

hier ersichtlich, worauf die Annahme des Archimedes begründet ist. Nach dem Vorbilde der krummen Linien muss man die Grösse der Flächen beurteilen, aber keineswegs darf man behaupten, sehr kleine Theile seien geeignet, eben gemacht zu werden.

Für Flächen, die von krummen Linien begränzt sind, und für Körper, die von krummen Flächen begränzt sind, giebt es eben- [32 falls keine Messung im strengen Sinne, sobald im ersten Falle ein Quadrat, im zweiten ein Würfel als Mass dienen soll. Da wir [233 jedoch immer nur die Gränze zu finden beabsichtigen, der sich die wirkliche Messung nähert, so müssen wir zeigen, dass wir sicher jedesmal zu einer derartigen Gränze gelangen; ferner müssen wir erklären, in welcher Art wir uns die Messung vorzustellen haben und wie wir dabei die verlangte Genauigkeit erreichen können. Sollen alle diese Forderungen erfüllt werden, so kann man unmöglich ohne besondere Hilfsannahmen auskommen, die man als Axiome annimmt:

1) Flächenräume sind gleich, wenn der eine von ihnen in der Weise zusammensetzbar ist, dass der andre in Theile zerlegt wird, die in neuer Anordnung zusammengefügt werden;

2) Ein Flächenraum ist kleiner als ein solcher, in dem er ganz Platz hat, ohne dabei diesen vollständig auszufüllen;

3) Die Grösse eines Dreiecks verschwindet bei unbegrenzter Verkleinerung einer Seite.

Die letzte Annahme ist sogar bei der Messung der Flächenräume selbst nothwendig. Auf ähnliche Axiome muss man sich auch bei der Messung von Körpern stützen.

Kapitel I.

[236
33

Die ersten Begriffe in der Geometrie.

§ 1.

Die Berührung bildet das unterscheidende Merkmal der Körper, und ihr verdanken sie den Namen: geometrische Körper, sobald wir an ihnen diese Eigenschaft festhalten, während wir alle andern, mögen sie nun wesentlich sein oder zufällig, nicht in Betracht ziehen.

Gegenstand der Beurteilung sind ausser den Körpern zum Beispiel auch Zeit, Kraft und Geschwindigkeit der Bewegung; aber der Begriff, der in dem Worte Berührung enthalten ist, bezieht sich nicht darauf. In unserm Verstande verbinden wir ihn blos mit den Körpern, wenn wir von deren Zusammensetzung oder Zerlegung in Theile reden. Diese einfache Vorstellung, die wir unmittelbar in der Natur dure

die Sinne empfangen haben, geht nicht aus andern hervor und unterliegt deshalb keiner Erklärung mehr.

Zwei Körper A und B (Fig. 7), die einander berühren, bilden einen einzigen geometrischen Körper C , in dem jeder der zusammengefügte Theile A , B einzeln erscheint, ohne in dem ganzen C verloren zu gehen.

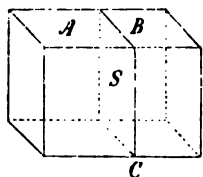


Fig. 7.

Umgekehrt wird jeder Körper C durch einen beliebigen Schnitt S in zwei Theile A und B zerlegt. Hierbei verstehen wir unter dem Worte Schnitt nicht etwa irgend eine neue Eigenschaft des Körpers, sondern wieder die Berührung, indem wir eben diesmal die Zerlegung des Körpers in zwei berührende Theile ausdrücken. Wir werden ferner die beiden Theile A und B die Seiten des Schnittes S in dem Körper C nennen.

Auf diese Weise können wir uns alle Körper in der Natur als Theile eines einzigen ganzen Körpers vorstellen, den wir Raum nennen.

§ 2.

