

Андрей Бановац, Дарья Бойкова и Андрей Родин

Очерк истории аксиоматических исследований в России и СССР*

Аксиоматический метод и его история

В широком смысле аксиоматический метод можно описать как метод построения теории, предполагающий наличие двух типов суждений (аксиомы и теоремы) и отношения следования между суждениями, при котором все суждения второго типа (теоремы) оказываются следствиями суждений первого типа (аксиом). Можно также сказать, что аксиоматическая теория (то есть теория построенная с помощью аксиоматического метода) порождается своими аксиомами и правилами, по которым из аксиом выводятся теоремы. Хотя аксиоматический метод получил наибольшее распространение в математике, известны также попытки его применения в других науках включая физику и биологию.

Классическим образцом аксиоматической математической теории на протяжении многих веков оставались “Начала” Евклида. Впрочем, нужно иметь в виду, что до начала 20-го века переписчики и издатели этого труда Евклида как правило не пытались воспроизвести классический текст буквально, а старались исправить в нем те недостатки, которые они там видели. Поэтому если говорить об аксиоматической теории Евклида в конкретном историческом смысле, то эту теорию нужно отличать от всех ее позднейших модификаций. Таким образом, утверждение о том, что “Начала” служили образцом аксиоматической теории на протяжении долгих веков, на самом деле указывает на непрерывность происходящих изменений, а не на их отсутствие. Интерес к изучению “Начал” Евклида как памятника истории математики появился только во второй половине 19-го века - то есть именно

* Статья подготовлена в рамках проекта РГНФ “Аксиоматический метод как инструмент научного познания”, номер проекта 13-03-00384

тогда, когда этот классический труд окончательно перестал быть адекватным современному состоянию математики (в первую очередь в связи с развитием не-евклидовых геометрий). История переизданий, переводов и модификаций “Начал” Евклида до сих пор остается недостаточно исследованной. Неполный, но тем не менее весьма ценный обзор этой традиции можно найти в комментарии Д.Д. Мордухая-Болтовского к его русскому переводу “Начал” (Евклид 1950).

Открытие и развитие не-евклидовых геометрий (Бонола 2010) в 19-м веке было ключевым (хотя и не единственным) фактором, который сделал евклидову архитектуру математики заведомо неадекватной. Новая математика не могла быть втиснута в евклидовы рамки с помощью дальнейших постепенных модификаций традиционной теории. Чтобы построить новую математику аксиоматически, требовалось переосмыслить самопонятие аксиоматического метода, а не просто заменить одни аксиомы на другие. Такого рода попытки были предприняты в конце 19-го - начале 20-го в рамках исследований оснований математики вообще и неевклидовых геометрических теорий в частности. Согласно существующему сегодня широкому консенсусу, безусловного успеха в деле аксиоматизации новой математики впервые добился Давид Гильберт опубликовав в 1899-м году свою эпохальную работу “Основания геометрии” (Гильберт 1948).

В этой книге Гильберт представил свой вариант аксиоматического построения евклидовой геометрии, который радикально отличается от традиционного и который по сегодняшний день используется в математике в качестве образца современной аксиоматической теории. В этом отношении роль “Оснований геометрии” Гильберта в математике 20-го века можно сравнить с ролью “Начал” Евклида (и их модификаций) в математике предшествующих веков. Однако эта аналогия не является полной. Если “Начала” Евклида на протяжении долгого времени служили в качестве компендиума базовых математических знаний, необходимых для занятий любой более специальной областью математики (такой как, например, теория конических сечений), то “Основания” Гильберта никогда не претендовали на эту роль. Совершенно очевидно, что в 1899-м году евклидова геометрия уже не могла играть роль основания геометрии и тем более всей математики. Поэтому никакой новый способ построения этой старой геометрической теории в это время уже не мог сам по себе иметь большого

значения для математики. Значение “Оснований” Гильберта состояло в другом: новый аксиоматический *метод*, который Гильберт использовал в этой работе, мог быть с равным успехом использован для аксиоматического построения новых теорий таким как гиперболическая геометрия Лобачевского. Кроме того, этот новый аксиоматический метод позволил ответить на вопрос о логической связи между различными теориями (в частности, евклидовой и не-евклидовой геометрией) и на другие подобные вопросы, которые вслед за Гильбертом и Бернайсом сегодня принято называть мета-математическими.

