ФОРМУЛЫ, РИСУНКИ И ЕСТЕСТВЕННЫЙ ЯЗЫК В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕКСТАХ (*)

АНДРЕЙ РОДИН И ГЕОРГИЙ ШАБАТ

1. Введение

В большинстве современных математических учебников любого уровня и во многих профессиональных статьях по математике, которые публикуются в специализированных журналах и размещаются в открытых архивах (в первую очередь в архиве `https://arxiv.org`), используются выразительные средства трех разных типов: объяснения на (письменном) естественном языке, рисунки (включая схемы, диаграммы и чертежи) и формулы.[1] Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы разобраться, как эти выразительные средства используются в математических текстах и других видах математической коммуникации, включая устные сообщения и преподавание в классе или в дистанционной форме. Такой анализ даст нам ключ для понимания механизмов математического мышления как на индивидуальном, так и на социальном уровне.

Наблюдения и выводы, которые составляют содержание настоящей статьи, могут также иметь практическое значение как для преподавания математики в традиционных формах, так и при разработке новых цифровых платформ для использования в образовании и поддержания коммуникации в профессиональных математических сообществах. Компьютерные средства автоматической проверки и поиска математических доказательств развиваются во всем мире начиная по меньшей мере с 1960-х годов. В СССР соответствующая исследовательская программа была связана в первую очередь с именем Виктора Михайловича Глушкова и его “алгоритмом очевидности” [27]. Хотя использование такого рода средств еще не стало повсеместным, за последнее десятилетие их роль в современной математической практике многократно возросла. На сегодняшний же день существуют обширные электронные библиотеки формализованных математических доказательств, и сообщества математиков (как профессионалов,

---

(*) Настоящая статья представляет собой продолжение междисциплинарного исследования, которое один из ее авторов (Г.Б. Шабат) в течение многих лет проводил совместно с Григорием Ефимовичем Крейдлиным (1946–2025), см.[10]. Авторы посвящают эту статью его светлой памяти.

[1] В настоящей работе мы понимаем под формулами любые группы символов и отдельные символы, которые не являются записями высказываний на том или ином естественном языке. В этом расширительном смысле мы будем называть формулами выражения вроде $2+3$ или даже $2++$. Такое широкое понятие формулы отличается от принятого в математической логике, где выражения, подобные приведенным выше, называются *термами*.

так и любителей), которые продолжают развивать эти библиотеки и использовать их в своей повседневной работе [12].

Можно ожидать, что уже в ближайшие годы использование такого рода цифровой инфраструктуры станет таким же обычным в математической практике (включая математическое образование), каким уже сегодня является использование LaTeXи поддержка специализированных электронных математических архивов вроде arXiv.org. Нужно, однако, иметь в виду, что внедрение систем автоматической проверки и поиска доказательств затрагивает основы математического мышление на более глубоком уровне, чем простое использование современных средств электронной коммуникации: тогда как LaTeXи arXiv.org в основном воспроизводят форматы математических публикаций, сформированные в эпоху бумажной печати, систем автоматической проверки и поиска доказательств требуют представления математических рассуждений в виде исполняемых компьютерных программ, что самым существенным образом сказывается на характере этих рассуждений.

Принципы и методы применения систем автоматической проверки и поиска доказательств в математическом образовании и в математических исследованиях на сегодняшний день остаются дискуссионными. Однако сегодня уже есть общее понимание того, что формальное представление математических рассуждений в виде программного кода на практике необходимо совмещать с использованием более традиционных выразительных средств, включающих в себя естественный язык и рисунки[2]. Поэтому изучение роли различных средств в математических коммуникациях важно не только для лучшего понимания прошлого, но и для создания математики будущего.

В следующих разделах статьи мы поочередно рассматриваем ряд исторических и современных примеров математических текстов, а в заключительной части 9 подводим итоги и делаем некоторые обобщения.