Jeden Körper A (Fig. 8) kann ein anderer B derart berühren, dass es für einen dritten C unmöglich wird, A und B gleichzeitig zu berühren. In diesem Falle nennt man B den umgebenden Raum, vorausgesetzt, dass jeder Körper C darin enthalten ist, oder den Ort des Körpers A , indem man nur die Berührung zwischen A und B in Betracht zieht und deshalb jeden Theil C , der A nicht berührt, aus dem umgebenden Raume wegzulassen gestattet. Befindet sich der Körper A in dieser Art der Berührung mit B , ist es ausserdem unmöglich, mit A irgend einen Körper zu verbinden, der B nicht berührt, so sagt man, dass A den Ort B ausfüllt. Alle andern Körper, die ohne jede an ihnen vorgenommene Veränderung ebenfalls den Ort B ausfüllen, werden dann geometrisch in allen Beziehungen unter einander kongruent sein.

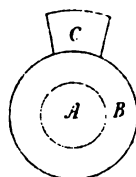


Fig. 8.

Blos gleich sind zwei Körper, sobald die Theile des einen in neuer Ordnung vertheilt werden müssen, um den Ort des andern auszufüllen.

Die Messung eines geometrischen Körpers wird ausgeführt, indem man ihn zugleich mit einem andern, als Mass genommenen, in gleiche Theile zerlegt. Dargestellt wird die Grösse alsdann durch das Verhältniss der Zahl der Theile in dem gegebenen Körper zur Zahl der Theile in dem Masse. Die Möglichkeit, die Grösse von Körpern zu finden, setzt folglich die Möglichkeit voraus, jeden Körper durch Ver-

vielfachung eines einzigen zusammenzusetzen, der, indem er an sich selbst angelegt wird, schliesslich sowohl den gemessenen Körper als auch das Mass selbst ausfüllen würde. Ist es unmöglich, das vollständig zu erreichen, so beginnt man damit, dass man dem Masse eine bestimmte Gestalt giebt, und dann zerlegt man es in Theile, die zwar beliebige Grösse haben können, aber doch immer kongruent sein müssen, und zwar derart, dass es in Verbindung mit sich selbst und mit den Theilen einen zusammenhängenden Körper bildet, der den Raum über alle Gränzen hinaus erfüllt. Alsdann wird man bei der Zusammensetzung zur Bildung eines jeden Körpers gelangen können, indem man den Grad der Gleichheit erreicht, über den hinaus unsre Sinne schon aufhören, Mängel zu erkennen. Die Fehler bei der Messung werden dann solche Abweichungen nicht übertreffen, wie sie sogar in der Natur selbst vorkommen, denn diese muss in jeder Wissenschaft immer das Hauptziel sein, und obgleich wir die ersten Begriffe aus ihr schöpfen, so verdanken wir doch gerade die Schärfe dieser Begriffe der Unvollkommenheit unsrer Sinne. In der That, in der Natur [36 giebt es keine stetige Konstruktion, und ein Bildungsgesetz wird infolgedessen niemals bis zu den kleinsten Theilchen aufrecht erhalten, wie man es sich beim ersten Male für jedes Ganze von grossen Abmessungen vorstellt. Andererseits erzeugen wir zwar in unsrer Vorstellung inkommensurable Körper, wie zum Beispiel die Kugel und den Würfel, wir brauchen jedoch nur über die Merkmale des Grösser und Kleiner eine Verabredung zu treffen, folglich überhaupt bei jedem Körper eine bestimmte Grösse zuzulassen und sodann den ausgemessenen in Gränzen einzuschliessen, die wir nach Belieben nahe zusammenbringen können, dann werden wir mit jeder beliebigen Genauigkeit zu der Grösse der Vorbilder in unsern Gedanken gelangen.

§ 3.

Jeder Körper kann in Theile zerlegt werden, bei denen über einen Theil hinaus keine gegenseitige Berührung stattfindet. Derartige Schnitte werden wir Reihenschnitte nennen. Sie bestimmen die Ausdehnung, nach der sich der Körper bis ins Unendliche erstreckt, wenn wir unaufhörlich von dem umgebenden Raume neue Theile hinzufügen, die [237 nicht über einen hinaus berühren.