Разумеется, было бы неправомерно напрямую отождествлять современный аксиоматический метод с методом “Оснований” Гильберта 1899-го года. И сам Гильберт, и последующие поколения логиков и математиков разрабатывали этот метод на протяжении последующих десятилетий различными способами и в различных направлениях.

Однако в этом многообразии современных подходов именно “Основания” Гильберта 1899-го года остаются устойчивой точкой отсчета. В качестве примера авторитетного (но не единственного) современного взгляда на природу аксиоматического метода мы отсылаем читателя к свежей статье Хинтикки, в которой автор подчеркивает роль гильбертовых “Оснований” (Hintikka 2011). Несколько отличный взгляд на аксиоматический метод и его историю (включая новейшую историю в 21-м веке) представлен одним из авторов этой статьи в только что опубликованной монографии (Rodin 2013).

Такая исключительная роль “Оснований” Гильберта в аксиоматическом мышлении 20-го века создает специфическую трудность для изучения истории аксиоматического метода и связанных с этим эпизодов истории математики.

Дело в том, что все известные реконструкции истории аксиоматического метода на рубеже 19 и 20 веков представляют собой “телеологическую историю”, то есть историю того, каким образом отдельные элементы гильбертова метода появлялись в трудах предшественников Гильберта (в частности у Клейна, Паша, Пиери и т.д.). Классической в этом отношении является работа Фрейдентала (Freudenthal 1962); полный обзор литературы по этой теме (которая весьма немногочисленна) можно найти в (Bos 1993). Мы не хотим сказать, что такой ангажированный подход к истории математики является недопустимым в принципе. Однако совершенно очевидно, что он

способен прояснить генезис только одной отдельной точки зрения, и что он оставляет вне поля зрения любые альтернативные подходы. Могут ли сегодня такие альтернативные подходы к аксиоматике представлять какой-либо теоретический интерес (помимо чисто исторического интереса)? Мы считаем, что такую возможность исключать не следует. Не пытаясь поставить под сомнение историческое значение работ Гильберта в области аксиоматики, мы считаем, что есть смысл смотреть на понятие аксиоматического метода более широко, чем это делал Гильберт - как в чисто теоретическом, так и в историческом плане.

Поэтому мы считаем, что история аксиоматического метода вообще, и особенно история этого метода на рубеже 19-20 веков требует более глубокого изучения - тем более, что исторические источники в последнем случае являются относительно легко доступными. Цель этого очерка - рассказать об эпизоде новейшей истории аксиоматического метода, который до сих пор не был освещен в мировой литературе. Речь пойдет об аксиоматических исследованиях в России и Советском Союзе.

В.Ф. Каган

Одним из самых выдающихся ученых, которые на рубеже XIX-XX веков занимались основаниями математики и стремились к аксиоматической постройке геометрии был *Вениамин Федорович Каган (25.02.1869 - 08.05.1953)*. Родился Вениамин Федорович в Одессе, где начал свое математическое образование, поступив в 1887 г. на физико-математический факультет Новороссийского университета. В 1897 г. становится доцентом, а в 1908 г. защищает магистерскую диссертацию "Основания геометрии". В издательстве "Матезис", председателем научной комиссии которого он являлся с 1905 г., под заголовком *"Задача обоснования геометрии в современной постановке"* выходит публикация его речи, произнесенной на защите диссертации на степень магистра чистой математики (Каган, 1908). В данной публикации, Вениамин Федорович со всей ясностью излагает те основные проблемы преподавания геометрии, которые возникают (и особенно чувствительно отражаются на профильных факультетах) из-за отсутствия понятийной однородности, ясности и четкости в изложениях геометрических объектов и операций, а также когерентной, логически структурированной организации геометрического знания в целом. Контекст изложения данной проблематики можно условно назвать историческим, поскольку Вениамин Федорович начинает свою речь с описания положений геометрии с древнейших времен и, в ясных очертаниях, выделяет ключевые моменты развития геометрического знания в древней Греции и последующих периодах вплоть до Гаусса, Лобачевского, Больаи, Тауринуса и совсем современных ему Кантора, Пеано, Римана, Гильберта, Ли и других. Но, исторический фон, пропитанный множеством примеров, автор использует для более наглядного представления того проблемного положения, в котором находится геометрическая наука и с ней связанная преподавательская деятельность. Данное положение иллюстрируется автором через сравнение современной ему практики преподавания геометрии, в котором до сих пор

