

Neue Anfangsgründe der Geometrie [²¹⁹₃] mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien.

Einleitung.

Jedermann weiss, dass in der Geometrie die Theorie der Parallellinien bis auf den heutigen Tag unvollkommen geblieben ist. Die Vergeblichkeit der Anstrengungen, die seit Euklids Zeiten während des Verlaufs zweier Jahrtausende gemacht worden sind, erweckte in mir den Verdacht, in den Begriffen selbst möchte noch nicht die Wahrheit liegen, die man hat beweisen wollen und zu deren Bestätigung, wie bei andern Naturgesetzen, nur Versuche dienen [4 können, so zum Beispiel astronomische Beobachtungen. Als ich mich schliesslich von der Richtigkeit meiner Vermuthung überzeugt hatte und der Meinung war, die schwierige Frage vollständig erledigt zu haben, schrieb ich im Jahre 1826 darüber eine Abhandlung.*) Eine Anwendung der neuen Theorie auf die Analysis befindet sich auch in Aufsätzen, die unter dem Titel: „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ im Kasaner Boten für 1829 und 1830 erschienen sind.

Das Hauptergebniss, zu dem ich unter der Annahme gelangt bin, dass die Linien von den Winkeln abhängig seien, ist die Möglichkeit des Vorhandenseins einer Geometrie in einem weiteren Sinne, als sie uns zuerst Euklid dargestellt hat. In dieser erweiterten Gestalt gab ich der Wissenschaft den Namen: Imaginäre Geometrie, unter die sich als ein besonderer Fall die Gewöhnliche Geometrie unterordnet mit der Beschränkung in der allgemeinen Voraussetzung, wie sie die praktischen Messungen fordern.

Dass die neuen Grundlagen ausreichend sind, das zu zeigen habe ich in einer Abhandlung unternommen, die unlängst in den „Gelehrten

*) Exposition succincte des principes de la Géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles, gelesen am 12. Februar 1826 in der Sitzung der physiko-mathematischen Abtheilung bei der Universität Kasan, aber nirgends gedruckt.

Schriften der Universität Kasan“ gedruckt worden ist.*) In dem [5 Bestreben, dieses Ziel nicht sowohl auf direktem als vielmehr auf [220 dem kürzesten umgekehrten Wege zu erreichen, zog ich damals vor, von gewissen angenommenen Grundlagen aus zu den Gleichungen für alle Beziehungen und zu den Ausdrücken für alle geometrischen Grössen überzugehen. Sollte auch meine Entdeckung keinen andern Nutzen gebracht haben, als die Ausfüllung der Lücke in den Anfangsgründen, so verpflichtet mich doch wenigstens die Aufmerksamkeit, die dieser Gegenstand fortwährend erweckt hat, nunmehr zu einer eingehenden Auseinandersetzung. Ich werde mit einer Besprechung der früheren Theorien beginnen.

Es ist leicht zu zeigen, dass zwei Gerade, die gegen eine dritte unter demselben Winkel geneigt sind, niemals zusammentreffen, da sie unter diesen Umständen auf einer gewissen Geraden senkrecht stehen. Euklid nahm umgekehrt an, dass zwei Linien, die gegen eine dritte nicht gleich geneigt sind, stets einander schneiden müssen. Um sich von der Richtigkeit der letzteren Annahme zu überzeugen, hat man zu verschiedenen Hilfsmitteln gegriffen: bald bemühte man sich, zuvor die Winkelsumme im Dreiecke zu ermitteln, bald verglich man unendliche Flächenräume in den Oeffnungen von Winkeln und zwischen Lothen, bald liess man zu, dass die Winkel nur vom Verhältnisse der Seiten abhängig seien, oder man legte endlich der geraden Linie neue Eigenschaften bei, um ihre Definition zu vervollständigen. Von [6 allen diesen Beweisen kann man einige als scharfsinnig bezeichnen, aber sie alle, ohne Ausnahme, sind falsch, mangelhaft in ihren Grundlagen und ohne die nöthige Strenge der Schlüsse; es giebt sogar unter ihnen keinen einzigen, der zugleich einfach und überzeugend wäre und daher Anfängern empfohlen werden könnte.

Legendre liess im Jahre 1800 seine Geometrie in dritter Ausgabe drucken und stellte darin den Satz auf, dass die Winkelsumme des Dreiecks nicht grösser sein kann als π , als zwei Rechte. Eben- daselbst wollte er zeigen, dass diese Summe nicht $< \pi$ sein darf, wobei er jedoch ausser Acht gelassen hatte, dass gerade dann, wenn der auf anderm Wege abgeleitete Werth der Summe irgend einen Widerspruch darbietet, die Linien möglicherweise gar kein Dreieck mehr bilden. Ich halte es nicht für nöthig, mich hier über diesen Fehler zu verbreiten, den Legendre später selbst zugestanden hat, indem er erklärte, obwohl die als Grundlage benutzten Principien keinem Bedenken

*) Im 1. Hefte der Gelehrten Schriften von 1835, unter dem Titel: „Imaginäre Geometrie.“

unterlägen, fände er doch Schwierigkeiten, die zu überwinden er nicht im Stande wäre.*) In den Schriften der französischen Akademie von 1833 fügte er noch den Satz hinzu, dass die Winkelsumme in allen Dreiecken gleich π sein muss, sobald sie in einem einzigen diesen [7 Werth hat. Dasselbe musste ich auch in meiner Theorie beweisen, die ich 1826 schrieb. Ich finde sogar, dass Legendre mehrmals auf den Weg verfallen ist, den ich mit solchem Erfolge gewählt habe; [221 vermutlich hat aber das Vorurteil zu Gunsten des von Allen angenommenen Satzes ihn bei jedem Schritte veranlasst, sich mit der Schlussfolgerung zu beeilen oder diese durch Dinge zu ergänzen, die bei der neuen Annahme gar nicht mehr zulässig sind. Wir werden Alles prüfen, was er in den Schriften der französischen Akademie von 1833 über diesen Gegenstand hat drucken lassen.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 1) ziehen wir von A aus durch die Mitte I der Seite BC die Linie $AC' = AB$; wir verlängern ferner AB bis $AB' = 2AI$ wird. So entsteht ein Dreieck $AB'C'$, in dem $B'C' = AC$ und die Winkelsumme S dieselbe ist, wie in dem ersten Dreiecke ABC , aus dem der Winkel CAB in das Dreieck $AB'C'$ übergeht, indem er in die beiden an den Punkten A und B' zerfällt. Ist überdies AB die grösste Seite des Dreiecks

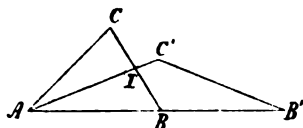


Fig. 1.