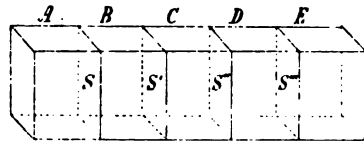


Fig. 9.

In Figur 9 sind die Theile *A*, *B*, *C*, *D*, *E* eines Körpers dargestellt, die der Reihe nach durch Berührung verbunden sind, während

A weder C noch D noch E berührt und ebenso B weder D noch E berührt. Die Schnitte S, S', S'', S''' , durch die eine derartige Zerlegung erzeugt ist, werden Reihenschnitte sein.

§ 4.

Der erste Schnitt zerlegt den Körper in zwei Theile; ein [37 zweiter, der von der einen Seite auf die gegenüberliegende übergeht, erzeugt bereits vier. In diesem Falle kann man die beiden Schnitte immer derart führen und alsdann noch neue hinzufügen, so dass bei jedem Male die Zahl der Theile um zwei vermehrt wird und alle einander gegenseitig berühren. Derartige Schnitte, deren Zahl folglich unbegrenzt ist, werden wir Wendeschnitte nennen.

In Figur 10 zerlegt der Schnitt ab den Körper in zwei Theile; die Schnitte cd und ef fügen noch je zwei hinzu, so dass alle sechs Theile AA, BB, CC, DD, EE, FF einander gegenseitig berühren. Zum Beispiel berührt AA nicht nur BB , sondern auch noch CC, DD, EE , und FF . Die drei Schnitte ab, cd, ef werden Wendeschnitte sein.

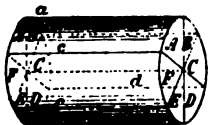


Fig. 10.

Zwei Schnitte, von denen jeder in Bezug auf den andern von der einen Seite auf die gegenüberliegende übergeht, werden wir der Kürze halber Schnitte übers Kreuz nennen. In Figur 10 sind zum Beispiel die Schnitte ab und cd übers Kreuz geführt. Von den vier Theilen, die in einem Körper durch solche Schnitte erzeugt werden, wollen wir zwei solchen, die sich in Bezug auf beide Schnitte auf gegenüberliegenden Seiten befinden, den Namen Theile übers Kreuz geben. In Figur 10 sind die folgenden Theile übers Kreuz dargestellt: AA mit DD , BB mit EE , CC mit FF . Hier [38 liegen AA und DD auf gegenüberliegenden Seiten sowohl in Bezug auf den Schnitt ab wie in Bezug auf cd .

Es ist zu bemerken, dass zwei Schnitte übers Kreuz zuweilen einen Körper in vier Theile zerlegen, die einander nicht über einen hinaus berühren. Jedoch ist in diesem Falle der erste Theil wiederum

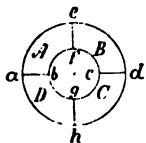


Fig. 11.

durch Berührung mit dem vierten verbunden, und es ist deshalb hier unmöglich, die Zerlegung mit der zu wechseln, die aus Reihenschnitten entsteht. Auf Figur 11 ist die Seitenansicht eines solchen Körpers dargestellt, der durch die Schnitte $abcd$ und $efgh$ in vier Theile A, B, C, D zerlegt wird, die einander nicht über einen hinaus berühren. Indessen ist der erste Theil A mit dem vierten D verbunden, und deshalb ist es unmöglich, von der Zerlegung anzunehmen,

sie sei vermöge der vier Reihenschnitte ab , ef , cd und gh entstanden. Das unterscheidende Merkmal zwischen den Reihenschnitten und den Schnitten übers Kreuz besteht darin, dass die ersten nicht von der einen Seite auf die gegenüberliegende übergehen. In Figur 11 dagegen zerlegt der Schnitt $abcd$ den Körper in zwei Theile ahd und aed , die die beiden Seiten des Schnittes $abcd$ darstellen; der andre Schnitt [238 $efgh$ geht von der einen Seite aed auf die andre ahd über. Würde man zum Beispiel den Theil D wegwerfen und dadurch die Berührung von A mit D und von D mit C beseitigen, so würden in diesem Falle die beiden Schnitte ef und cd zu Reihenschnitten werden.