доказательства теорем, даже на уровне высшего профильного образования, основываются на интуитивных представлениях о геометрических объектах и операциях, с таким же положением геометрии задолго до самого Евклида. Из *"Речи"* Вениамина Федоровича, становится ясно, что даже тот уровень логической структуры Евклидовых начал, с перечислением основных понятий и исходных положений, не служит основанием для более обоснованного введения в геометрическую науку, причем если эти положения (аксиомы) в учебной литературе и упоминаются, то их наличие в явном виде отсутствует напрочь.

Одна из основных тематических линий *"Речи"* относится к проблеме пятого постулата *"Начал"*; именно в связи с историей подходов к этой задаче и ее окончательному разрешению в работах Лобачевского, автор четко обосновывает необходимость *"отвязать"* геометрию как формальную науку, от интуиций связанных с эмпирическим миром. Для наглядности приводятся несколько примеров многообразий, элементами которых являются различные по своей *"феноменальной"* структуре объекты, представляющие различные интерпретации аксиоматически обоснованной евклидовой геометрии.

Далее, Вениамин Федорович представляет результаты Римана, Гельмгольца и С. Ли по аналитическому обобщению евклидовой геометрии, в зависимости от разных значений кривизны, как постоянной, фундаментально характеризующей (геометрическое) пространство.

В конце приводятся определения и рассмотрение, с формальной точки зрения, понятий движения, геометрического инварианта и группы движений, как формальных обобщений соответствующих интуитивных представлений. Последние, в силу своей неформализованной природы, не позволяли геометрическому знанию отвязаться от условностей эмпирических образов. Именно путем таких обобщений и, вообще, структурированием моделей геометрии на началах аксиоматического метода, нужно, по словам автора, обосновать геометрию, *"если мы хотим чтобы это была действительно научно логическая система"*¹.

В первом томе той самой магистерской диссертации *"Основания геометрии"* (1905-1907 гг.) к которой рассмотренная выше *"Речь"* относится,

1

Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 33

автор детально разрабатывает свою геометрическую систему. Вторым том представляет собой большой исторический очерк, в котором Вениамин Федорович подробно освещает различные подходы к основаниям геометрии².

Деятельность Вениамина Федоровича в советские годы, после переезда из Одессы в Москву в 1922 г., включала и работы по тензорной дифференциальной геометрии. Как свидетельствует его ученик П.К. Рашевский, "данное направление было создано в советской математике главным образом усилиями Вениамина Федоровича, а затем получило широкое развитие в работах его учеников"³.

Последний обширный труд, задуманный В.Ф. Каганом был трехтомник *"Основания геометрии"*, в котором ученый собирался изложить своеобразную *summa* своих достижений по аксиоматическому обоснованию геометрии, причем структура данного произведения отражала его магистерскую диссертацию. Костяком изложения исторической части посвященной идеям геометрии являлись идеи и жизнь Н.И. Лобачевского, изучению которых Вениамин Федорович посвятил долгие годы жизни. Первый том (который вышел в 1949 г.) включал материал по геометрическим идеям Лобачевского и их предыстории. Во втором томе, который Вениамин Федорович в основном успел подготовить был закончен его учениками уже после его кончины. Во второй том, задуманный автором как изложение развития идей Лобачевского в трудах его современников, была включена и малая часть аксиоматической системы обоснования геометрии самого Вениамина Федоровича; этот материал, по изначальному замыслу автора, должен был помещаться в третьем томе.

