Дарья Бойкова (МГУ) и Андрей Родин (ИФ РАН)

В. Ф. Каган — отечественный исследователь аксиоматического метода[1].

Введение: Аксиоматический метод и его история

В широком смысле аксиоматический метод можно описать как метод построения теории, предполагающий наличие двух типов суждений (аксиомы и теоремы) и отношения следования между суждениями, при котором все суждения второго типа (теоремы) оказываются следствиями суждений первого типа (аксиом). Можно также сказать, что аксиоматическая теория (то есть теория построенная с помощью аксиоматического метода) порождается своими аксиомами и правилами, по которым из аксиом выводятся теоремы. Хотя аксиоматический метод получил наибольшее распространение в математике, известны также попытки его применения в других науках включая физику и биологию.

Классическим образцом аксиоматической математической теории на протяжении многих веков оставались “Начала” Евклида. Впрочем, нужно иметь в виду, что до начала 20-го века переписчики и издатели этого труда Евклида как правило не пытались воспроизвести классический текст буквально, а старались исправить в нем те недостатки, которые они там видели. Поэтому если говорить об аксиоматической теории Евклида в конкретном историческом смысле, то эту теорию нужно отличать от всех ее позднейших модификаций. Таким образом, утверждение о том, что “Начала” служили образцом аксиоматической теории на протяжении долгих веков, на самом деле указывает на непрерывность происходящих изменений, а не на их отсутствие. Интерес к изучению “Начал” Евклида как памятника истории математики появился только во второй половине 19-го века - то есть именно тогда, когда этот классический труд окончательно перестал быть адекватным современному состоянию математики (в первую очередь в связи с развитием не-евклидовых геометрий, см. ниже). История переизданий, переводов и модификаций “Начал” Евклида до сих пор остается недостаточно исследованной. Неполный, но тем не менее весьма ценный обзор этой традиции можно найти в комментарии Д.Д. Мордухая-Болтовского к его русскому переводу “Начал” (Евклид 1950).

Открытие и развитие не-евклидовых геометрий (Бонола 2010) в 19-м веке было ключевым (хотя и не единственным) фактором, который сделал евклидову архитектуру математики заведомо неадекватной. Новая математика не могла быть втиснута в евклидовы рамки с помощью дальнейших постепенных модификаций традиционной теории. Чтобы построить новую математику аксиоматически, требовалось переосмыслить само понятие аксиоматического метода, а не просто заменить одни аксиомы на другие. Такого рода попытки были предприняты в конце 19-го - начале 20-го в рамках исследований оснований математики вообще и не-евклидовых геометрических теорий в частности. Согласно существующему сегодня широкому консенсусу, безусловного успеха в деле аксиоматизации новой математики впервые добился Давид Гильберт опубликовав в 1899-м году свою эпохальную работу “Основания геометрии” (Гильберт 1948).
В этой книге Гильберт представил свой вариант аксиоматического построения евклидовой геометрии, который радикально отличается от традиционного и который по сегодняшний день используется в математике в качестве образца современной аксиоматической теории. В этом отношении роль “Оснований геометрии” Гильберта в математике 20-го века можно сравнить с ролью “Начал” Евклида (и их модификаций) в математике предшествующих веков. Однако эта аналогия не является полной. Если “Начала” Евклида на протяжении долгого времени служили в качестве компендиума базовых математических знаний, необходимых для занятий любой более специальной областью математики (такой как,