Uebrigens muss bei zwei Schnitten übers Kreuz immer eine Berührung von wenigstens zwei Theilen übers Kreuz entstehen, wenn [39 nicht in dem Körper selbst, so doch in dem umgebenden Raume, folglich, wenn man aus diesem Raume zu dem Körper einen gewissen Theil hinzufügt. So kann in Figur 11 der Körper durch einen von dem umgebenden Raume genommenen Theil vervollständigt werden, mit dem Erfolge, dass in diesem zusammengesetzten Körper die beiden Schnitte nicht unterbrochen werden.

Wenn wir die Schnitte als ununterbrochen annehmen, so können wir zwei Fälle zulassen: die beiden Schnitte ad und eh (Fig. 12) erzeugen entweder vier Theile A , B , C , D , von denen je zwei: A und C , B und D einander übers Kreuz berühren, oder solche, bei denen nur zwei Theile, zum Beispiel A und C (Fig. 13) einander berühren, während die beiden andern, B und D , nicht verbunden sind. Nur in dem einen, dem ersten dieser beiden Fälle werden die beiden Schnitte ad und eh (Fig. 12) Wendeschnitte sein.

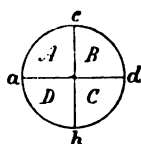


Fig. 12.

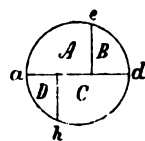


Fig. 13.

§ 5.

Jeden Körper kann man durch drei Schnitte derart in acht einander gegenseitig berührende Theile zerlegen, dass Reihenschnitte zu jedem dieser drei Schnitte immer je vier einander gegenseitig berührende Theile absondern. In diesem Falle werden wir die drei Schnitte Hauptschnitte nennen. Eine noch grössere Zahl von Schnitten dieser Art kann übrigens bei den Körpern nicht vorkommen, obwohl jeder von ihnen sowohl durch einen ihm entsprechenden Wendeschnitt als durch einen solchen Reihenschnitt ersetzbar ist. Einen vierten Schnitt, dem unter dieser Bedingung der Name Hauptschnitt zukommen könnte, lässt kein Körper zu. [40 Wirklich sind wir ausser Stande auch nur einen einzigen Körper durch

einen vierten Schnitt, bei dem die Zahl der einander gegenseitig berührenden Theile verdoppelt wird, derart zu zerlegen, dass die Berührung aller sechzehn Theile erhalten bleibt, wenn wir die Schnitte durch ihnen entsprechende Reihenschnitte ersetzen.

Die drei Hauptschnitte ab , cd und ef (Fig. 14) zerlegen den Körper in acht Theile: A , B , C , D , A' , B' , C' , D' , die einander gegenseitig berühren. Dasselbe wäre heraustragen, wenn wir zum Beispiel an Stelle von cd irgend einen ihm entsprechenden Reihenschnitt oder Wendeschnitt genommen hätten.

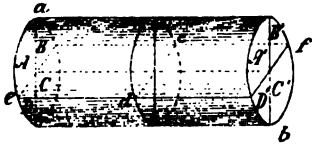


Fig. 14.