ABC oder doch nicht kleiner als die beiden andern und ist zugleich $BC \leq AC$, so ist $AC' \geq C'B'$ und der im Dreiecke $AB'C'$ der Seite [8 $B'C'$ gegenüberliegende Winkel ist höchstens halb so gross wie der Winkel CAB . Indem wir so fortfahren, können wir zu einem Dreiecke gelangen, in dem zwei der Winkel beliebig klein sind, während die Summe von allen dreien denselben Werth S hat wie in dem ersten Dreiecke ABC .

Legendre wollte hieraus schliessen, dass sich bei der Verkleinerung der beiden Winkel die gegenüberliegenden Seiten der dritten so nähern müssen, dass der übrige Winkel schliesslich in zwei Rechte übergeht, und dass somit in dem ursprünglichen und folglich in jedem Dreiecke $S = \pi$ sei (*Réflexions sur la théorie des parallèles. Mémoires de l'Acad. d. Sc. Tome XII. 1833, p. 390*). Diese Ueberlegung ist jedoch unrichtig, weil die Seiten des Dreiecks hier unbe-

*) Hier sind die eignen Wort Legendres: „Nous devons avouer que cette seconde proposition, quoique le principe de la démonstration fût bien connu, nous a présenté des difficultés que nous n'avons pu entièrement résoudre.“ (*Mémoires de l'Acad. d. Sc. de l'Inst. de France, Tome XII, 1833, p. 371*).

gränzt wachsen und wir daher auch die Gränze, der sich der Winkel $AC'B' < S$ nähert, $< \pi$ annehmen können.

Wir nennen A, B, C die Winkel des Dreiecks ABC an den Punkten mit denselben Buchstaben, wir nennen ferner A', B', C' die Winkel des Dreiecks $AB'C'$ an den Punkten A, B', C' ; endlich sei h das von C' aus auf die Seite AB' gefällte Loth. Mit Hülfe der „Imaginären Geometrie“ finden wir bei der Annahme $S < \pi$ und indem wir unter e die Grundzahl der Neperschen Logarithmen verstehen:

$$\cot A' = \cot A + \frac{\sin C}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$\cot B' = \cot A + \frac{\sin B}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$e^h - e^{-h} = \frac{4}{\sin C} \sqrt{\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos (\frac{1}{2} S - A') \cdot \cos (\frac{1}{2} S - B') \cdot \cos (\frac{1}{2} S - C')} \quad [9]$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ist ersichtlich, dass A' und B' immer möglich sind und bei der Verwandlung der Dreiecke bis auf Null abnehmen. Die letzte Gleichung liefert jedesmal die Höhe h [222 und bestimmt die Gränze der Annäherung:

$$h = \log \cot \frac{1}{2} S,$$

wo der Nepersche Logarithmus zu nehmen ist.

Obgleich Legendre seinen Beweis als vollständig streng bezeichnet, so dachte er selbst doch wahrscheinlich anders, denn er fügt den Vorbehalt hinzu, dass eine Schwierigkeit, die man etwa noch finden werde, immer beseitigt werden könne. Zu diesem Zwecke nimmt er seine Zuflucht zu Rechnungen, denen übrigens die ersten bekannten Gleichungen der geradlinigen Geometrie zu Grunde liegen, die zuvor erst noch zu prüfen sich gehört hätte und die gerade in diesem Falle zu gar nichts nützen und zu gar keinem Schlusse führen.

In der Absicht, Alles zur Bestätigung seines Satzes zu sagen, bemerkt Legendre, dass kongruente Dreiecke, die überall mit verschiedenen Winkeln zu je dreien in einem Punkte zusammengelegt werden, einen Streifen bilden, den man bis ins Unendliche fort- [10 setzen kann und den dann zwei gebrochene Linien begränzen, die für $S < \pi$ einander ihre Höhlungen zukehren, für $S > \pi$ dagegen ihre Wölbungen. Indessen zwingt die erwiesene Unmöglichkeit des letzteren Falles auch zur Ablehnung des ersten, wo die Linien, die einander wie zwei Kreisbogen zugewendet sind, nothwendig zum Schnitte kommen müssten. Es scheint nicht nöthig, einen solchen Schluss, bei dem auch kein Schatten eines strengen Beweises vorhanden ist, eingehend zu erörtern und zu würdigen. Ueberdies bemerken wir, dass Linien,

die einander ihre Höhlung zukehren, nur nach dem in der gewöhnlichen Geometrie angenommenen Begriffe einander näher kommen, während bei der Annahme $S < \pi$ nichts hindert, ihre Fortsetzung unter Erhaltung der Abstandsgleichheit zuzulassen.

Bertrand und nach seinem Vorgange Legendre wollten unendliche Flächenräume in Winkeln und zwischen Lothen vergleichen. Beweisen dieser Art sollte eine Erklärung des Grössenbegriffs vorhergehen, den man in der Geometrie nur in Verbindung mit der Messung verstehen kann, wenn man noch ausserdem vorher verabredet hat, durch welche Merkmale sich das Grössere vom Kleineren unterscheidet. Zum Beispiel wird ein Flächenraum, der von einer krummen Linie begrenzt ist, für grösser erachtet als ein Vieleck, das ganz im Innern enthalten ist, dagegen für kleiner, wenn umgekehrt der Flächenraum ganz in dem Vielecke eingeschlossen ist, selbst wenn noch kein Mittel zur Ausmessung dieser Flächen bekannt sein sollte. Handelt es sich aber um Flächenräume von unbegrenzter Ausdehnung, so muss [11 man hier, wie ja überall in der Mathematik, unter dem Verhältnisse zweier unendlich grosser Zahlen die Gränze verstehen, in die dieses übergeht, sobald Zähler und Nenner des Bruches beständig wachsen. Ausserdem muss man hier unter einer geometrischen Grösse wenigstens eine solche verstehen, die man annähernd bestimmen kann, indem man sie nach den Merkmalen der Ungleichheit beurteilt. In dieser Beziehung erfüllt der Bertrandsche Beweis und ebenso alle andern bei Weitem nicht die Anforderungen, weil wir bei ihnen kein Ver- [223 fahren zur Ausmessung von Flächenräumen sehen, dessen vollends zu geschweigen, dass die Flächenräume zuerst begrenzt werden und dann mit der Erweiterung ihrer Gränzen ins Unendliche wachsen müssen.