В 1927 г. Вениамин Федорович организовал при Московском университете семинар по векторному и тензорному анализу, труды которого начали публиковаться с 1933 г. и чья деятельность (включая издание "Трудов") продолжается по сей день. В рамках семинара, Вениамином Федоровичем проводились исследования и по метрической двойственности (опубликованы в IV выпуске семинара).⁴

2

Рашевский П. К. Каган В. Ф. (Некролог), с. 132

3

Там же.

4

П.К. Рашевский

Одним из известнейших учеников и последователей В.Ф. Кагана стал *Петр Константинович Рашевский (27.07.1907 - 12.06.1983)*. П.К. Рашевский родился в Москве, где в 1923 г. поступил на математическое отделение физико-математического факультета МГУ. В 1927 г. участвует на одном из первых заседаний семинара по векторному и тензорному анализу с докладом о своих результатах, относящихся к теории тензорного поля, зависящего от двух точек пространства.⁵

Научные интересы Петра Константиновича в основном касаются обобщений пространств постоянной кривизны, и собственно, вопросов аксиоматического основания геометрий.⁶ Одним из важнейших результатов исследований П.К. Рашевского является созданная им *полиметрическая геометрия*. Основным импульс по созданию последней исходил от В.Ф. Кагана и его задачи по исследованию проблем метрической двойственности, которое привело Петра Константиновича сначала к обобщениям неевклидовых геометрий в виде геометрий биметрических, а потом и к формулировке в его докторской диссертации 1936 г. собственно полиметрической геометрии. Основная работа П.К. Рашевского на эту тему была опубликована в 1941 г. в

Там же, стр. 132-133

5

Норден А.П., Розенфельд Б.А., Яглом И.М. Петр Константинович Рашевский (к пятидесятилетию со дня рождения), с. 225

6

Там же, с. 226

пятом выпуске уже упомянутых Трудов семинара по векторному и тензорному анализу (Рашевский, 1941).

Ключевая идея полиметрической геометрии состоит в аксиоматическом введении Рашевским "*линейных элементов*" заданных тремя параметрами в, сначала - двумерном пространстве (евклидовом, гиперболическом или эллиптическом), и представляющих "точку с направлением из нее в бесконечно близкую точку"⁷. Данная структура позволяет автору определить биметрическое пространство с двумя финслеровыми метриками - "метрикой углов", свойственную в евклидовом пространстве мере расстояния между прямыми, и "метрику расстояний", относящуюся в евклидовом пространстве к точкам. Рашевский рассматривает различные типы биметрических систем и доказывает обобщения многих известных теорем геометрии двумерного евклидового или эллиптического пространства.⁸ В итоге, автор обобщает свои результаты на случай трехмерного пространства, устанавливает понятия *триметрической геометрии*. Таким образом, полученное обобщенное пространство, П.К. Рашевский называет *триметрической системой*.⁹

Ю.И. Кулаков и Г.Г. Михайличенко

Полиметрические геометрии Рашевского нашли свое применение в физике, где для описания физических систем зависящих от нескольких физических величин, при определенных условиях, переходы системы из одного состояния в другое, впоследствии изменения каждой, отдельно взятой величины, могут быть описаны функциями перехода, удовлетворяющими аксиомам квазиметрики или метрики. При том, каждая из полученных функций описывает переход состояния системы в зависимости от изменения одной

7

Рашевский П.К. Полиметрическая геометрия, стр. 23-24

8

Норден А.П., Розенфельд Б.А., Яглом И.М. Петр Константинович Рашевский (к пятидесятилетию со дня рождения), с. 227

