

# Лобачевский и его “Воображаемая Геометрия”

Андрей Родин

школа 43, выпуск 1982

2 декабря 2025

## План:

- 1 Как возможна история математики?
- 2 История математики в России:
- 3 Лобачевский и Казанский университет
- 4 Геометрия Лобачевского в современном изложении:  
аксиоматическая теория и ее модели
- 5 Геометрия Лобачевского в изложении Лобачевского: прыжок во  
вторую половину 20го века.
- 6 Заключение

- 1 Как возможна история математики?
- 2 История математики в России:
- 3 Лобачевский и Казанский университет
- 4 Геометрия Лобачевского в современном изложении:  
аксиоматическая теория и ее модели
- 5 Геометрия Лобачевского в изложении Лобачевского: прыжок во  
вторую половину 20го века.
- 6 Заключение

# Изобретение или открытие?

$$2 \times 2 = 4$$

вчера, сегодня и завтра?

# Изобретение счета: кость из Лебомбо, возраст около 44 тысяч лет



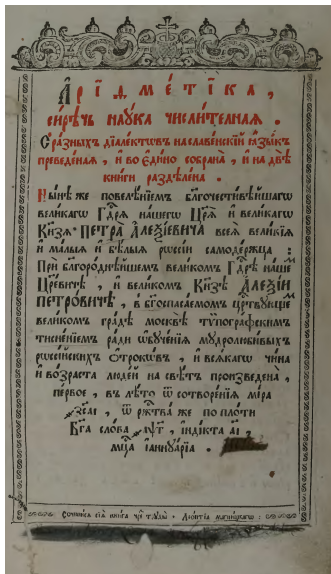
# Изобретение счета: расчет количества пива, возраст около 4 тысяч лет



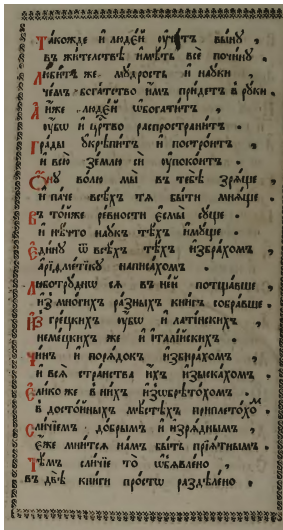
Математика (на русском языке в единственном числе!) едина через культурное, историческое и теоретическое разнообразие.

- 1 Как возможна история математики?
- 2 История математики в России:
- 3 Лобачевский и Казанский университет
- 4 Геометрия Лобачевского в современном изложении: аксиоматическая теория и ее модели
- 5 Геометрия Лобачевского в изложении Лобачевского: прыжок во вторую половину 20го века.
- 6 Заключение

# “Арифметика” Леонтия Магницкого (1703), тираж 2400



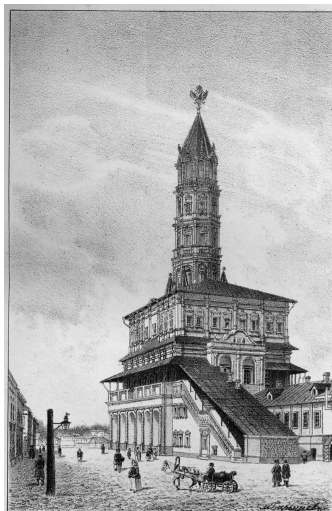
# “Арифметика” Леонтия Магницкого (1703), тираж 2400



# “Арифметика” Леонтия Магницкого 1703, репринт 1914



# Московская школа математических и навигацких наук (1701-1753)



Дом навигацкая.



- 1 Как возможна история математики?
- 2 История математики в России:
- 3 Лобачевский и Казанский университет
- 4 Геометрия Лобачевского в современном изложении:  
аксиоматическая теория и ее модели
- 5 Геометрия Лобачевского в изложении Лобачевского: прыжок во  
вторую половину 20го века.
- 6 Заключение

# Николай Иванович Лобачевский (1792-1856)



## Николай Иванович Лобачевский (1792-1856):

Родился в Нижнем Новгороде в семье мелкого чиновника (служащего межевой конторы Ивана Максимовича Лобачевского).

Мать - Прасковья Александровна. Есть основанная на архивных источниках версия о том, что отцом Н.И. был коллега мужа матери капитан Сергей Степанович Шебаршин.