Es werde verlangt, die Fläche X (Fig. 2) in der Oeffnung des Winkels DCE mit der Fläche Y zu vergleichen, die sich von der Linie $AC = a$ aus zwischen den beiden zu AC

senkrechten Geraden AB und CD hinstreckt. Das Verhältniss der beiden Flächen X und Y wird verschieden ausfallen, auch wenn sie ins Unendliche anwachsen, nämlich je nach der Art und Weise wie wir gedenken, sie im Anfange zu begrenzen. Wir nehmen zum Beispiele an, dass in jedem Dreiecke die Winkelsumme $S = \pi$

ist. Wir machen $AB = CD = n \cdot a$, wo n eine ganze Zahl ist, und ziehen sodann die Gerade DB , dagegen begränzen wir den Flächenraum in der Oeffnung des Winkels DCE durch einen Kreisbogen, den wir um C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $CD = na$ beschreiben.

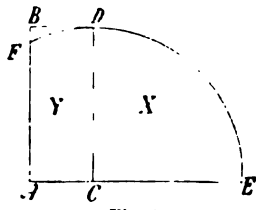


Fig. 2.

Wir finden:

$$Y = na^2, \quad X = \frac{1}{4} \pi n^2 a^2, \quad [12]$$

demnach ist:

$$\frac{Y}{X} = \frac{4}{\pi n}$$

ein Verhältniss, das beim Anwachsen der Flächenräume Y und X , für $n = \infty$, verschwindet, wie auch Bertrand angenommen hat. Wenn wir jedoch, statt $AB = na$ anzunehmen, $AB = nCD = n^2 a$ machen, so finden wir diesmal das Verhältniss:

$$\frac{Y}{X} = \frac{4}{\pi},$$

das für jedes n und folglich auch für $n = \infty$, wo die beiden Flächenräume unendlich gross werden, konstant ist. Daher fällt das Verhältniss $Y:X$ jedesmal verschieden aus, jenachdem wir die Flächenräume im Anfang begränzen und jenachdem sie nachher ins Unendliche wachsen.

Wir schneiden jetzt beide Flächenräume X und Y durch einen Bogen FDE ab, den wir um C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $CD = na$ beschreiben. Unter der Annahme, dass in jedem Dreiecke die Winkelsumme $S > \pi$ oder $= \pi$ ist, sieht man ohne Schwierigkeit ein, dass das Verhältniss $Y:X$ für $n = \infty$ in Null übergeht. [13 Dies bedeutet, dass in beiden Fällen Y von der ersten, X aber von der zweiten Ordnung unendlich gross wird, wie sich auch Bertrand gedacht hat. Dagegen finden wir bei der Annahme $S < \pi$ das Verhältniss*):

$$\frac{Y}{X} = \frac{2(e^{na} + e^{-na}) \cdot \arcsin\left(\frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} \cdot \frac{e^{2na} + 1}{e^{2na} - 1}\right) - 4 \arcsin\left(\frac{e^a - e^{-a}}{e^{na} - e^{-na}}\right)}{\pi(e^{na} + e^{-na} - 2)}, \quad [224]$$

wo die Zahl $e > 1$ nicht von n abhängt, und folglich für $n = \infty$: [14

*) Wir wollen unter e die Grundzahl der Neperschen Logarithmen verstehen, indem wir die als Einheit benutzte Linie unbestimmt lassen, und wollen setzen:

$$\sin r' = \frac{2}{e^r + e^{-r}}, \quad \sin \psi = \tan r' \cdot \cot x'$$

$$\tan r' = \frac{2}{e^r - e^{-r}}, \quad \tan x' = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Wird dann in dem Kreise ein Flächenraum abgeschnitten und zwar durch zwei auf dem Halbmesser errichtete Lothe, von denen das eine vom Mittelpunkte ausgeht, das andre im Abstände x vom Mittelpunkte, so ist dieser Flächenraum gleich:

$$\frac{1}{\sin r} \cdot \operatorname{arccot}(\sin r' \cdot \cot \psi) - \psi.$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} \right),$$

was nicht null ist, solange $a > 0$ ist, und was nur bei ausserordentlicher Kleinheit von a vernachlässigt werden kann.

Andrerseits überzeugt man sich ohne Mühe, dass man das Verhältniss $Y:X$ für $Y=\infty$ nicht gleich Null erachten darf, wofern man $S < \pi$ zulässt. Es seien AB und CD (Fig. 3) senkrecht zu AC ; wir nehmen $AB=CD$ beliebig an. Bei der Annahme $S < \pi$ sind die Winkel ABD und CDB spitz; die Lothe BB'' und DD'' auf BD wenden sich nach dem Innern der Fläche $B'BDD'$, ohne mit einander zusammenzutreffen, und bilden mit BB' und DD' die Winkel:

Fig. 3.

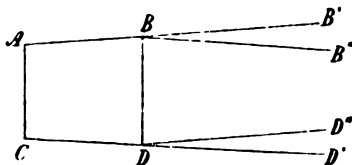


Fig. 3.

$B'BB''$ und $D'DD''$, deren unendliche Flächenräume kleiner sind als der ebenso beschaffene Flächenraum $B'ACD'$, im Widerspruche mit dem, was Bertrand von allen Winkeln ohne Ausnahme hat behaupten wollen.