Sollen drei Schnitte, durch die ein Körper zerlegt ist, Hauptschnitte sein, so genügt es noch nicht, dass alle acht Theile einander gegenseitig berühren. Es ist erforderlich, dass die jedem Schnitte entsprechenden Reihenschnitte jedesmal je vier Theile abschneiden, die einander übers Kreuz berühren, wenigstens sobald wir solche Theile nicht in Betracht ziehen, die einander überhaupt gar nicht übers Kreuz berühren. Wir stellen uns jetzt vor, dass zu einem der drei Hauptschnitte ein Reihenschnitt gelegt ist: zwischen [239] beiden werden vier Theile ausgeschnitten werden, deren Berührung eine von den dreien sein kann, die auf den Figuren 11, 12 und 13 dargestellt sind. Der erste Fall entscheidet noch nicht, ob man die

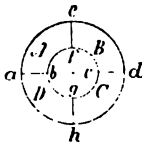


Fig. 11.

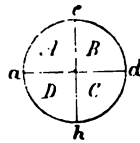


Fig. 12.

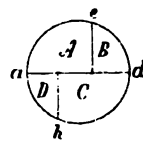


Fig. 13.

Schnitte ad und eh für zwei Hauptschnitte halten muss; aber in dem Falle, den wir auf Figur 12 sehen, können die beiden Schnitte [41] ad und eh Hauptschnitte sein, wenn sich dasselbe überall zwischen je zwei Reihenschnitten wiederholt oder wenn wenigstens nur zwischen einigen die Berührung übers Kreuz vollständig vernichtet wird.

§ 6.

Sind in einem Körper drei Hauptschnitte gelegt, womit dann zugleich acht Theile entstanden sind, die einander gegenseitig berühren, so berühren zwei durch den ersten Schnitt entstandene Theile einander flächenhaft, zwei Theile, die in Bezug auf zwei Schnitte übers Kreuz liegen, berühren einander linienhaft, zwei Theile, die sich in Bezug

auf jeden der drei Schnitte auf gegenüberliegenden Seiten befinden, berühren einander in einem Punkte.

Figur 7 stellt die flächenhafte Berührung zweier Theile A und B in dem Körper C dar. Auf Figur 15 sieht man die linienhafte Berührung zweier Körper A und B , die aus einem vermittelst der Schnitte ab und cd ausgeschnitten werden. In Figur 16 berühren die beiden

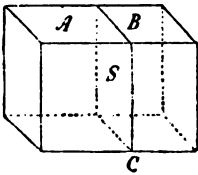


Fig. 7.

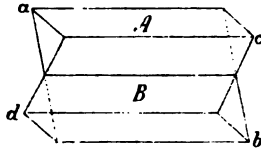


Fig. 15.

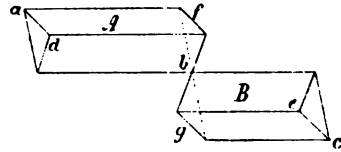


Fig. 16.

Körper A und B einander in einem Punkte, indem sie aus einem Körper mit Hülfe der drei Schnitte abc , dbe , fbg ausgeschnitten sind.

Jeder Körper befindet sich mit dem umgebenden Raume in flächenhafter Berührung. Als den Schnitt, durch den er abgesondert ist, kann man sich entweder einen einzigen Schnitt denken, oder zwei Wendeschnitte oder endlich drei Hauptschnitte. Demnach berühren zwei [42] Theile eines Körpers einander entweder flächenhaft, oder linienhaft oder in einem Punkte.

§ 7.

Wenn wir bloß von der Berührung zwischen zwei Körpern reden und infolgedessen bei jedem von beiden die Theile nicht in Betracht ziehen, die den andern nicht berühren, so erhalten die beiden Körper den Namen: Fläche, Linie oder Punkt, je nach der Art, von der die Berührung zwischen ihnen ist: flächenhaft, linienhaft oder in einem Punkte.

Wenn also zwei Körper A und B (Fig. 17) einander flächenhaft berühren, indem sie sich auf den beiden Seiten des Schnittes S befinden, so bekommen sie fortan den Namen:

Fläche S , sobald es erlaubt ist, jeden Theil a , der B nicht berührt, zu A hinzuzufügen oder davon wegzunehmen und bei B jeden Theil b , der A nicht berührt. Die Absonderung solcher

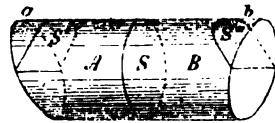


Fig. 17.