[1] Работа подготовлена при поддержке РГНФ, исследовательский грант 13-03-00384

например, теория конических сечений), то “Основания” Гильберта никогда не претендавали на эту роль. Совершенно очевидно, что в 1899-м году евклидова геометрия уже не могла играть роль основания геометрии и тем более всей математики. Поэтому никакой новый способ построения этой старой геометрической теории в это время уже не мог сам по себе иметь большого значения для математики. Значение “Оснований” Гильберта состояло в другом: новый аксиоматический *метод*, который Гильберт использовал в этой работе, мог быть с равным успехом использован для аксиоматического построения новых теорий таким как гиперболическая геометрия Лобачевского. Кроме того, этот новый аксиоматический метод позволил ответить на вопрос о логической связи между различными теориями (в частности, евклидовой и не-евклидовой геометрией) и на другие подобные вопросы, которые вслед за Гильбертом и Бернайсом сегодня принято называть мета-математическими. Разумеется, было бы неправомерно напрямую отождествлять современный аксиоматический метод с методом “Оснований” Гильберта 1899-го года. И сам Гильберт, и последующие поколения логиков и математиков разрабатывали этот метод на протяжении последующих десятилетий различнымими способами и в различных направлениях. Однако в этом многообразии современных подходов именно “Основания” Гильберта 1899-го года остаются устойчивой точкой отсчета. В качестве примера авторитетного (но не единственного) современного взгляда на природу аксиоматического метода мы отсылаем читателя к свежей статье Хинтикки, в которой автор подчеркивает роль гильбертовых “Оснований” (Hintikka 2011). Несколько отличный взгляд на аксиоматический метод и его историю (включая новейшую историю в 21-м веке) представлен одним из авторов этой статьи в только что опубликованной монографии (Rodin 2013)

Такая исключительная роль “Оснований” Гильберта в аксиоматическом мышлении 20-го века создает специфическую трудность для изучения истории аксиоматического метода и связанных с этим эпизодов истории математики. Дело в том, что все известные реконструкции истории аксиоматического метода на рубеже 19 и 20 веков представляют собой “телеологическую историю”, то есть историю того, каким образом отдельные элементы гильбертова метода появлялись в трудах предшественников Гильберта (в частности у Клейна, Паша, Пиери и т.д.). Классической в этом отношении является работа Фрейденталя (Freudenthal 1962); полный обзор литературы по этой теме (которая весьма немногочисленна) можно найти в (Bos 1993). Мы не хотим сказать, что такой ангажированный подход к истории математики является недопустимым в принципе. Однако совершенно очевидно, что он способен прояснить генезис только одной отдельной точки зрения, и что он оставляет вне поля зрения любые альтернативные подходы. Могут ли сегодня такие альтернативные подходы к аксиоматике представлять какой-либо теоретический интерес (помимо чисто исторического интереса)? Мы считаем, что такую возможность исключать не следует. Не пытаясь поставить под сомнение историческое значение работ Гильберта в области аксиоматики, мы считаем, что есть смысл смотреть на понятие аксиоматического метода более широко, чем это делал Гильберт - как в чисто теоретическом, так и в историческом плане. Поэтому мы считаем, что история аксиоматического метода вообще, и особенно история этого метода на рубеже 19-20 веков требует более глубокого изучения - тем более, что исторические источники в последнем случае являются относительно легко доступными.

Цель этой статьи - рассказать об эпизоде новейшей истории аксиоматического метода, который до сих пор не был освещен в мировой литературе. Речь пойдет об аксиоматических исследованиях в России, начало которым положил В.Ф. Каган (1869-1953).

КАГАН ВЕНИАМИН ФЕДОРОВИЧ (1869-1953)

1. Биография и основные работы[2]

В. Ф. Каган родился в городе Шавли Ковенской губернии (ныне город Шяуляй, Литва). В 1887 году поступил на физико-математический факультет Одесского университета, в 1892 — сдал государственные экзамены в Киевском университете, в 1894 — магистерские экзамены в Петербурге. В течение своей жизни Каган преподает математику в средней школе, в Одесском и Московском Университетом, выходит ряд его статей, посвященных методике преподавания математики[3]. В течение 30 лет он руководит кафедрой дифференциальной геометрии Московского Университета (с момента ее создания в1922 г. до 1952 г.). В 20-х-30-х гг. в Московском Университете школа Кагана развивает методы тензорного анализа и римановой геометрии[4]. В 1927 г. В. Ф. Каган организовывает семинар по векторному и тензорному анализу, с 1933 года и до сих пор выходят «Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике»[5]

Кроме тензорной дифференциальной геометрии к области интересов Кагана относится проблематика оснований геометрии. Известен он и как исследователь истории аксиоматического метода и неевклидовых геометрий. С 1893 печатается по частям «Очерк геометрической системы Лобачевского» в «Вестнике опытной физики и элементарной математики»[6]. В 1904 года в «Вестнике...» также по частям выходит его работа «*Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии*» . В 1908 году Каган защищает магистерскую диссертацию на тему «Основания геометрии». Речь, произнесенная Каганом при защите диссертации на степень магистра чистой математики, была издана в том же году под названием *«Задача обоснования геометрии в современной обстановке»*. В этой речи приводятся доводы в пользу построения и преподавания геометрии как аксиоматической системы.