Ein andres Ansehen giebt Bertrand seinem Beweise, indem er unendliche Flächenräume in Winkeln allein betrachtet. In dem Dreiecke ABC (Fig. 4) nennen wir A, B, C die Winkel gegenüber den Seiten a, b, c , die wir verlängern: AC über A bis A'' , AB über B bis B'' , BC über C bis C'' .

In den Oeffnungen der Aussenwinkel $\pi - A$, $\pi - B$ und $\pi - C$ bilden die sich ins Unendliche erstreckenden Flächenräume $X + x$, $Y + y$, Z um den Punkt C herum nach allen Seiten hin einen eben solchen Flächenraum, wobei der Flächenraum ABC ausgeschlossen ist, den man seiner Kleinheit wegen vernachlässigen darf. Dies bedeutet, dass: $\pi - A + \pi - B + \pi - C = 2\pi$ ist und somit: $A + B + C = \pi$.

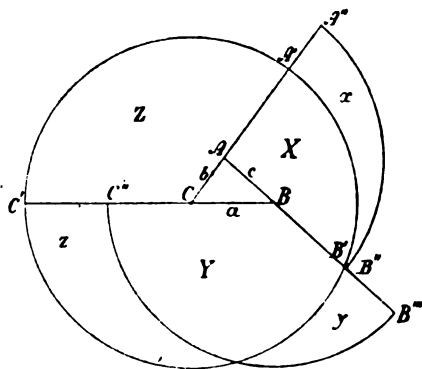


Fig. 4.

Prüfen wir jetzt diesen Schluss, nachdem wir zuvor die Flächenräume durch Bogen eines Kreises vom Halbmesser $CC' = r$ begrenzt haben, unter Benutzung der Punkte A, B, C als Mittelpunkte. Der Kreis um C möge die Schenkel des Winkels $\pi - A$ in A' und B' schneiden, so dass er den Flächenraum in der Oeffnung von $\pi - A$ in zwei Theile zerlegt; den einen X im Innern, den andern x ausserhalb des ganzen Kreises mit dem Mittelpunkte C . Die Schenkel [325

des Winkels $\pi - B$ mögen von demselben ganzen Kreise in B' und C' geschnitten werden, so dass der Flächenraum in der Oeffnung von $\pi - B$ in zwei Theile zerfällt: Y im Innern, y ausserhalb des Kreises, ausserdem aber wird der Theil z des ganzen Kreises dem Winkel $\pi - B$ nicht angehören. Das sind alle möglichen Fälle, die unsre Figur darbietet, dabei vorausgesetzt, dass: $r > a$, $r > b$, $r > c$, $a > c$ ist. Bezeichnen wir ferner mit $\mathcal{A}$ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und mit R den Flächeninhalt des Kreises vom Halbmesser r , so finden wir:

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - A) = X + x \quad [16]$$

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - B) = Y + y$$

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - C) = Z$$

$$R = X + Y + Z + z + \mathcal{A}.$$

Hieraus erhalten wir:

$$(1) \quad A + B + C = \pi + \frac{2\pi}{R}(\mathcal{A} - x - y + z).$$

Es bliebe jetzt noch zu zeigen, dass, wenn man die Winkelsumme S des Dreiecks $< \pi$ voraussetzt, $\mathcal{A} = x + y - z$ ist für jedes r oder wenigstens für $r = \infty$; aber es wäre vergeblich, diese Arbeit zu unternehmen. Im Gegentheil finden wir unter der Bedingung: $S < \pi$ beständig $\mathcal{A} < x + y - z$, wie wir sogleich sehen werden.

Durch das Anwachsen von $CC' = r$ entfernen sich die Punkte B' , B'' , B''' von dem Punkte B in der Richtung AB , indem sich die Linien CB' , CB'' , CB''' einer bestimmten Gränze CD (Fig. 5)

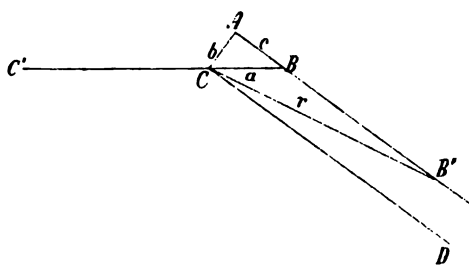


Fig. 5.

nähern, die ich in der neuen Theorie als eine Parallele zu AB bezeichnet habe und die mit CD und CB solche Winkel:

$$ACD = \pi - A - \alpha,$$

$$BCD = B - \beta$$

bildet, dass α und β irgend [17] welche positive Zahlen sind.

Dabei kann man, wenn man für $CB' = r$ eine genügend grosse Linie nimmt, immer erreichen, dass die Winkel $B'CD$, $B''CD$ so klein ausfallen, wie man will. Bezeichnen wir daher den Flächeninhalt des Dreiecks ACB' mit P , so erhalten wir für ein sehr grosses r (Fig. 4) ohne merkliche Abweichung:

$$\frac{1}{2\pi}(\pi - A - \alpha)R = \frac{1}{2\pi}(\pi - A)R + P - x,$$

und daraus:

$$(2) \quad x = P + \frac{\alpha}{2\pi}R.$$

Wenn wir für den Augenblick den Winkel $C'CD = M$ setzen (Fig. 5), so kann die vorhin angegebene Gleichung:

$$(\pi - B)R = 2\pi(Y + y)$$

nunmehr geschrieben werden:

[226

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi}(\pi - B)R = \frac{1}{2\pi}MR + P - A + y - z.$$

Indem wir hierin den Werth:

$$M = A + C + \alpha$$

einsetzen, finden wir eine Gleichung, die in Verbindung mit der [18 Gleichung (2) von Neuem zu der Gleichung (1) führt und diese solcher-gestalt bestätigt. Setzen wir andererseits:

$$M = \pi - B + \beta,$$

so erhalten wir aus Gleichung (3):

$$-\beta = \frac{2\pi}{R}(A - P - y + z),$$

was in Verbindung mit den Gleichungen (1) und (2) ergibt:

$$A + B + C = \pi - \alpha + \beta.$$

Demnach ist in dem Bertrandschen Beweise bereits $\alpha = 0$, $\beta = 0$ vorausgesetzt, eben das, was zu beweisen war.