9

Рашевский П.К. Полиметрическая геометрия, стр. 132-147

конкретной физической величины. Таким образом, каждая физическая величина задает одну, в общем случае - отличную от остальных, метрику и конфигурационное пространство рассматриваемой физической системы получается полиметрическим. Результаты данных исследований в контексте *теории физических структур* опубликованы в статье *"Простейшие полиметрические геометрии. I"* (Михайличенко, 1998) и других трудах профессора кафедры физики и методики преподавания физики Горно-Алтайского государственного университета, *Геннадия Григорьевича Михайличенко (р. 11.02.1942 г.)*. Научное направление - теория физических структур, было разработано в шестидесятых годах учителем Г.Г. Михайличенко и, в свою очередь, учеником Игоря Евгеньевича Тамма - *Юрием Ивановичем Кулаковым (р. 12.03.1927 г.)*, профессором упомянутой кафедры ГАГУ. Весьма коротко теорию Ю.И. Кулакова можно охарактеризовать как формальную теорию строения физических законов¹⁰. Интересной с точки зрения аксиоматики, является так называемая *аксиома феноменологической симметрии*, выражаемая в виде функционального уравнения, решение которого имеет и физическое содержание - задает физическую структуру в смысле математической структуры соответствующей физическим законам и явлениям - и содержание геометрическое, приводящее, между прочим, к образованию уже упомянутых полиметрических пространств.¹¹ Основная цель теории физических структур¹², со слов ее автора, заключается в точной постановке и решении Шестой проблемы Гильберта - проблемы аксиоматизации теоретической физики. В итоге дедуктивного выведения теоретической физики из конечного набора постулатов, Ю.И. Кулаков пытается получить единственную математическую структуру, физическая интерпретация которой представляла бы единый всеобщий принцип унификации.

10

Подробнее см. Михайличенко Г.Г., Малышев В.М. Феноменологическая симметрия и функциональные уравнения

11

Подробнее см. там же и в Кыров В.А. Проективная геометрия и феноменологическая симметрия

12

Подробнее см. Кулаков Ю.И. О теории физических структур

Р.Л. Бартини и П.Г. Кузнецов

Положения исследований советских ученых Роберта Людвиговича Бартини (14.05.1897 - 06.12.1974 гг.) и Побиска Георгиевича Кузнецова (18.05.1924 - 04.12.2000 гг.) по выяснению связи различных аксиоматических моделей геометрии и физических теорий изложены в их совместной статье "О множественности геометрий и множественности физик" (Бартини, Кузнецов, 1979). В данном труде, со слов авторов, рассматривается попытка "геометризации физики" с новой точки зрения, учитывая современные авторам методологические тенденции. Указывая, с одной стороны, на принципиальную возможность построения различных геометрий, в зависимости от выбора различных систем аксиом и, с другой - на взаимосвязь ("в широком смысле слова"¹³) математической физики и геометрии, авторы в качестве одной из альтернатив, приходят к возможности рассмотрения физики в смысле "множества разных физик".¹⁴ Вторая из предложенных авторами альтернатив относится к пониманию математической физики как одной из разновидностей геометрии. Авторы приводят мнение А. Пуанкаре, согласно которому, причины выбора геометрической модели для того, чтобы к ней относить явления физического мира, заключаются в простоте выбранной группы движений и в определенного рода соответствии (критерии для которого выдвигаются опытом) "различных возможных перемещений (твердых тел)" и различных операций выбранной группы (движений);¹⁵ таким образом, "...основные гипотезы геометрии не суть факты, добытые из опыта; но наблюдение над некоторыми физическими величинами приводит к выбору именно их из числа возможных гипотез" [там же]¹⁶. Опираясь на приведенные положения, авторы делают вывод

13

Бартини Р., Кузнецов П.Г. О множественности геометрий и множественности физик, с.

54

14

Там же

15

Там же, с. 56

16

Там же

что разного рода наблюдения над разными физическими величинами "будут приводить нас к аксиомам и соответственно к геометриям другого вида", то есть, что "Смена наблюдаемых классов физических явлений будет приводить к смене аксиом и построенных на этих аксиомах геометрий.", авторы отбрасывают вторую из приведенных выше альтернатив. В дальнейшем, авторы принимают точку зрения О. Веблена относительно взгляда на геометрию как "теорию пространства с инвариантом"¹⁷, акцентируя внимание на понятии инварианта, описанного Вебленом как "Все, что остается неизменным при преобразовании координат... Так инвариантом является точка, а также кривая или система кривых. Строго говоря, инвариантом является также всякая вещь, например растение или животное не имеющее вовсе отношения к рассматриваемому нами пространству. Инвариант связанный с пространством, т. е. свойство пространства, ..., мы будем называть также *геометрическим объектом*... Другие примеры геометрических объектов с компонентами - аффинные связности и тензоры всех родов".¹⁸