Помимо научной работы и преподавания Каган принимает участие в работе издательств, занимается редакторской деятельностью. С 1904 до 1917 г. он является редактором одесского журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики». В 1904 году Каган участвует в создании издательства «Матезис» в Одессе, возглавляет научную комиссию издательства[7]. В рамках работы издательства «Матезис» были изданы работы выдающихся математиков - Дедекинда, Больцано, Пуанкаре[8]. Каган выступает редактором перевода книги Пуанкаре «Наука и метод». С 1928 г. Каган принимает участие в написании статей по математике для «Большой Советской Энциклопедии». В 1944 г. выходит написанная Каганом научная биография Лобачевского, а с 1946 года Каган - главный редактор полного собрания сочинений Лобачевского.

2. Исследования в области истории математики

---

2 Подробне см. Рашевский П. К. Каган В. Ф.(Некролог)

3 Например, Каган В. Ф. К предстоящему II-му Всероссийскому Съезду преподавателей математики // «Вестник опытной физики и элементарной математики», 1913 г., выпуск № 595, стр. 187—192)

Каган В. Ф. К реформе преподавания математики в средней школе. IV. Соображения относительно постановки дела подготовления учителей математики в средних учебных заведениях // «Вестник опытной физики и элементарной математики», 1912 г., выпуск № 565, стр. 2—11 и др.

4 http://dfgm.math.msu.su/about.php

5 http://dfgm.math.msu.su/about.php

6 На сайте http://vofem.ru/ru/ в электронном виде представлен архив номеров «Вестника»

7 Рикун (Штейн) Инна Эмильевна К истории одесского книгоиздательства «Матезис» (1904-1925) // Опубликовано в журнале «Мир библиографии», 2003, N 6, с. 32-36

8 http://www.mathesis.ru/books.php?area=9999&sort=yearasc

В работах, посвященных истории математики (см, например, «Основания геометрии. Т. II. Исторический очерк развития учения об обоснованиях геометрии» (1904), «Архимед. Краткий очерк о жизни и творчестве» (1949, 1951) и др.), Каган акцентирует внимание на развитии представлений об основаниях геометрии. «Начала» Евклида становятся для Кагана предметом внимательного анализа.

Каган формулирует ряд недостатков «Начал», которые будут воспроизводится и у последующих авторов, и заключает, что основания, на которых базируется геометрия Евклида, слабы. На многие из этих недостатков обращали внимание еще комментаторы Евклида. Ниже перечень изъянов, приводимых Каганом[9].

Во-первых, бессодержательность определений. Главный критерий правильности определения, согласно Кагану, - возможность его использования в ходе построения геометрии, в ходе проведения доказательств. Определения Евклида, вследствие своей расплывчатости, не соответствуют этому критерию. Комментаторы Евклида предлагали альтернативные определения основных понятий. Но в целом, их задача — не выявление круга базовых терминов геометрии, а скорее переинтерпретация и объяснение терминов, используемые Евклидом[10]. Среди комментаторов Каган выделяет арабского астронома и математика Аль-Наиризи (Анариция). Определения, которые он приводит, указывают свойства, которые можно использовать в дальнейшем исследовании. Его определение прямой как линии, которая «остается неподвижной, коль скоро остаются неподвижными две ее точки», используется в работах М. Пиери и С. Ли по основаниям геометрии[11]. Определения Лежандра, напротив, Каган считает столь же бессодержательными, как и евклидовы[12].

Во-вторых, недостаточность аксиом и постулатов (а также использование «лишних» постулатов: например, постулат о равенстве всех прямых углов доказывается[13], в частности Анарицием[14]). Список постулатов и аксиом варьирует в разных списках и изданиях «Начал». Число аксиом становится особенно внушительным в работах средневековых комментаторов[15]. Выделялся рад свойств пространства: трехмерность, бесконечность, непрерывность, однородность, делимость до бесконечности[16]. Многие из этих свойств закрепляются также за плоскостью. Каган находит формулировки этих аксиом неясными[17].

В-третьих, использование интуиции в ходе построения геометрии. «Начала» не являются *формальным* построением геометрии: Евклид недостаточное внимание уделил выявлению исходных положений, а также часто обращается к интуиции. “Начала» Евклида - «пестрая смесь логики и интуиции»[18]. Каган подчеркивает, что интуиция, использовавшаяся в ходе доказательств в конечном итоге базируется на визуальных образах и представлениях.