2. Математическое письмо и письменность в эпоху палеолита и раннего неолита

Говоря о *письменности*, мы, как обычно, будем иметь в виду графическую репрезентацию устной речи. Древнейшие из надежно датированных и удовлетворительно расшифрованных образцов письменности в этом узком смысле слова – это образцы клинописной шумерской письменности, которые датируются примерно 3200-ми годом до нашей эры. Хотя все наши сегодняшние знания о шумерском языке получены исключительно на основе письменных археологических источников, тот факт, что этот язык существовал также и в устной форме, никем не ставится под сомнение.[4, p.19] Напомним, что устный язык появился в человеческой истории намного раньше, чем

[2]См., например, французский проект MALINCA, задачей которого является разработка лингвистической поддержки для систем автоматического поиска и проверки доказательств.

письменность.[3] Таким образом, письменность является относительно поздним изобретением на антропологической шкале времени.

Однако люди научились создавать изображения и символы (как двухмерные, так и трехмерные) и их использовать намного раньше, чем они научились записывать устную речь. Самые ранние графические артефакты, которым можно с большой долей уверенности атрибутировать математическое содержание, относятся к эпохе позднего палеолита.[4] Такие артефакты предположительно представляют собой примитивные счетные записи, обычно в виде линейно упорядоченных групп насечек на костях животных или других твердых поверхностях, на которых они могли сохраниться до наших дней.

Одним из подобных артефактов является найденная в 1973 году в Южной Африке *кость из Лебомбо* возраст которой, согласно результатам углеродного анализа, составляет от 42 до 43 тысячелетий [6], см. Рис. 1. Эта кость содержит 29 насечек, что некоторые исследователи интерпретируют как указание на возможное использование данного предмета в качестве лунного календаря. Другой широко известный подобный артефакт – это найденная в 1936 году на палеолитической стоянке Дольне-Вестонице в Чехии *волчья кость* с насечками, возраст которой составляет около 30 тысяч лет [30, p. 37], см. Рис.2. В литературе описаны и другие подобные артефакты эпохи среднего и позднего палеолита.[5]

Впрочем, у гипотезы о том, что наши далекие предки наносили насечки на кости убитых ими животных именно в целях счета и хранения числовой информации, есть и свои непримиримые критики, которые вполне справедливо указывают на отсутствие твердых материальных свидетельств в ее пользу. Более уверенно можно судить о назначении глиняных “токенов”, которыми пользовались жители древнего Шумера и других культур Ближнего Востока, начиная с середины девятого тысячелетия до нашей эры. Токены представляют собой небольшие подобные объекты, имеющие правильную

[3]Согласно последним оценкам, основанным на недавно приобретенных знаниях об эволюции и динамике человеческой популяции в ранний период ее существования, способность к устной речи у *Homo sapiens* появилась не позднее, чем 130 тысяч лет тому назад, то есть еще в эпоху среднего палеолита [13].

[4]Иногда высказывается крайняя точка зрения, согласно которой любое математическое содержание предполагает рассуждения, в которых можно выделить утверждения и доказательства. Древние и даже современные счетные практики, согласно этому взгляду на вещи, не относятся к математике. В этой работе мы не пользуемся подобным узким пониманием математики и заведомо относим к математике все, что так или иначе касается числа и счета.

[5]Эррико и его соавторы приводят аргументы в пользу гипотезы о том, что имеющиеся сегодня в распоряжении исследователей более старые образцы костей с рядами идентичных насечек также использовались для счета. В статье [6] речь идет об образце, возраст которого оценивается в 72-60 тысяч лет. Для понимания контекста этой дискуссии нужно иметь в виду, что согласно имеющимся сегодня антропологическим данным, гоминиды начали использовать каменные орудия для нанесения насечек на кости убитых ими животных еще в самом начале палеолитического периода, то есть около 2,6 миллиона лет тому назад.

Рис. 1. Кость с насечками, найденная в 1973 году на палеолитической стоянке в горах Лебомбо (Южная Африка), возраст находки 42– 43 тысячи лет.