Theile a und b muss mit Hülfe von Reihenschnitten S' und S'' geschehen, die S entsprechen, und kann fortgesetzt werden, bis wir bei beiden Körpern zur Dünne eines Papierblattes gelangen, oder so weit, wie die Vorstellung noch im Stande ist, der Theilung zu folgen. Gewöhnlich stellt man sich die Flächen in dieser Gestalt vor, nämlich vermöge zweier ausserordentlich dünner

Körper, indem man seine Aufmerksamkeit von den Theilen an diesen abwendet, die in Betracht zu ziehen überhaupt nicht nöthig ist.

Wenn zwei Körper *A* und *B* (Fig. 18) einander linienhaft [240
43] berühren, indem sie Theile eines einzigen darstellen, die durch

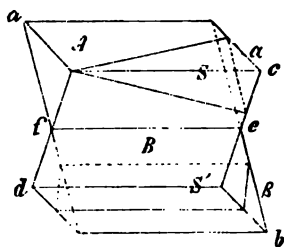


Fig. 18.

zwei Schnitte *ab* und *cd* ausgeschnitten sind, wenn es ferner gestattet ist, von *A* jeden Theil α wegzunehmen, der *B* nicht berührt, von *B* jeden Theil β , der *A* nicht berührt, so bekommen die beiden Körper unter dieser Bedingung fortan den Namen: Linie. Die Abtrennung der Theile α und β kann bei beiden Körpern mit Hülfe von Reihenschnitten *S* und *S'* vor sich gehen, die den beiden Schnitten

ab und *cd* entsprechen, und sie bringt die Körper bis zur Dünne eines Haares oder des Striches *ef* auf dem Papiere oder so weit, wie man diese Theilung durch die Vorstellung zu begreifen im Stande ist. So stellt man sich die Linien gewöhnlich vor, nachdem man bei ihnen vorher das unmerklich gemacht hat, was hier die Aufmerksamkeit nicht auf sich ziehen soll.

Wenn zwei Körper *A* und *B* (Fig. 19) einander in einem Punkte berühren und folglich als Theile betrachtet werden können, die mit

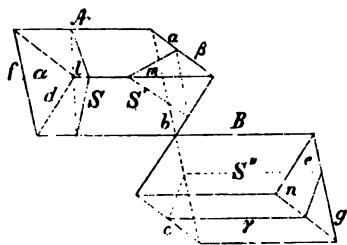


Fig. 19.

Hülfe von drei Hauptschnitten *abc*, *dbc* und *fbg* in einem einzigen Körper ausgeschnitten sind, so nennt man *A*, *B* in dem Falle einen Punkt, wenn es gestattet ist, von *A* jeden Theil α , β wegzunehmen, der *B* nicht berührt, und von *B* jeden Theil γ , der *A* nicht berührt. Die Abtrennung solcher Theile geht bei beiden Körpern durch Vermittelung von

Schnitten *S*, *S'*, *S''* vor sich, die den drei Hauptschnitten *abc*, *dbc*, *fbg* als Reihenschnitte entsprechen, und führt den Körper schliesslich auf die Kleinheit eines Sandkörnchens zurück oder auf einen Punkt *b*, [44 wie er durch die Berührung der Feder entsteht, woher eben die Benennung entlehnt ist.

Bei jedem Körper erzeugt dessen Berührung mit dem umgebenden Raume eine Fläche, die den Körper begränzt. Der Körper selbst ist die innere, der umgebende Raum die äussere Seite der Fläche. Schnitte in dem Körper erzeugen Flächen, die innere genannt werden und die sich eben dadurch von der äusseren Fläche in dem Gebiete der Berührung mit dem umgebenden Raume unterscheiden.