Каган заключает, что «Начала» выполняют прежде всего функцию систематизации имеющегося знания и проведение доказательств, «убедительных для глаз»[19]. История развития учения об основаниях геометрии была направлена на то, чтобы «освободить

9 см. Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 11;
Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 380, стр. 176—184; № 381, стр. 201—208
10 Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 381), стр. 206
11 Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 381), стр. 206
12 Каган В. Ф. Исторический очерк... (1905 г., выпуск № 391), стр. 154
13 Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 380), стр. 183
14 Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 381), стр. 207
15 Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 381), стр. 207
16 Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 381), стр. 207
17 Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 381), стр. 208
18 Каган В. Ф. Лобачевский, с. 160
19 Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 380), с.. 184

систему геометрии от тех многочисленных, неясных, ничего не выражающих представлений, которыми изобиловало изложение этой дисциплины в прежние века»[20]. Среди математиков, работавших в области оснований геометрии Каган называет Ампера, Лейбница, Декарта, Лагранжа, Лежандра, Фурье, Гаусса.

Отдельно следует сказать об исследованиях Кагана, предметом которых стала неевклидова геометрия.

О роли неевклидовых геометрий

Неевклидовой геометрии Каган посвятил ряд трудов: «Очерк геометрической системы Лобачевского", "Геометрические идеи Римана и их современное развитие», «Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи», «Развитие интерпретаций неевклидовой геометрии» и многие другие. Кроме того, Каган выступал редактором собрания сочинений Лобачевского, был автором вступительных статей, комментариев и приложений к трудам Лобачевского и Я. Бойяи.

В «Историческом очерке...» Каган излагает историю пятого постулата и дает обзор его «доказательств». К четырем типам доказательств пятого постулата, приведенных в работе В.Буняковского «Параллельные линии» (доказательства с помощью построений, доказательства, основанные на теории бесконечно малых, доказательства, опирающиеся на принцип однородности, доказательства, основанные на представлениях, заимствованных из механики[21]), Каган добавляет пятый: ряд авторов для того, чтобы решить проблему пятого постулата, предлагают изменить определение параллельных линий[22].

Большинство доказательств пятого постулата проводятся «от противного». Ошибка большинства авторов, предпринимавших попытки доказательства, заключается в том, что принимая допущение, которое не согласуется с нашими представлениям, они получали следствия из этого допущения, расходящееся с нашими представлениями еще сильнее, что трактовалось ими как противоречие. Однако, как подчеркивает Каган, противоречие нашим представлениям еще не есть логическое противоречие[23].

Каган излагает историю неевклидовой геометрии, подробно останавливаясь на исследованиях К.Ф.Гаусса, Ф.Вахтера, Ф.Швейкарта (примечательно, что Швейкарт некоторое время работал в Харьковском университете), его племянника Тауринуса, отца и сына Бойяи, Н.И.Лобачевского. В «Историческом очерке...» подчеркивается тот факт, что идеи Лобачевского и Бойяи не находили сочувствия среди современников. Каган видит причину непростой судьбы неевклидовой геометрии в устоявшемся понимании сущности математики. Суждения математики (особенно геометрии) всегда связывались с некоторым «субстратом», «субстанцией». Пространство, изучаемое геометрией, фактически отождествлялось с реальным пространством. Когда геометрию называли формальной наукой, но под этим подразумевалось лишь то, что «свойства пространства логически выводятся из небольшого числа основных его свойств»[24]. Фактически же «логический» вывод подразумевал использование интуиции. Принятие мнимых чисел математическим сообществом сопровождалось такими же затруднениями, что и принятие неевклидовой геометрии.

Наличие математических объектов, не имеющих соответствующего представления в

---

[20] Каган В. Ф. Этюды по основаниям геометрии, с. 175
[21] Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 383), стр. 242
[22] Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 383), стр. 245
[23] Каган В. Ф. Исторический очерк... (1904 г., выпуск № 383), стр. 245
[24] Каган В. Ф. Исторический очерк... (1905 г., выпуск № 392), стр. 169

«реальном» мире ставит вопрос о сущности математики. Согласно Кагану, математические теории, во-первых, являются формальными (т. е. связывание математических конструкций с каким-либо «субстратом» неправомерно), во-вторых, являются продуктом «свободного творчества человеческого духа», которым руководит целесообразность, а не необходимость, в-третьих, математических теорий может быть множество, многие из них могут найти себе приложение[25].