Именно понятие инварианта, взятое в общем смысле позволяет, по мнению авторов, "покинуть мир чистой геометрии"¹⁹, в попытке осуществить адекватную "геометризацию физики". В итоге первой части своей статьи, в качестве соответствующего их намерениям определения геометрических моделей, авторы принимают трактовку геометрий как "*групп преобразований с инвариантом*" и, ссылаясь дополнительно на работы Г. Крона в области тензорного анализа сетей, выделяют понятия *группы, преобразования и инварианта* как фундаментальные для осуществления предпринятой задачи. Оставаясь в рамках данных описаний и усвоенных фундаментальных понятий, авторы, правда, получают определенный формальный "каркас", с помощью которого можно описывать формальные свойства физических теорий. Для того, чтобы данная формальная установка могла быть применена в описании и

17

Там же, с. 58

18

Там же

19

Там же

изучении физических явлений, то есть, чтобы таким образом на основании геометрии можно было аксиоматически строить физические теории, авторы к упомянутым основным понятиям добавляют четвертое - *физическая величина*.²⁰

Таким образом, по словам авторов: "мы совершим переход от множества геометрий к множеству физик. Используя четвертый термин, мы получаем определение не одной из геометрий, а определение одной из физик."²¹ И далее: "*Группа преобразований, имеющая определенную физическую величину инвариантом - есть одна из физик*."

Инвариантом физической величины принято называть закон сохранения определенной физической величины."²²

В качестве необходимого условия для получения законов физики, авторы выдвигают правильное определение системы физических величин, чья инвариантность и соответствует законам сохранения. Методологическое средство поиска таких систем представляет теория размерности, вариант которой Роберт Людвигович разработал самостоятельно (т.н. *Таблица Бартини*) и впервые опубликовал в Докладах АН СССР 1965 г.(Бартини, 2009).

А.Н. Колмогоров

Работы выдающегося советского математика *Андрея Николаевича Колмогорова (25.04.1925 - 20.10.1987 гг.)* в области аксиоматики можно условно разделить на работы посвященные аксиоматизации отдельных математических понятий и разделов математики, и работы по математической логике, в которых аксиоматическая структура формальных теорий и связанные с ней семантические и синтаксические аспекты являются предметом исследования.

20

Там же

21

Там же

22

Там же, с. 61

К первой категории относятся такие работы как - "*К обоснованию проективной геометрии*"²³ (1932), "*Аксиоматическое определение интеграла*"²⁴ (1925), "*О границах обобщения интеграла*"²⁵ (1925), "*Исследование понятия интеграла*"²⁶ (1930), "*Основные понятия теории вероятностей*" (1933) и др.; ко второй категории - работы по интуиционистской логике - "*О принципе tertium non datur*"²⁷ (1925), "*К толкованию интуиционистской логики*"²⁸ (1932).

Первая из упомянутых работ представляет краткое изложение метода аксиоматического построения проективной геометрии на принципах топологической алгебры. Исследования последней были начаты А.Н. Колмогоровым в 30-е годы, впервые в СССР. Метод построения проективной геометрии предлагаемый автором отличается от "классического" тем, что свойства непрерывности задаются топологически, через требование топологической структурированности множеств точек, прямых и плоскостей (каждое из которых является связным бикompактным топологическим пространством) удовлетворяющих обычным проективным аксиомам инцидентности и непрерывности отношений инцидентности индуцированных последними.²⁹ При соответствующем определении метрической функции на пространстве точек, получается (топологическое) тело расстояний, удовлетворяющее теореме Понтрягина, т.е. изоморфно, либо телу действительных чисел, либо телу комплексных чисел, либо телу кватернионов. Каждому из тел соответствует свой тип проективного пространства. Принятие

23

Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика, стр. 149-150

24

Там же, стр. 19-21

25

Там же, стр. 21-39

26

Там же, стр. 96-136

27

Там же, стр. 45-69

28

Там же, стр. 142-149

29

Там же, с. 149

аксиомы непрерывности позволяет получить комплексную геометрию.³⁰ В данном методе, именно исключение аксиом порядка позволяет непосредственно получить комплексную проективную геометрию.