Aehnlich wie Bertrand von der Vergleichung unendlicher Flächenräume in den Winkeln des Dreiecks befriedigt war, wollte sich Legendre der Zweiecke (biangles) bedienen, indem er unter diesem Ausdrucke die unendlichen Flächenräume zwischen je zwei Lothen verstand. Eigentlich hat er nur soviel bewiesen, dass der unendliche Flächenraum $CABD$ (Fig. 6) zwischen den Lothen AC und BD auf AB gleich ist dem unendlichen Flächenraume $DEFC$, der aus dem ersten entsteht, indem man von [19 diesem mit Hülfe der auf BD senkrechten Geraden EF das Viereck $ABEF$ abschneidet. Eben das ist übrigens an sich klar; aber Legendre liess hierbei noch ausser Acht, dass FE möglicherweise nicht mit AC zusammentrifft. Um diese unbedeutende Schwierigkeit zu vermeiden, braucht man nur EF als das von F aus auf BD gefällte Loth anzunehmen; aber auf welche Weise nunmehr hierauf folgen soll, dass $FE = AB$ und der Winkel $EFC = \frac{1}{2}\pi$ ist, da :

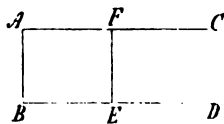


Fig. 6.

es gar nicht mehr möglich den falschen Schluss zu verbessern, bei dem Legendres Unachtsamkeit so gross war, dass er, ohne den groben Fehler zu bemerken, seinen Beweis für sehr einfach und vollständig streng hielt.

Man hat ferner daran gedacht, bei der Theorie der Parallellinien als Grundlage zu benutzen, dass in den Dreiecken die Winkel von den Verhältnissen der Seiten abhängen müssen. Zunächst erscheint eine solche Annahme ebenso einfach wie nothwendig; aber wenn wir zu erforschen suchen, welche Begriffe wir davon haben, woher sie ihren Ursprung nimmt, so sind wir gezwungen, sie als ebenso willkürlich zu bezeichnen, wie alle andern, auf die man bis jetzt verfallen ist.

In der Natur erkennen wir eigentlich nur die Bewegung, ohne die Sinnesindrücke nicht möglich sind. Folglich sind alle übrigen [227 Begriffe, zum Beispiel die geometrischen, künstlich von unserm Verstande erzeugt, da sie den Eigenschaften der Bewegung entnommen sind; und deshalb ist der Raum an sich, für sich allein, nicht für uns vorhanden. Demnach kann es für unsern Verstand nichts Wider- [20 sprechendes haben, wenn wir zulassen, dass einige Kräfte in der Natur der einen, andre ihrer besondern Geometrie folgen.

Um diesen Gedanken zu erläutern, nehmen wir an, wovon ja viele überzeugt sind, dass die anziehenden Kräfte abnehmen, weil sich ihre Wirkung auf einer Kugelfläche verbreitet. In der gewöhnlichen Geometrie erhält man $4\pi r^2$ als Grösse einer Kugelfläche vom Halbmesser r , weshalb sich die Kraft im quadratischen Verhältnisse des Abstandes verringern muss. In der imaginären Geometrie habe ich die Oberfläche der Kugel gleich:

$$\pi(e^r - e^{-r})^2$$

gefunden und einer derartigen Geometrie folgen möglicherweise die Molekularkräfte, deren ganze Verschiedenheit demnach von der, immer sehr grossen Zahl e abhängen wird. Uebrigens soll das nur eine blose Annahme sein, zu deren Bekräftigung andre, triftigere Beweise aufzusuchen sind; aber das ist gleichwohl zweifellos, dass die Kräfte allein Alles erzeugen: Bewegung, Geschwindigkeit, Zeit, Masse, sogar Abstände und Winkel. Mit den Kräften befindet sich Alles in einer engen Verbindung, die wir ihrem Wesen nach nicht begreifen, weshalb wir auch nicht behaupten können, in die Beziehungen verschiedenartiger Grössen unter einander dürften nur deren Verhältnisse eingehen. Wenn wir die Abhängigkeit von dem Verhältnisse zulassen, warum sollen [21 wir nicht auch eine unmittelbare Abhängigkeit annehmen? Einige Fälle sprechen bereits zu Gunsten dieser Meinung: die Grösse der Anziehungskraft, zum Beispiel, wird ausgedrückt durch die Masse, die durch

das Quadrat des Abstandes dividirt wird. Für den Abstand Null stellt dieser Ausdruck eigentlich nichts dar. Man muss mit irgend einem, grossen oder kleinen, aber immer wirklich vorhandenen Abstände anfangen, und dann erst kommt die Kraft zum Vorschein. Nunmehr fragt es sich, wie erzeugt denn der Abstand diese Kraft? wie besteht diese Verbindung zwischen zwei so verschiedenartigen Dingen in der Natur? Wahrscheinlich werden wir das niemals begreifen; aber, wenn es richtig ist, dass die Kräfte vom Abstände abhängen, so können sich auch die Linien in einer Abhängigkeit von den Winkeln befinden. Wenigstens ist die Verschiedenartigkeit bei beiden Fällen gleich, denn deren Unterschied liegt eigentlich nicht im Begriffe, sondern nur darin, dass wir die eine Abhängigkeit aus Erfahrungen kennen, die andre aber, bei der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen, geistig annehmen müssen, entweder jenseits der Grenzen der sichtbaren Welt, oder in der engen Sphäre der Molekularanziehungen.

Wie dem auch sein mag, so wird doch die Annahme, dass [228 nur das Verhältniss der Abstände die Winkel bestimmen kann, ein besonderer Fall sein, auf den wir jedesmal kommen, wenn wir die Linien unendlich klein annehmen. Das Verfahren der gewöhnlichen Geometrie führt daher immer zu richtigen Schlüssen, nur nicht in [22 einem so weiten Sinne, wie sie das allgemeine geometrische System liefert, das ich Imaginäre Geometrie genannt habe. Der Unterschied bei den Gleichungen der einen und der andern entspringt aus der Hinzufügung einer neuen Konstanten, die nunmehr die Beobachtungen liefern müssten, die wir aber hieraus ohne merkliche Abweichung so beschaffen finden, dass die bei praktischen Messungen von Allen angenommene Geometrie mehr als genügend ist, selbst wenn sie an und für sich nicht streng richtig sein sollte. Das bedeutet entweder, dass dieses System sich zufällig in der Natur vorfindet oder dass alle in dieser für uns zugänglichen Abstände noch unendlich klein sind.