## Николай Иванович Лобачевский (1792-1856):

Родился в Нижнем Новгороде в семье мелкого чиновника (служащего межевой конторы Ивана Максимовича Лобачевского).

Мать - Прасковья Александровна. Есть основанная на архивных источниках версия о том, что отцом Н.И. был коллега мужа матери капитан Сергей Степанович Шебаршин.

Именем Лобачевского с 1956го года назван Нижегородский гос. университет (а не Казанский университет, с которым была связана вся профессиональная карьера Н.И.)

# Вехи биографии

Учился вместе с братьями Александром и Алексеем в Казанской гимназии (основана в 1758) за казенный счет. В 1805 был открыт Казанский императорский университет. В 1807 в возрасте 15 лет Н.И. вместе с братьями был зачислен в этот университет. В 1810-1811 был на грани отчисления (пиротехнические опыты, “мечтательное о себе самомнение”, “признаки безбожия”), но его спасло заступничество профессора математики Мартина Бартельса и профессора физики Франца Броннера. В 1814 (в возрасте 21 года) при поддержке этих двух профессоров Н.И. получил должность преподавателя (адъюнкта) чистой математики в Казанском университете.

## Вехи биографии (продолжение)

В 1819 в Казанский университет посетил с ревизией Михаил Леонтьевич Магницкий (правнук автора “Арифметики”), после чего добился увольнения большого числа профессоров, прежде всего иностранного происхождения. В частности, был уволен Бартельс, и вместо него деканом физико-математического отделения университета стал Н.И. Лобачевский. Лобачевский оказывается успешным на административном поприще, и в 1827 становится ректором Казанского университета. Н.И. руководил университетом до 1946, когда в Санкт-Петербурге в очередной раз сменилось начальство

## Работы по основаниям геометрии:

- *Основание геометрии* (1819) и *Геометрия* (1823). Получен отрицательный отзыв от академика Николая Ивановича Фусса (1755-1826), рукопись впервые опубликована посмертно в 1909 первым биографом Н.И. Лобачевского Александром Васильевичем Васильевым (1853-1929).
- *Короткое изложение принципов геометрии* (1826) и *Об основаниях геометрии* (1829-1830). Получен отрицательный отзыв от академика Михаила Васильевича Остроградского. Опубликовано по частям в “Казанском вестнике”.
- *Новые основания геометрии* (1835-38), опубликовано по частям в “Ученых записках” Казанского университета — реформированной версии “Вестника”.

## Работы по основаниям геометрии (продолжение):

- *Воображаемая геометрия (1835 и 1837)*
- *Геометрические исследования по теории параллельных линий (1840). Реакция Фридриха Гаусса.*
- *Пангеометрия (1855 и 1856). Продолжение Геометрических исследований.*

# “Editio princeps”:

Собрание сочинений в пяти томах (Государственное Издательство технико-теоретической литературы 1946-1951)

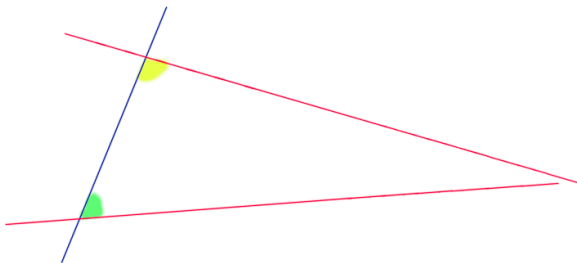
под общей редакцией Вениамина Федоровича Кагана (1869-1953).

## В.Ф. Каган (1869-1953)



- 1 Как возможна история математики?
- 2 История математики в России:
- 3 Лобачевский и Казанский университет
- 4 Геометрия Лобачевского в современном изложении:  
аксиоматическая теория и ее модели
- 5 Геометрия Лобачевского в изложении Лобачевского: прыжок во  
вторую половину 20го века.
- 6 Заключение

# Постулат 5 “Начал” Евклида (начало 3го века до н.э.)



## “Аксиома параллельных”

Через точку не лежащую на данной прямой проходит не более одной прямой параллельной данной прямой.