Доказательство и интуиция

Свою речь, произнесенную при защите диссертации на степень магистра чистой математики Каган начинает с «доказательства» индийского математика Ганези. Ганези доказывает теорему о том, что площадь круга равна площади прямоугольника, основанием которого служит полуокружность, а высотой — радиус этого круга. Доказательством служит чертеж, сопровожденный надписью «Смотри»[26]. По мнению Кагана, такая наивная апелляция к интуиции указывает на «младенческое состояние геометрии».

Однако в современной практике преподавания математики мы находим настолько же наивные обращения к интуиции. В той же речи Каган приводит доказательство теоремы «из точки на прямой можно на плоскости восстановить к ней один и только один перпендикуляр»[27] из учебного пособия (более того, одного из лучших сочинений такого рода, по мнению Кагану). Анализируя его, показывает, что при построении вывода автор апеллирует к интуиции читателя, к интуитивным представлениям человека о движении и непрерывности. Такая апелляция неправомерна: если мы пользуемся понятием движения в геометрическом доказательстве, считает Каган, мы должны указать те свойства движения, которые мы будем использовать в ходе доказательства. Рассуждения индийского математика и русского составителя учебного пособия Каган отказывается считать математическими доказательствами.

Каким же должно быть математическое доказательство, согласно Кагану? «Доказать предложение B при помощи системы A, - пишет он, - значит, обнаружить, что принимая систему предложений A, мы вынуждены, в силу законов нашего мышления, принять предложение B». Если же система аксиом A не дана, то доказать B — значит, «показать, что принимая неизвестно что, я вынужден признать положение B»[28]. Таким образом, наличие явно выявленной системы посылок является необходимым условием для того, чтобы считать некоторое рассуждение математическим доказательством. Каган не отрицает, что с помощью интуиции можно получить столь же достоверные результаты, как и с помощью доказательства, но полученные результаты будет затруднительно включить в систему существующих знаний. Он акцентирует внимание на том, что задача науки — не только обнаружение фактов, но и их упорядочивание, организация, позволяющая прояснить связи между ними, что, в конечном итоге, позволяет установить «принципы науки» - «факты, которые обуславливают все остальные»[29].

Кроме того, интуиция легко может вводить в заблуждение, как это было с неевклидовой геометрии, где логика и интуиция принципиально не могли быть согласованы между собой. Подобного рода интуицию — интуицию, основанную на наших представлениях о пространстве, на визуальных образах, — Каган называет геометрической. Ее устранение из математики осуществимо и, более того, осуществлено в работах Гильберта и самого Кагана.

[25] Каган В. Ф. Исторический очерк... (1905 г., выпуск № 392), стр. 171
[26] Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 2
[27] Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 6
[28] Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 5
[29] Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 6

Говоря о своей работе «Основания геометрии. Опыт обоснования Евклидовой геометрии», Каган утверждает, что в ней «интуиции нет, как нет и чертежей»[30].

Но не всякая интуиция может быть устранена из геометрии. Помимо геометрической интуиции, Каган выделяет логическую интуицию. Логическая интуиция неустранима из математики: для того, чтобы строить логический вывод необходимо как минимум различение понятий[31]. Логическая интуиция обеспечивает возможность рассуждения в принципе (не только математического доказательства). Полемизируя с Н. Извольским — автором статьи «Интуиция в работе Д.Гильберта», Каган встает на защиту Гильберта, утверждая, что в его работе нет геометрической интуиции, а только логическая. Работы Рассела и Уайтхеда Каган рассматривает как попытки минимизировать логическую интуицию, указав круг необходимых для математических рассуждений логических понятий[32].

Формализм Кагана

Глубокое убеждение Кагана состоит в том, что математика — наука формальная. Среди ученых, наиболее полно осознавших формальный характер математики, он выделяет немецкого физика и математика Г. Грассмана, который в своем сочинении «Учение о линейном протяжении» 1844 года разделяет все науки на реальные и формальные. В отличие от реальных наук формальные науки "имеют своим предметом то, что установлено самим мышлением, а истину свою видят в согласованности мыслительных процессов между собой"[33]. К формальным наукам он относит логику и математику: логика исследует всеобщее, математика — частное, особенное. Каган высоко оценивает арифметику, построенную Грассманом, где «теория рациональных чисел была построена строго научно и формально»[34]. Отчасти Каган принимает разделение Грассмана, когда говорит о конкретном (реальном) и формальном мышлении. Предмет конкретного мышления — определенные вещи и события, его задача — выделение свойств этих объектов, формальное мышление устанавливает факты, необходимые при принятии других фактов[35].

