектов называемых углами вместе со всеми возможными способами их отождествления.

Сравнивая теперь использованное Воеводским понятие математической структуры со стандартным теоретико-множественным понятием, можно заметить, что первое расширяет второе на случай пространств (типов) высших гомотопических уровней. Если считать, что стандартная теоретико-множественная структура — это множество с определенными на этом множестве отношениями, то предложенное Воеводским расширение этого понятия также включает «отношения между отношениями», которые в ГТТ представляются в виде гомотопий и гомотопий высших порядков.

Такое расширение понятия математической структуры имеет важные эпистемологические последствия. Опираясь на идеи Гротендика и Воеводского, я хочу предложить к обсуждению следующий методологический тезис: развитие математической теории не должно ограничиваться работой с ее стандартной (задуманной) моделью и должно включать в себя исследование всего класса моделей данной теории средствами самой этой теории (разумеется, с учетом известных ограничительных метатеорем).

Этот тезис остается содержательным в ситуации, когда при работе со стандартной моделью принимаются во внимание только доказуемые в данной теории утверждения, о которых известно, что они будут истинными и в любой другой модели этой теории, что в силу (мета)теоремы о полноте имеет место для любых первопорядковых теорий. В случае теории групп такое расширение понятия теории является совершенно естественным, поскольку любая отдельная группа представляет собой модель аксиом теории групп, в то время как теория групп в обычном смысле слова, разумеется, не ограничивается исследованием какой-то одной специально выбранной группы. Во многих других случаях систематическое изучение нестандартных моделей на сегодняшний день остается делом будущего. Исторический пример, на который указал Воеводский в нашей переписке, показывает, что этот новый методологический подход имеет глубокие корни в истории математики и может быть продемонстрирован на элементарных геометрических примерах.

Список литературы

1. *Евклид*. «Начала» Евклида в трех томах. Перевод с др.-греческого Д.Д. Мордухай-Болтовского, том 1, Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1948 г. 448 с.
2. Прокл Диадок, Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Перевод с др.-греческого А.И. Щетникова. Москва: Университет Дмитрия Пожарского, 2013. 600 с.
3. Univalent Foundations Group, Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics, Princeton Institute of Advanced Studies 2013. [Электронный ресурс]. URL: <http://homotopytypetheory.org/book/> (дата обращения 01.06.2024).
4. Бурбаки Н. Архитектура математики // Математическое просвещение. 1960. № 5. С. 99-112.
5. Hellman G. Three Varieties of Mathematical Structuralism // *Philosophia Mathematica*. 2001. V.2, no 9. P. 184-211.
6. Grothendieck A. Pursuing Stacks. [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/2111.01000.pdf>.

Д.А. ГРАВЕ – ОСНОВОПОЛОЖНИК РОССИЙСКОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ (К 160-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Тестов В.А.

*Доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук,
профессор кафедры математики и информатики
Вологодский государственный университет
E-mail: vladafan@inbox.ru*

Аннотация. Д.А. Граве был создателем одной из крупнейших в нашей стране математических школ, представители которой, в свою очередь, основали в России несколько крупных алгебраических школ в таких городах как Москва, Санкт-Петербург, Казань, Екатеринбург и др. Он был также автором многочисленных ценнейших исследований в различных областях математики, большого количества книг и монографий, на которых было воспитано несколько поколений российских математиков. Д.А. Граве был потрясающим лектором и одаренным педагогом. Ему удавалось необыкновенно просто и ясно объяснять сложные вопросы математической науки. Большинство учеников Д.А. Граве стали самостоятельными учеными и обзавелись собственными учениками. Ученики Граве старались перенять лучшие традиции его научной школы. Подавляющее большинство его учеников разъехались по другим городам и странам. Всего научная генеалогия Д.А. Граве насчитывает более 2-х тысяч учеников.

Ключевые слова: алгебра, теория групп, теория чисел, диофантовы уравнения

D.A. GRAVE – FOUNDER OF THE RUSSIAN ALGEBRAIC SCHOOL (ON THE 160TH ANNIVERSARY OF HIS BIRTH)

Testov V.A.

*DSc in Pedagogy, CSc in Physical and Mathematical sciences,
Professor of the Department of Mathematics and Computer Science*