Jede Linie gehört einer unzählbaren Menge von Flächen an, die durch Wendeschnitte (§ 4) erzeugt sind. Eben das meint man, wenn man sagt, dass Flächen einander in einer Linie schneiden, die auf jeder von ihnen liegt und jede in zwei Theile, die Seiten der Linie, zerlegt. In dem Durchschnitte der äusseren Fläche eines Körpers mit einer inneren Fläche, die ausserhalb des Körpers fortgesetzt ist, entsteht eine Linie, die sich schliesst und die innere Fläche begränzt, oder mit andern Worten: sie trennt die innere Seite der Linie von der äusseren unbegränzten in dem umgebenden Raume.

Ein Punkt gehört allen Linien an, in denen drei Hauptschnitte sowie die ihnen entsprechenden Wendeschnitte einander durchschneiden. Jede Linie zerlegt der Punkt in zwei Theile, die zwei gegenüber- [45 liegende Seiten des Punktes bestimmen. Wenn sich die Linie schliesst, so muss man aus ihr einen Theil herausnehmen, um die beiden verbundenen Seiten nicht mehr zu verwechseln.

§ 8. [241

Die Messung von Körpern verlangt deren Zerlegung in gleiche Theile (§ 2). Die Zerlegung kann mit Hülfe von Reihenschnitten geschehen, die drei Hauptschnitten entsprechen, und deshalb besitzen die Körper drei Ausdehnungen, die durch die drei Schaaren von Reihenschnitten bestimmt sind.

Dürfen wir annehmen, dass wir auf diese Weise im Stande sind, jeden Körper auszumessen, wie das in der Folge gezeigt werden wird, so können wir zu jedem Schnitte einen Reihenschnitt führen und so zwischen beiden einen solchen Theil ausschneiden, dessen Grösse im Vergleich mit der Grösse des ganzen Körpers beliebig verkleinert werden kann. Andererseits verändert eine derartige Verkleinerung der Grösse des Körpers die Fläche nicht, die der erste Schnitt erzeugt. Demnach muss in dieser Beziehung die Grösse einer Fläche im Vergleich mit der Grösse eines Körpers für Null erachtet werden.

§ 9.

Die Messung einer Fläche erfordert ähnlich wie die Messung von Körpern die Zerlegung in gleiche Theile. Eine solche Zerlegung ist möglich, wenn wir zu dem Schnitte, der die Fläche selbst erzeugt, [46 noch zwei hinzufügen, um drei Hauptschnitte herzustellen, und sodann zu jedem der beiden hinzugekommenen Reihenschnitte führen. Hier bestimmen die beiden Schaaren von Reihenschnitten zwei Ausdehnungen, während von der dritten Schaar nur Theile abgeschnitten werden, die der Fläche nicht angehören (§ 7).

Wenn wir annehmen, dass eine Oberfläche auf diese Weise immer ausgemessen werden kann, ebenso wie überhaupt jeder Teil von ihr, der zwischen zwei, ihre eine Ausdehnung bestimmenden Reihenschnitten liegt, so können wir diesen Theil im Vergleich mit der Grösse der ganzen Fläche beliebig verkleinern. Da aber ein Theil einer Fläche die eine Seite einer Linie bildet, so wird in dieser Beziehung die Grösse einer Linie im Vergleich mit einer Fläche null sein. Bei der Messung von Flächen kann man daher die Reihenschnitte durch ihnen entsprechende Wendeschnitte ersetzen; das aber bedeutet, dass man nur die Linien selbst, die auf der Fläche gezogen sind, in Betracht zu ziehen hat, welchen Schnitten sie auch übrigens angehören mögen und wie auch die Schnitte ausserhalb der Fläche fortgesetzt werden mögen.

§ 10.

Die Messung von Linien erfordert deren Zerlegung in Theile, die man durch eine einzige Schaar von solchen Reihenschnitten aus- [47 schneiden kann, die dem dritten Hauptschnitte entsprechend gelegt sind, wobei man als die beiden andern eben die nimmt, in denen sich die Linie befindet. In der That schneiden die den beiden letzteren entsprechenden Reihenschnitte nur Theile ab, die nicht zu der Linie gehören (§ 7).