Ueberhaupt muss jeder Satz, den die Imaginäre Geometrie bei den Elementen einer Grösse zulässt, wenn er auf Linien von grosser Ausdehnung angewendet wird, nothwendig zu den Regeln der gewöhnlichen Geometrie führen, weil bei dieser Voraussetzung nur die ersten Potenzen der Zahlen beibehalten werden, welche die Linien darstellen, und folglich überall nur deren Verhältnisse in den Gleichungen auftreten. Solche Sätze sind zum Beispiel, dass die Abstände zwischen zwei Lothen überall gleich sind, dass das Loth mit seiner Spitze eine gerade Linie beschreibt, dass der Kreis mit wachsendem Durchmesser in eine gerade Linie übergeht.

Von allen bekannten Sätzen dieser Art muss man dem den Vor-

rang einräumen, der die Abhängigkeit des Verhältnisses der Linien von den Winkeln nach sich zieht; wenigstens steht hier die Ein- [23 fachheit im Begriffe sogar unsrer ersten Erfahrung nahe; das ist aber auch Alles, was man zur Verteidigung sagen kann: jedes andre Urtheil ist entweder falsch oder oberflächlich. Auch kann man unmöglich darin ein Bedenken finden, dass mit der unmittelbaren Abhängigkeit der Linien von den Winkeln eine Grösse hereinkommt, die ebenso willkürlich ist, wie die Wahl der Einheit. Wir können darauf antworten, dass nichts hindert, sich in den Gleichungen nicht das Verhältniss der Linien zu einer von denen, die darin betrachtet werden, vorzustellen, sondern das Verhältniss zu einer Grösse, die auf irgend eine Weise in der Natur bestimmt ist. Das habe ich in der Imaginären Geometrie gezeigt, indem ich Gleichungen aufstellte, wo alle Linien im Verhältnisse zu einer einzigen auftreten, die aus Beobachtungen zu bestimmen wäre, wenn diese dazu genügend wären.

Ich halte es nicht für nöthig andre, allzu künstliche, oder willkürliche Annahmen ausführlich zu erörtern. Nur eine davon verdient noch einige Aufmerksamkeit, nämlich der Uebergang des Kreises in eine gerade Linie. Der Mangel ist hier übrigens von vornherein ersichtlich in der Verletzung der Stetigkeit, indem eine Kurve, die nicht aufhört, sich zu schliessen, wie gross sie auch sein mag, sich [229 unvermittelt in die unendliche Gerade verwandeln soll und sie also auf diese Weise eine wesentliche Eigenschaft verliert. In dieser Beziehung füllt die imaginäre Geometrie den Zwischenraum viel besser aus. Wenn wir bei ihr einen Kreis, dessen sämmtliche Durchmesser in einem [24 Punkte zusammenlaufen, vergrössern, so gelangen wir schliesslich zu einer solchen Linie, deren Normalen sich im Unendlichen einander nähern, wenn sie einander auch nicht mehr schneiden können. Diese Eigenschaft kommt jedoch nicht der Geraden zu, sondern der krummen Linie, die ich in meiner Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ als Gränzkreis bezeichnet habe.

Wenn man endlich die schwierige Aufgabe des Parallelismus durch die Erfahrung lösen soll, so muss Legendres Vorschlag, auf einem Kreise den Halbmesser sechsmal abzutragen, ohne Zweifel für viel zu ungenau erklärt werden. In meinen „Anfangsgründen der Geometrie“ habe ich unter Benutzung astronomischer Beobachtungen gezeigt, dass in einem Dreiecke, dessen Seiten annähernd dem Abstände der Erde von der Sonne gleich sind, die Winkelsumme nicht mehr als 0,0003 Bogensekunden von zwei Rechten abweichen kann. Diese Abweichung wächst im geometrischen Verhältnisse mit den Seiten des Dreiecks, und folglich ist bis jetzt, wie ich vorhin bemerkt habe, die

gewöhnliche Geometrie bei den Messungen in der Praxis mehr als genügend. Zu diesem Schlusse kann man sogar mit Hülfe ziemlich einfacher und den Anfangsgründen einer Wissenschaft angemessener Sätze gelangen, während allerdings die vollständige Theorie eine ganz veränderte Anordnung des Vortrags erfordert und überdies die Hinzufügung der Trigonometrie.

Zu den Unvollkommenheiten der Parallelentheorie sollte man [25 auch die Erklärung des Parallelismus selbst rechnen. Doch hing diese Unvollkommenheit keineswegs, wie Legendre es vermuthete, von einem Mangel in der Erklärung der geraden Linie ab, geschweige denn, füge ich hinzu, von den Mängeln, die in den ersten Begriffen versteckt waren, und die nachzuweisen ich hier vorhabe, aber auch ihnen abzu- helfen, soweit ich vermag.

Gewöhnlich beginnt man die Geometrie, indem man den Körpern drei Ausdehnungen beilegt, den Flächen zwei, den Linien eine, während man beim Punkte gar keine zulässt. Indem man die drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe nennt und unter diesen Benennungen eigentlich die drei Koordinaten versteht, beeilt man sich auf diese Weise verfrühte Begriffe durch Worte mitzutheilen, denen die gesprochene Sprache bereits einen gewissen, für die strenge Wissenschaft freilich noch unbestimmten Sinn beilegt. In der That, wie ist es möglich, sich die Ausmessung der Länge nach klar vorzustellen, wenn wir noch nicht wissen, was eigentlich eine gerade Linie ist? Wie kann man von Breite und Höhe reden, ohne vorher etwas über Lothe, über die Ebene und darüber gesagt zu haben, wie sich die Lothe in einer und in verschiedenen Ebenen verhalten? Wenn endlich der Punkt [230 gar keine Ausdehnung hat, was bleibt denn dann bei ihm übrig, damit er Gegenstand eines Schlusses sein könne? Mag es auch so sein, dass sich jeder die gerade Linie klar vorstellt, obwohl er sich von [26 seinem Begriffe keine Rechenschaft geben kann; aber es fragt sich, auf welche Weise er nunmehr mit Hülfe der geraden Linie bei einer krummen Linie eine Ausdehnung bestimmen soll und bei einer krummen Oberfläche deren zwei.