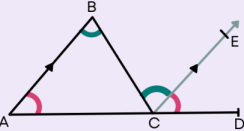
Существование такой параллельной прямой не нужно постулировать, его можно доказать не используя Аксиомы Параллельных. (Как?)

# Роль аксиомы параллельных в Евклидовой геометрии:

Без нее нельзя доказать, в частности, теорему о сумме внутренних углов треугольника:

**Exterior Angle Theorem**

The below diagram shows the proof of the exterior angle theorem:



$\angle ABC$  is alternate to  $\angle BCE$ , therefore they are equal

$\angle BAC$  is corresponding to  $\angle ECD$ , therefore they are equal

This proves that exterior angles of a triangle are equal to the sum of its opposite interior angles

# Давид Гильберт (1862-1943)



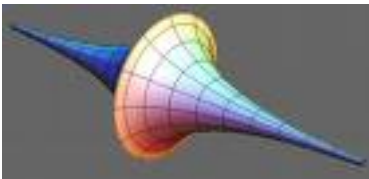
## Современный аксиоматический метод (с 1899)

Из письма Гильберта к Готлобу Фреге (1848-1925) около 1900:

“Вы говорите, что мои понятия, например, “точка”, “между”, не являются однозначно фиксированными [...]. Но конечно же, самоочевидно, что каждая теория это всего лишь каркас или схема понятий вместе с их необходимыми отношениями друг к другу, и что основные элементы могут быть истолкованы как угодно. Если я буду думать о своих точках как о той или иной системе вещей, например, системе любви, права или трубочистов [...], а затем рассматривать все мои аксиомы как отношения между этими вещами, то мои теоремы, например, теорема Пифагора, будут справедливы и для этих вещей. Другими словами, каждая теория всегда может быть применена к бесконечному числу систем основных элементов. Ведь нужно просто применить взаимно-однозначное преобразование и установить, что аксиомы для преобразованных вещей будут соответственно подобны.”

## Эуженио Бельтрами 1872:

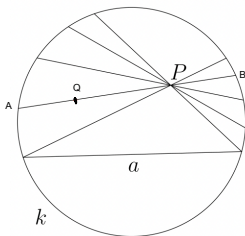
Отрезки прямых в геометрии Лобачевского как геодезические линии на *псевдосфере* в Евклидовом пространстве (ср. случай сферической геометрии):



## Модель Клейна-Бельтрами:

A, B - “идеальные” точки за горизонтом.

$$|QP|_L = \frac{R}{2} \ln \frac{|PA| \cdot |BQ|}{|QA| \cdot |BP|}$$



## Маршалл Стоун в 1961:

“Главным открытием, из которого возник наш современный взгляд на математику как на совершенно абстрактную, строго логическую и совершенно автономную дисциплину, стало открытие неевклидовой планиметрии двумя Больями, Гауссом и Лобачевским в начале девятнадцатого века.”

- 1 Как возможна история математики?
- 2 История математики в России:
- 3 Лобачевский и Казанский университет
- 4 Геометрия Лобачевского в современном изложении:  
аксиоматическая теория и ее модели
- 5 Геометрия Лобачевского в изложении Лобачевского: прыжок во  
вторую половину 20го века.
- 6 Заключение

## Понимание геометрии Лобачевским

Геометрия это искусство измерения пространства использующее алгебру и математический анализ для произведения расчетов. С точки зрения Лобачевского (который следует французскому математику Далабмеру (1717-1783), соавтору философа Дениса Дидро (1713-1784) в их *Энциклопедии*) традиционное аксиоматическое построение геометрии в духе Евклида искажает смысл этой науки. Лобачевский нигде не выделяет аксиом, и часто даже не выделяет определения, теоремы и их доказательства.

## Эмпирическая проверка Пятого постулата Евклида (Аксиомы Параллельных)

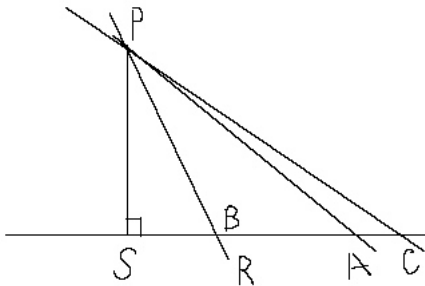
Лобачевский не видит достаточных оснований, чтобы считать Пятый Постулат или любое эквивалентное ему утверждение эмпирически истинным на больших расстояниях.