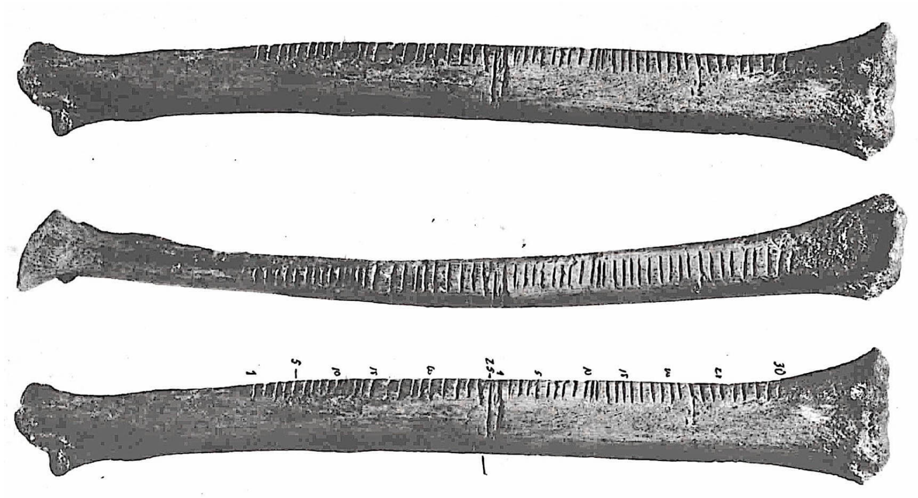


Рис. 2. Волчья кость с насечками, найденная в 1936 году на на палеолитической стоянке около деревни Долна Вестонице (Чехия) в трех разных ракурсах, возраст находки около 30 тысяч лет.

геометрическую форму: шарики, диски, конусы и некоторые другие. Начиная с середины четвертого тысячелетия до нашей эры, конусы стали запечатывать в специальные глиняные “конверты”, то есть полые сферы диаметра порядка 10-15 сантиметров. Некоторые из таких конвертов имеют клинописные надписи, которые исследователям удалось расшифровать, и которые недвусмысленно указывают на то, что содержащиеся в данном конверте токены разных видов представляют различные виды домашних животных или других товаров и служат для подсчета и фиксации их количества, см. Рис 3

Таким образом, даже если учитывать вероятность ошибочной атрибуции математического содержания некоторым артефактам дописьменной эпохи, тот факт, что графические и другие материальные техники, связанные с практикой счета, возникли в истории человечества намного раньше письменности (жестко связанной с тем или иным естественным языком), можно считать твердо установленным.

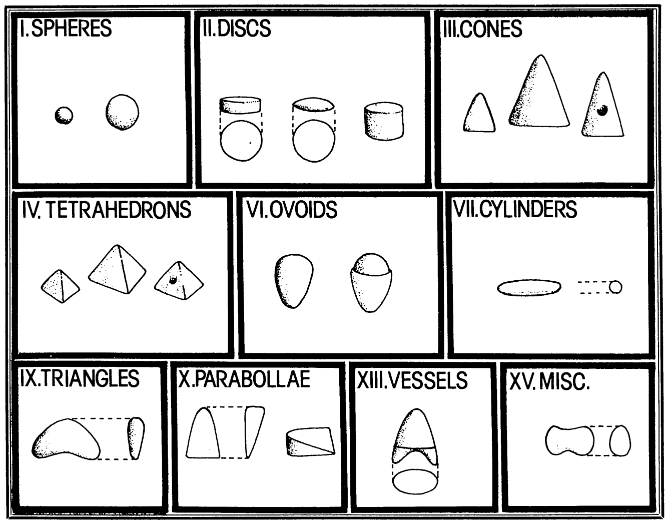


Рис. 3. Типология счетных токенов эпохи неолита, см. [18, p. 370]

3. Естественный язык в математическом тексте: Московский папирус (ок. 1850 до н.э.)