Упомянутые выше работы по исследованию и определению понятия интеграла привели к конструкции *интеграла Колмогорова*, обобщающего результаты современных исследований по теории интеграла.

В общеизвестной классической основополагающей работе "*Основные понятия теории вероятностей*", А.Н. Колмогоров дал аксиоматическое обоснование теории вероятностей, превратив ее в полноценную и самостоятельную область математических исследований (Колмогоров, 2013). В качестве основных понятий аксиоматики Колмогорова выступают понятия *случайного события* и (его) *вероятности*. Данная работа интересна с точки зрения аксиоматики еще и тем, что в ней автор коротко рассматривает основания для эмпирической дедукции аксиом теории, а также дает ссылки на работы в которых имеются альтернативные попытки аксиоматического обоснования³¹ (в которых, между прочим, другие понятия выступают в качестве основных) и работы рассматривающие предпосылки для приложения теории вероятностей к "миру действительных событий"³².

В упомянутых работах по математической логике А.Н. Колмогоров осуществляет первую аксиоматизацию интуитивистской логики, что позволило ее математическое исследование независимо от методологических принципов интуиционизма и впервые осуществляет операцию погружения (сам термин был выдвинут Н.А. Шаниным) одной логики в другую.³³ Именно, в статье "*О принципе tertium non datur*", отправляясь от Гильбертовой аксиоматики классической логики высказываний, Колмогоров формирует свою систему аксиом интуиционистской логики высказываний и соответствующее

30

Там же, с. 150

31

Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей, стр. 9-10

32

Там же, с. 12

33

Успенский В.А., Плиско В.Е. Интуиционистская логика (комментарии к работам А.Н. Колмогорова), с. 398

исчисление, а с применением четырех дополнительных предикатных аксиом и правила генерализации, получает вариант интуиционистского исчисления предикатов.³⁴ Далее, автор осуществляет погружение классической логики предикатов в интуиционистскую логику предикатов, позволяющее интуиционистское толкование математических понятий.

В статье "*К толкованию интуиционистской логики*", автор осуществляет погружение интуиционистской логики в язык математики, т.е. в систему классической логики, причем переменные языка последней интерпретируются как схемы задач, а семантические категории задаются в терминах существования общего решения всех задач заданной схемы. Осуществляемая Колмогоровым аксиоматизация интуиционистской логики и ее интерпретация в "семантике задач" имела важные методологические последствия относительно развития очерченного им направления математических и математикологических исследований. В 1929 г. альтернативная аксиоматизация интуиционистской логики была предложена В.И. Гливенко, а дальнейшие исследования по его исчислению задач предпринимались, в том числе, и его учеником Ю.Т. Медведевым, Б.Ю. Пильчаком, Д.П. Скворцовым.³⁵

В.А. Смирнов

Отдельные работы выдающегося отечественного логика, философа и методолога науки *Владимира Александровича Смирнова (1931-1996 гг.)*, посвященные исследованию аксиоматики и связанных с нею проблем включают: "*Генетический метод построения научной теории*"³⁶ (1962), "*Алгоритмы и логические схемы алгоритмов*"³⁷ (1963), "*Значение*

34

Там же, с. 397

35

Там же, с. 403

36

Смирнов В.А. Логико-философские труды, стр. 417-437

37

Там же, стр. 402-416

*аксиоматизации научных теорий для разработки методологии науки*³⁸ (1981), *"Логический анализ научных теорий и отношений между ними"*³⁹ (1987) и др. В двух последних упомянутых работах автор рассматривает проблему сравнения теорий, аксиоматическая структура которых отличается по различным признакам. В последней статье вводятся, уточняются и дополнительно обобщаются основные понятия (*теории, дефинициальной эквивалентности, дефинициальной вложимости, погружающей операции*⁴⁰ и др.) необходимые для формальной характеристики теорий и описания их отношений.