Несмотря на то, что за математикой и за геометрией в частности закрепилась слава науки дедуктивной, использующей логически безупречные доказательства, базирующиеся на немногих утверждения — аксиомах, в действительности есть основания усомниться в адекватности такого образа[36]: широкое использование интуиции, невыявленность исходных посылок. Задача Кагана состоит в том, чтобы, выявив основания геометрии, построить ее как формальную дедуктивную науку. Геометрия должна исходить из некоторых терминов и из предложений, из которых «она разматывается по законам силлогистики, путем последовательного замещения терминов, совершенно независимо от того содержания, которое в эти термины вкладывается»[37]. Каган также указывает на конвенциональный характер геометрии. Он пишет, что 1870-80е годы выяснилось, что геометрия — лишь «ряд соглашений, которыми мы удобно выражаем обширную категорию соотношений между физическими телами»[38].

---

[30] Каган В. Ф. К статье Н. Извольского "Интуиция в работе Гильберта» // Вестник опытной физики и элементарной математики, с. 323

[31] Каган В. Ф. По поводу интуиции в новой геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики №569, с. 122

[32] Каган В. Ф. По поводу интуиции в новой геометрии, с. 124

[33] Грассман Г. Логика и философия математики. Избранное, с. 78

[34] Каган В. Ф. Исторический очерк... (1905 г., выпуск № 392), стр. 174

[35] Каган В. Ф. Введение в учение об основаниях геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики (1917 г., выпуск №662), с. 38

[36] Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 3

[37] Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 20

[38] Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 32

Каган мыслит свою работу «Основания геометрии» в одном русле с работами по основаниям геометрии Пиери, Гильберта, Леви-Чивита. Каган был знаком с «Основаниями геометрии» Гильберта и высоко их оценивал (хотя считал незаслуженным считать Гильберта первым автором, предложившим систему постулатов, которые позволяли формально развить геометрию[39]). В 1901 г., спустя 2 года после выхода в свет «Оснований геометрии», Каган так отзывается о работе Гильберта: «классическая работа, далеко оставляющая за собой все, что было сделано до сих пор в смысле построения цельной геометрической системы»[40]. В “Этюдах по основаниям геометрии» Каган сопоставляет постановки различных вопросов у Гильберта и других авторов, рассматриваются и проблемы, Гильбертом не затронутые[41].

Во «Введении в учение об основаниях геометрии» Каган говорит о том, что геометрия требует логического, дедуктивного и формального построения, и раскрывает каждый из этих терминов[42]. Итак, геометрия развивается, во-первых, логически, поскольку не нуждается в каких-либо наглядных представлениях. Во-вторых, дедуктивно, поскольку построение происходит с помощью силлогистического вывода. В-третьих, формально, поскольку ни определения, ни постулаты, ни полученные путем вывода утверждения не связаны с реальными объектами.

Кроме того, формальное построение геометрии открывает широкие перспективы для ее использования в приложениях. Формальная система, не связанная ни с каким реальным «субстратом», может быть по-разному проинтерпретирована. Как евклидова, так и неевклидова геометрия имеет множество интерпретаций. Помимо непротиворечивости системы аксиом и их независимости друг от друга, Каган вводит следующее требование к принципам построения геометрии: основоположения геометрии должны быть таковы, чтобы было возможно перенесение их на другие многообразия[43].

Заключение

Подход Кагана к аксиоматическому методу был воспринят и развит в работах его учеников — П.К. Рашевского, И.М.Яглома, В.В.Вагнера. Это позволяет говорить об отечественной школе аксиоматических исследований математики, которая имеет свою специфику отличающую ее от зарубежных аналогов. Сильной стороной этой школы, которая может иметь ценность для мировой науки, нам представляется ее ориентация на естественно-научные приложения — прежде всего физические приложения. Исследование этой оригинальной школы отечественной научной мысли, на наш взгляд, представляет собой важную задачу, над которой авторы этой статьи сейчас активно работают.