Freilich, man braucht nicht zu verlangen, dass Länge, Breite und Höhe auf einander senkrecht seien: es genügt, wenn man für sie Linien in verschiedenen Richtungen genommen hat. Jedoch stösst man auch in diesem Falle auf eigenthümliche Schwierigkeiten. Macht man es sich zum Grundsatz, nicht vorzeitig von den Begriffen zu borgen, die man erst im Folgenden entwickeln soll, so ist die Frage, wie dann die Bedingung ausdrücken, dass bei den Körpern die drei Abmessungen drei Geraden in verschiedenen Ebenen angehören sollen? Ferner darf

man die verschiedene Richtung der beiden Theile, die von einem Knick auf einer Linie ausgehen, nicht mit der zweifachen Ausdehnung bei einer Fläche verwechseln und endlich muss man vollständig erklären, was eigentlich unter einer Richtung und unter einem Winkel zu verstehen ist. Kürzer: Raum, Ausdehnung, Ort, Körper, Fläche, Linie, Punkt, Richtung, Winkel sind Wörter, mit denen man die Geometrie beginnt, mit denen man aber niemals einen klaren Begriff verbindet.

Indessen kann man alle diese Dinge noch von einer andern Seite aus betrachten. Es ist nöthig zu bemerken, dass hier die Unklarheit im Begriffe durch die Abstraktheit hervorgerufen wird, die bei der Anwendung auf wirkliche Messungen überflüssig wird und folglich unnützer Weise in die Theorie hineingebracht worden ist. Die Flächen, Linien und Punkte, wie sie die Geometrie erklärt, sind nur in unsrer Vorstellung vorhanden, während wir die Ausmessung der Flächen und Linien ausführen, indem wir dazu Körper anwenden. Aus diesem Grunde brauchen wir von Flächen, Linien und Punkten nur so zu sprechen, wie wir sie uns bei wirklicher Messung zu denken haben, und dann werden wir uns nur noch an eben die Begriffe halten, die in unserm Verstande mit der Vorstellung von Körpern unmittelbar verbunden sind, an die unsre Vorstellung gewöhnt ist und die wir in der Natur unmittelbar prüfen können, ohne uns zuvor auf andre, künstliche und fremdartige einzulassen. Aber mit diesen neuen Begriffen bekommt die Wissenschaft gerade im Anfange eine andre Richtung, der sie folgt, bis sie in die Analysis übergeht, wo dann das Verfahren beim Vortrage nunmehr wieder das gewöhnliche Ansehen bekommt. Ich will mich bemühen, zu erklären, worin diese Veränderung bestehen mag.

In der Mathematik befolgt man zwei Methoden, die Analyse und die Synthese. Das unterscheidende Merkmal der Analyse bilden die Gleichungen, die jedem Urtheile zur ersten Grundlage dienen und [231 die überhaupt zu allen Schlüssen führen. Die Synthese, oder die [28 Methode des Aufbauens, erfordert genau dieselbe Vorstellung, die in unserm Verstande unmittelbar mit den ersten Begriffen verbunden ist. Der Hauptvortheil bei der Analyse besteht darin, dass man darin immer von den Gleichungen aus auf geradem Wege nach dem vorgesetzten Ziele geht. Die Synthese ist überhaupt keinen allgemeinen Regeln unterworfen, aber man muss mit ihr nothwendig den Anfang machen, um schliesslich, nachdem man Gleichungen aufgesucht hat, damit zugleich die Gränzlinie zu erreichen, hinter der nunmehr Alles in die Wissenschaft der Zahlen übergeht.

Zum Beispiel zeigt man in der Geometrie, dass zwei Lothe einander nicht schneiden, dass Dreiecke, bei denen nur einige Theile gleich sind, überhaupt in jeder Beziehung kongruent sind. Vergeblich hat man wohl solche Fälle, wie auch die ganze Theorie der Parallellinien, analytisch untersuchen wollen. Hierin wird man niemals vorwärts kommen, ebenso wie man ohne Synthese nicht auskommen kann, wenn man ebene Flächen misst, die von geraden Linien begränzt sind, oder Körper, die von Ebenen begränzt sind. Es versteht sich von selbst, dass man bei der Synthese die Analyse sogar als Hilfsmittel benutzen muss; aber es ist unstreitig, dass in den Anfangsgründen der Geometrie und der Mechanik die Analyse niemals die einzige Methode sein kann. Der Geometrie wird bis zu einem gewissen Grade immer etwas eigenthümlich geometrisches zugehören, das ihr auf keine Weise genommen werden kann. Man ist im Stande, das Gebiet der Synthese einzuschränken, aber es ganz zu beseitigen ist unmöglich. Bei dieser Bemühung, die Synthese durch Analyse zu ersetzen, darf man sich sogar nicht einmal so sehr beeilen, jedesmal Funktionen zuzulassen, [29 wo man nur eine Abhängigkeit voraussehen kann, ohne zu wissen, worin sie eigentlich besteht, und noch weniger, wie sie ausgedrückt wird. Mit dieser Begränzung der Analyse bestimmen wir das wahre Ziel und den gehörigen Ort für die andre Methode, die anfangs die Wissenschaft allein beginnt, mit solchen Begriffen, aus denen das Schlussverfahren nunmehr alles Folgende erzeugt, indem es sogleich aus den ersten ihm gegebenen Begriffen neue ableitet und dadurch auch ferner die Gränzen unsrer Kenntnisse nach allen Richtungen bis ins Unendliche erweitert.