Чтобы проверить эту гипотезу он вычисляет сумму углов треугольников с вершинами связанными с Землей (наблюдателем), Солнцем и Сириусом, используя доступные ему астрономические данные. Несмотря на ошибочные данные и ошибки в вычислениях (Лобачевский “потерял два нуля” и ошибся на два порядка), он приходит к правильному выводу, что имеющиеся данные не позволяют решить вопрос об евклидовости физического пространства.

# “Воображаемая геометрия”?

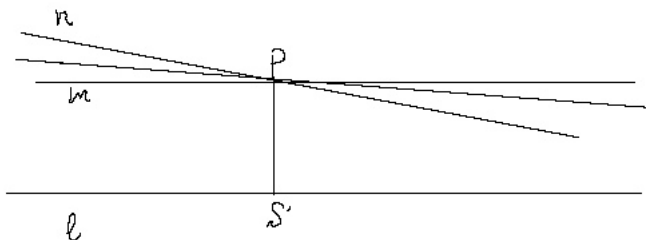
О воображаемой геометрии Л. говорит тогда, когда речь идет об аппарате гиперболической тригонометрии, который имеет приложения за пределами геометрии (как и классическая евклидова тригонометрия).

## Интуитивное построение 3х-мерной гиперболической геометрии: секции



# Интуитивное построение 3х-мерной гиперболической геометрии: параллельные Лобачевского

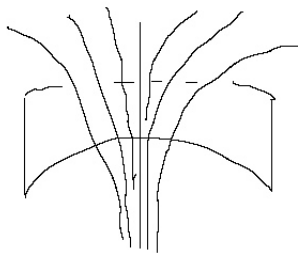
ровно две параллельные



## Интуитивное построение 3х-мерной гиперболической геометрии: орисфера

Нормальная поверхность к пучку параллельных.

На орисфере выполняется Аксиома Параллельных! Это позволяет Лобачевскому построить аппарат гиперболической тригонометрии по аналогии с плоской и сферической тригонометрией.



## Скачок во вторую половину 20го века

Атанас Пападопулос: исследования Лобачевского по определению объемов тел в гиперболическом пространстве получили продолжение только в 1970-х годах.

В этой области остается много нерешенных задач и открытых гипотез.

- 1 Как возможна история математики?
- 2 История математики в России:
- 3 Лобачевский и Казанский университет
- 4 Геометрия Лобачевского в современном изложении:  
аксиоматическая теория и ее модели
- 5 Геометрия Лобачевского в изложении Лобачевского: прыжок во  
вторую половину 20го века.
- 6 **Заклучение**

# Заклучение

# Заклучение

- Математические результаты не определяют ответы на философские вопросы о математике.

# Заклучение

- Математические результаты не определяют ответы на философские вопросы о математике.
- История математики способна преподнести сюрпризы!

# Литература:

# Литература:

- Лаптев Б. Л. *Н. И. Лобачевский и его геометрия*. Москва:Просвещение, 1976.

## Литература:

- Лаптев Б. Л. *Н. И. Лобачевский и его геометрия*. Москва:Просвещение, 1976.
- Seth Brather, *Lobachevsky Illuminated*, MAA Publishing 2011.

# Литература:

- Лаптев Б. Л. *Н. И. Лобачевский и его геометрия*. Москва:Просвещение, 1976.
- Seth Brather, *Lobachevsky Illuminated*, MAA Publishing 2011.
- А.В. Васильев, *Николай Иванович Лобачевский*, Москва:Наука 1992 (и новое дополненное издание 2025 в издательстве Канон+)

# Литература:

- Лаптев Б. Л. *Н. И. Лобачевский и его геометрия*. Москва:Просвещение, 1976.
- Seth Brather, *Lobachevsky Illuminated*, MAA Publishing 2011.
- А.В. Васильев, *Николай Иванович Лобачевский*, Москва:Наука 1992 (и новое дополненное издание 2025 в издательстве Канон+)
- *Геометрические исследования*. Собрание соч. том. 1, Государственное Издательство технико-теоретической литературы 1946. Вступительная статья и комментарии В.Ф. Кагана

СПАСИБО!

[philomatica.org](http://philomatica.org)