Московский папирус, хранящийся в музее изящных искусств имени Пушкина в Москве, является на сегодняшний день древнейшим математическим памятником Египетской цивилизации, который создан около 1850 г. до нашей эры[6]

В качестве примера мы рассмотрим здесь фрагмент Московского папируса, содержащий решение задачи о вычислении объема усеченной квадратной пирамиды по длине стороны основания ($a = 4$ единицы длины), длине ребра верхней грани ($b = 2$ единицы длины) и высоте ($h = 6$ единиц длины), см. Рис. 4 –5. Описанное в папирусе вычисление соответствует формуле $\frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$, которая дает точный ответ: 56 единиц объема. Оставляя в стороне все математические подробности, мы обсудим здесь только самую общую структуру данного текста.[7]

В первых двух колонках данного фрагмента (колонки 27 и 28, на Рис. 5 нумерация колонок идет справа налево) дается текстовый вариант решения данной задачи на

[6]Этот папирус был приобретен Владимиром Семеновичем Голенищевым (1856-1947) во время одной из его многочисленных поездок в Египет. В 1909-м году Голенищев продал этот папирус Музею изящных искусств вместе со всей своей коллекцией египетских папирусов. Научное издание этого папируса см. [19].

[7]Вопрос о том, каким образом точное решение этой задачи могло стать известным древнеегипетским математикам, остается одним из интригующих открытых вопросов истории древнеегипетской математики. На этот счет существует целый ряд остроумных гипотез [23, p. 66-75], [22], [3], но дальнейшее продвижение в этом вопросе возможно только в результате новых археологических находок.

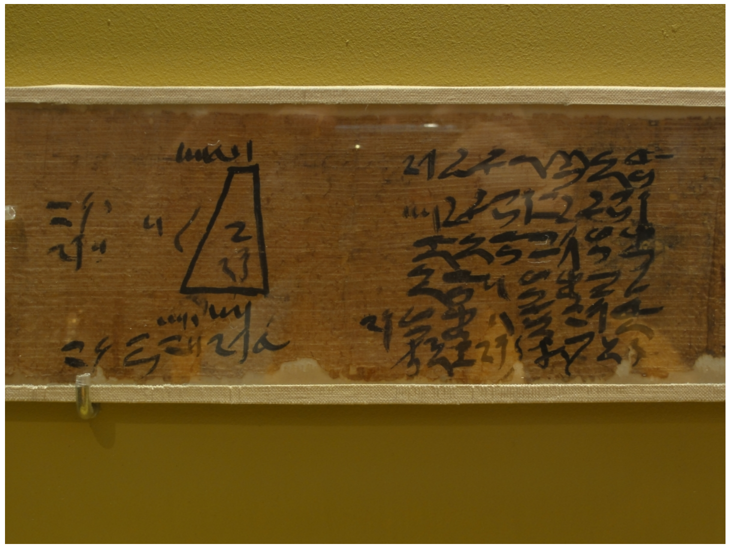


Рис. 4. Фотография фрагмента Московского папируса, содержащего задачу о нахождении объема усеченной пирамиды (только колонки 28-29), возраст папируса около 4000 лет, изображение находится в публичном доступе.