Ohne Zweifel werden immer die Begriffe zuerst gegeben sein, die wir in der Natur durch Vermittelung unsrer Sinne erwerben. Der Verstand kann und soll sie auf die kleinste Zahl zurückführen, damit sie hernach der Wissenschaft als eine feste Grundlage dienen können. Gewöhnlich befolgt jedoch niemand die synthetische Methode in dieser Gestalt, unter Einhaltung aller hier ausgesprochenen Regeln, sondern man zieht vor, wenn auch vor der Zeit, die Analyse einzuführen, und setzt eine wenn auch unvollständige Entwicklung der Begriffe voraus, aus denen unser natürlicher Verstand besteht und denen man nur Namen zu geben braucht, ohne sich sehr auf Erläuterungen einzulassen und sich um Genauigkeit bei den Erklärungen zu kümmern. Wenn Leichtigkeit und Einfachheit zur Wahl dieser Methode des Vortrags nöthigen, so wird doch immer die strenge Wissenschaft einen besondern Vorzug auf ihrer Seite haben, und man wird diesen Vorzug [232 über kurz oder lang benutzen müssen. Den ersten Versuch hierzu [30

habe ich bei der Algebra gemacht und nunmehr unternehme ich dasselbe bei der Geometrie.

Die reine, überhaupt von jeder Beimischung der Synthese freie Analyse kann in der Geometrie nicht eher ihren Anfang nehmen, als nachdem zuvor jede Abhängigkeit durch Gleichungen dargestellt ist, und für jede Art geometrischer Grössen Ausdrücke gegeben sind. In der Geometrie können wir die Grösse nur mit Hülfe der Messung verstehen, die für krumme Linien und Flächen eigentlich gar nicht existirt. Wie klein auch die Theile einer Kurve genommen werden mögen, sie bleiben immer krumm, folglich können sie niemals mit Hülfe einer Geraden gemessen werden. Dasselbe muss man von einer krummen Oberfläche sagen, bei der die Theile, wie eng man sie auch begränzen möge, niemals eben sind. Andererseits giebt es in der Natur weder gerade noch krumme Linien, weder Ebenen noch krumme Flächen: wir finden darin nur Körper, so dass alles Uebrige von unsrer Einbildungskraft geschaffen und daher blos in der Theorie vorhanden ist. Lagrange hat die Annahme des Archimedes zur Grundlage genommen, dass man auf einer Kurve stets zwei Punkte so nahe bei einander annehmen kann, dass alsdann der Bogen zwischen ihnen für grösser als die Sehne erachtet werden kann, aber für kleiner als die beiden Tangenten an den Bogen, die von dessen Enden bis zu ihrem Zusammentreffen gezogen sind (*Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange*). Eine derartige Annahme ist wirklich nöthig, aber durch sie wird der ursprüngliche Gedanke, krumme Linien mit geraden [31 zu messen, beseitigt. Ebenso verhält es sich mit den Flächen, wenn man beabsichtigt, sie mit Ebenen zu messen.

Demnach stellt die Berechnung der Länge einer krummen Linie, sowie der Grösse einer krummen Fläche keineswegs sozusagen das Gerademachen der Krümmung dar, sondern sie erstrebt ein völlig andres Ziel: die Gränze zu finden, der die thatsächliche Ausmessung um so näher kommt, je genauer sie gemacht worden ist. Die Messung aber hält man für um so genauer, je feiner die Glieder der benutzten Kette sind; für am genauesten hält man sie endlich, wenn man anstatt der Kette einen dünnen, vollkommen biegsamen Faden nimmt. Das ist der Grund, weshalb man in der Geometrie eigentlich zeigen muss, dass die Summe der Tangenten abnimmt, während gleichzeitig die Summe der Sehnen wächst, bis die zwei Summen aufhören sich merklich von der Gränze zu unterscheiden, der sich beide nähern und welche die Geometrie nunmehr als Länge der krummen Linie annimmt. Jetzt ist klar, dass die Berechnung nach dieser Regel mit der Messung um so mehr übereinzustimmen pflegt, je genauer diese ist. Zugleich ist

hier ersichtlich, worauf die Annahme des Archimedes begründet ist. Nach dem Vorbilde der krummen Linien muss man die Grösse der Flächen beurteilen, aber keineswegs darf man behaupten, sehr kleine Theile seien geeignet, eben gemacht zu werden.

Für Flächen, die von krummen Linien begränzt sind, und für Körper, die von krummen Flächen begränzt sind, giebt es eben- [32 falls keine Messung im strengen Sinne, sobald im ersten Falle ein Quadrat, im zweiten ein Würfel als Mass dienen soll. Da wir [233 jedoch immer nur die Gränze zu finden beabsichtigen, der sich die wirkliche Messung nähert, so müssen wir zeigen, dass wir sicher jedesmal zu einer derartigen Gränze gelangen; ferner müssen wir erklären, in welcher Art wir uns die Messung vorzustellen haben und wie wir dabei die verlangte Genauigkeit erreichen können. Sollen alle diese Forderungen erfüllt werden, so kann man unmöglich ohne besondere Hilfsannahmen auskommen, die man als Axiome annimmt:

1) Flächenräume sind gleich, wenn der eine von ihnen in der Weise zusammensetzbar ist, dass der andre in Theile zerlegt wird, die in neuer Anordnung zusammengefügt werden;

2) Ein Flächenraum ist kleiner als ein solcher, in dem er ganz Platz hat, ohne dabei diesen vollständig auszufüllen;

3) Die Grösse eines Dreiecks verschwindet bei unbegrenzter Verkleinerung einer Seite.

Die letzte Annahme ist sogar bei der Messung der Flächenräume selbst nothwendig. Auf ähnliche Axiome muss man sich auch bei der Messung von Körpern stützen.

Kapitel I.

[236
33

Die ersten Begriffe in der Geometrie.

§ 1.

Die Berührung bildet das unterscheidende Merkmal der Körper, und ihr verdanken sie den Namen: geometrische Körper, sobald wir an ihnen diese Eigenschaft festhalten, während wir alle andern, mögen sie nun wesentlich sein oder zufällig, nicht in Betracht ziehen.

Gegenstand der Beurteilung sind ausser den Körpern zum Beispiel auch Zeit, Kraft und Geschwindigkeit der Bewegung; aber der Begriff, der in dem Worte Berührung enthalten ist, bezieht sich nicht darauf. In unserm Verstande verbinden wir ihn blos mit den Körpern, wenn wir von deren Zusammensetzung oder Zerlegung in Theile reden. Diese einfache Vorstellung, die wir unmittelbar in der Natur dure