Setzen wir die Möglichkeit voraus, die Grösse jeder Linie zu finden und ebenso die Grösse jedes Theiles auf ihr zwischen zwei Punkten, lässt man ferner zu, dass dieser Theil nach Belieben verkleinert werden kann, so muss man den Punkt im Vergleich mit der Grösse der Linie als Null betrachten, weil alle diese Theile dem Punkte gar nicht angehören.

§ 11.

[242

Die Grösse eines Punktes muss man in jedem Falle im Vergleiche mit der Grösse von Linien für Null erachten, weil alle Linien, wie klein sie auch sein mögen, verkleinert werden können, ohne dass die Grösse eines Punktes, der diesen Linien angehört, beeinflusst wird (§ 7).

Ueberhaupt können sowohl die Linien als die Punkte, wenn sie unter einander durch Schnitte verbunden sind, denen sie angehören und die folglich alle paarweise Wendeschnitte sein werden, nicht vergrössert werden, ohne dass gleichzeitig die Schnitte, wenn einer durch einen andern ersetzt wird, neue Linien und Punkte erzeugen. [48 Werden daher zwei Linien auf diese Weise vereinigt, so bleibt ihre Grösse stets die der grösseren unter ihnen oder die alte, falls beide gleich sind; die Grösse eines Punktes aber wird niemals verändert.

Diese Eigenschaft der Linien und der Punkte, durch Verdoppelung nicht vergrössert zu werden, ist unter den geometrischen Grössen dieselbe, die unter den Zahlen den Nullen eigenthümlich ist.

§ 12.

Die relative Lage zweier Punkte heisst deren Abstand und wird durch die Berührung zweier Körper bestimmt, bei denen alle Veränderungen zulässig sind, die die Punkte selbst nicht verändern, so dass der Abstand als derselbe gilt, wenn der Unterschied von solchen Theilen des einen Körpers herrührt, die den andern nicht berühren, oder von verschiedenen Wendeschnitten, denen die Punkte auf gleiche Art angehören.

Der Abstand der Punkte *A* und *B* (Fig. 20) wird durch die Berührung des Körpers *LM* mit *ACB* ebenso bestimmt wie durch die Berührung des Körpers *LM* mit *AD[E]B*, weil hier die Verschiedenheit bei den berührenden Körpern entweder durch solche Theile des einen bestimmt ist, die den andern nicht berühren, oder durch solche Theile, deren äussere Flächen Wendeschnitte darstellen, denen beide Punkte angehören.

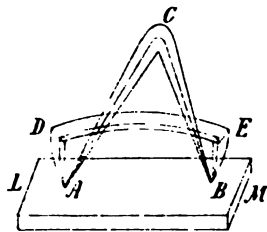


Fig. 20.

Kapitel II.

[243
3

Erklärung der Kugel, der Kugelfläche, des Kreises, der Ebene und der geraden Linie.

§ 13.

Die Kugel ist ein Körper, dessen äussere Fläche, die Kugelfläche, so beschaffen ist, dass ihre sämtlichen Punkte gleiche Abstände (§ 12) von einem Punkte im Innern haben, dem Mittelpunkt der Kugel oder der Kugelfläche. Dieser Abstand vom Mittelpunkt bis zu den Punkten der Kugelfläche heisst Halbmesser der Kugel und zugleich auch der Kugelfläche selbst.

Schon mit dem ersten Begriffe von Körpern nehmen wir in [4 der Geometrie den Mittelpunkt im Innern der Kugel an, indem wir uns um jeden Punkt herum die Kugelfläche als eine solche Fläche vorstellen, die einen Theil des Raumes vollständig begränzt und zwar überall da, wo dieser Theil den umgebenden Raum berührt (§ 2).