39 Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 54
40 Каган В. Ф. Этюды по основаниям геометрии, с. 174
41 Каган В. Ф. Этюды по основаниям геометрии, с. 175
42 Каган В. Ф. Введение в учение об основаниях геометрии, с. 36-37
43 Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке, с. 33

Библиография:

1. Аристотель. Аналитики первая и вторая. Перевод с греческого. Государственное издательство политической литературы, 1952.
2. Бонола Р. Неевклидова геометрия. Критико-историческое исследование ее развития. М. Либроком 2010
3. Евклид, Начала, перевод Д.Д. Мордухая-Болтовского. М.-Л. 1950
4. Гильберт Д. Аксиоматическое мышление // Избранные труды, Т. 1
5. Гильберт Д. Об основаниях логики и арифметики // Избранные труды, Т. 1
6. Гильберт Д. Познание природы и логика // Избранные труды, Т. 1
7. Гильберт Д. Основания геометрии. Перевод с 7-го немецкого издания, М.-Л. 1948
8. Грассман Г. Логика и философия математики. Избранное: пер. с нем. / Герман Грассман, Роберт Грассман; [отв. ред. Л.Г. Бирюкова, З.А. Кузичева]; Ин-т философии РАН. - М.: Наука, 2008. - 503 с. - (Памятники философской мысли). - ISBN 978-5-02-033858-6 (в пер.)
9. Каган В. Ф. Введение в учение об основаниях геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики (1916 г., выпуск № 662, стр. 34—39; № 663, стр. 49—58; № 664—665, стр. 73—88; № 666, стр. 121—125; № 669—670, стр. 205—221; № 671—672, стр. 225—235)
10. Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке. Одесса, Типография Акционерного Южно-русского общества Печатного дела, 1908.
11. Каган В. Ф. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики (1904 г., выпуск № 380, стр. 176—184; № 381, стр. 201—208; № 383, стр. 241—249; № 384, стр. 265—275; 1905 г., выпуск № 387, стр. 49—57;№ 391, стр. 153—156; № 392, стр. 169—176; № 395, стр. 248—253; № 396, стр. 272—278; № 402, стр. 121—128; № 403, стр. 145—150)
12. Каган В. Ф. К статье Н. Извольского “Интуиция в работе Гильберта» // Вестник опытной физики и элементарной математики (1912 г., выпуск № 563—564, стр. 322—323)
13. Каган В. Ф. Лобачевский. Издательство Академии Наук СССР, Москва-Ленинград, 1948 г.
14. Каган В. Ф. По поводу интуиции в новой геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики (1912 г., выпуск №569, с. 122-126)
15. Каган В. Ф. Этюды по основаниям геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики, (1901 г., выпуск № 308, стр. 174—185; № 311, стр. 254—260; № 312, стр. 286—192)
16. Прокл
17. Рашевский П. К. Вениамин Федорович Каган (некролог) // УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, 1953 г, сентябрь-октябрь, т. VIII, вып. 5 (57)
18. Рид К. Гильберт
19. Рикун (Штейн) Инна Эмильевна К истории одесского книгоиздательства «Матезис» (1904-1925) // Опубликовано в журнале «Мир библиографии», 2003, N 6, с. 32-36.
20. Яновская С. А. Методологические проблемы науки.
21. http://dfgm.math.msu.su/about.php (сайт кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ)
22. http://www.mathesis.ru/about.php (архив одесского издательства «Матезис»)
23. http://vofem.ru/ru/ (архив «Вестника опытной физики и элементарной математики»)
24. Bos, H.J.M. «The bond with reality is cut» - Freudenthal on the Foundations of Geometry around 1900. In: Streefland, L., The Legacy of Hans Freudenthal, Springer 1993, pp. 51-58
25. Freudenthal, H. The main trends in the foundations of geometry in the 19th century',in E. Nagel c.a. (cds.), *Logic Methodology and Philosophy of Science, Proceeding' of 1960 International Congress,* Stanford U Press, 1962, p. 613-621.

26. Hintikka, J., What is Axiomatic Method? Synthese vol. 183 (1), 2011, p. 69-85
27. Rodin, A., Axiomatic Method and Category Theory (Synthese Library vol. 364), Springer 2013