В статье *"Генетический метод построения научной теории"*, В.А. Смирнов излагает свою концепцию генетического метода, опираясь на его понимание у Гильберта и конструктивистов. Одно из свойств генетического метода состоит в возможности, в рамках генетически построенных теорий, оперировать их конструктивно заданными объектами как собственными объектами теории. Исходя из данного свойства, автор показывает важность генетического метода в подходе к проблемам обоснования математики и, проблемам методологии науки вообще.

38

Там же, стр. 283-286

39

Там же, стр. 381-401

40

Осуществленную впервые А.Н. Колмогоровым (см. выше).

Литература

1. Бартини Р., Кузнецов П.Г. О множественности геометрий и множественности физик // ПРОБЛЕМЫ И ОСОБЕННОСТИ СОВРЕМЕННОЙ НАУЧНОЙ МЕТОДОЛОГИИ, АН СССР УНЦ, Свердловск, 1978 г, стр. 54-65
2. Бартини Р. Соотношения между физическими величинами // Мир Бартини. Сборник статей по физике и философии, изд.«Самообразование» М. 2009 г, стр. 34-48
3. Бонола Р. Неевклидова геометрия. Критико-историческое исследование ее развития. М. Либроком 2010.
4. Евклид, Начала, перевод Д.Д. Мордухая-Болтовского. М.-Л. 1950.
5. Гильберт Д. Основания геометрии. Перевод с 7-го немецкого издания, М.-Л. 1948.
6. Каган В.Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке. Одесса, Типография Акционерного Южно-русского общества Печатного дела, 1908.
7. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика, М. Наука, 1985.
8. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей, М. URSS, 2013.

9. Кулаков Ю.И. О теории физических структур // Записки научного семинара ЛОМИ, 1983 г, т. 127, стр. 103-151
10. Кыров В.А. Проективная геометрия и феноменологическая симметрия // Журнал Сибирского федерального университета, серия: Математика и физика, 2012 г, т. 5, вып. 1, стр. 82-90
11. Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии // Сибирский математический журнал, 1998 г, март-апрель, т. 39, № 2, стр. 377-395
12. Михайличенко Г.Г., Малышев В.М. Феноменологическая симметрия и функциональные уравнения // Известия высших учебных заведений. Математика, 1994 г, № 4, стр. 21-23
13. Норден А.П., Розенфельд Б.А., Яглом И.М. Петр Константинович Рашевский (к пятидесятилетию со дня рождения) // УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, 1958 г, январь-февраль, т. XIII, вып. 1 (79)
14. Рашевский П.К. Вениамин Федорович Каган (некролог) // УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, 1953 г, сентябрь-октябрь, т. VIII, вып. 5 (57)
15. Рашевский П.К. Полиметрическая геометрия // ТРУДЫ СЕМИНАРА ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ С ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ГЕОМЕТРИИ, МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ, М-Л, 1941 г, выпуск V
16. Смирнов В.А. Логико-философские труды, М. URSS, 2010.
17. Успенский В.А., Плиско В.Е. Интуиционистская логика (комментарии к работам А.Н. Колмогорова) // Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика, М. Наука, 1985 г, стр. 394-405
18. Bos, H.J.M. «The bond with reality is cut» - Freudenthal on the Foundations of Geometry around 1900. In: Streefland, L., The Legacy of Hans Freudenthal, Springer 1993, pp. 51-58
19. Freudenthal, H. The main trends in the foundations of geometry in the 19th century, in E. Nagel c.a. (eds.), *Logic Methodology and Philosophy of Science, Proceeding' of 1960 International Congress*, Stanford U Press, 1962, p. 613-621.
20. Hintikka, J., What is Axiomatic Method? *Synthese* vol. 183 (1), 2011, p. 69-85
21. Rodin, A., *Axiomatic Method and Category Theory* (Synthese Library vol. 364), Springer 2013.