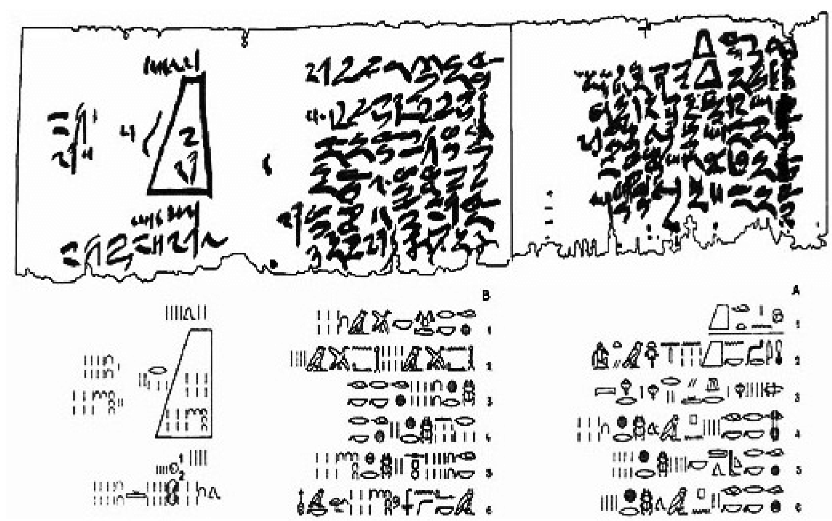


Рис. 5. Расшифровка иератического письма того же фрагмента Московского папируса (колонки 27-29). Вертикальная черта означает единицу, символ ∩ означает десятку, символ, похожий на горизонтально расположенную выпуклую линзу, означает деление. Текст читается построчно (первая строка сверху), строки читаются справа налево, порядок чтения колонок тоже справа налево. По [19], изображение находится в публичном доступе.

естественном (классическом среднегипетском) языке — с некоторыми исключениями, о которых будет сказано чуть ниже[8]. В последней 29-й колонке то же самое вычисление представлено в символической форме (с использованием непозиционной десятичной системы исчисления), а также дается схематический рисунок усеченной пирамиды в виде трапеции. Впрочем, в уменьшенном виде тот же самый рисунок используется (дважды) и в текстовой части фрагмента, где он включен в текст в качестве идеограммы (см. первые две строки колонки 27). Числовые данные в текстовой части даются попеременно в текстовой форме (иератическая запись) и в той же обычной символической форме, что и в заключительной "формальной" части данного фрагмента.

Удивительно, что этот древний математический текст использует те же самые выразительные средства, что и современные математические тексты: пояснения на естественном языке, формулы и рисунок. Подобно авторам современных учебников и математических статей, автор Московского папируса свободно включает математические символические обозначения в структуру письменной речи на естественном языке[9], отдельно выделяя при этом рисунок (чертеж) и "чистое" символическое вычисление, использующее только арифметические символы и знаки операций.

В чем именно состоит роль естественного языка в рассматриваемом нами фрагменте Московского папируса? Можно предположить, что для египетского вычислителя, владеющего техникой символического счета, колонка 29 Московского папируса, представляющее решение задачи в символической форме и дополненное рисунком, было понятно "без лишних слов" и не требовало использования текстовой версии этого решения, представленного в колонках 27 и и 28.[10] Такой вычислитель мог передавать свои знания и умения своим непосредственным ученикам, пользуясь разговорным языком в качестве вспомогательного средства, но не прибегая при этом к письменности. Использование в математических текстах письменного (естественного) языка наряду с формальными записями и рисунками, в свою очередь, многократно увеличивало возможности самостоятельного и "дистанционного" обучения, способствуя распространению математических знаний и умений в пределах египетского царства и за его пределами, а также делая возможной устойчивую передачу этих знаний через многие поколения. Фундаментальная роль письменности в истории Древнего Египта хорошо известна и описана [2], и математика в этом отношении не является исключением. Формальные

[8]Вот приблизительный русский перевод этого текста (по [23, стр; 140] с незначительными стилистическими поправками; слова в квадратных скобках добавлены): "Схема вычисления [объема] усеченной пирамиды. Если тебе дают усеченную пирамиду шести локтей в высоту, 4 локтя в нижней грани, 2 [локтя] в верхней грани, вычисляй с [числом] 4, возводя его в квадрат. Получается 16. Удвой 4, получается 8. Вычисляй с [числом] 2, возводя его в квадрат; получается 4. Сложи эти 16 с этими 8 и с этими 4; получается 28. Вычисли $\frac{1}{3}$ от 6; получается 2. Умножь 28 на 2; получается 56. Смотри: [объем] пирамиды 56. Ты нашел [искомую величину] правильно."

[9]Как в предложениях вроде "Пусть a - длина стороны основания усеченной квадратной пирамиды, b - длина стороны верхней грани, и h - ее высота. Тогда объем данной пирамиды равен $\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$.

[10]Могут возникнуть сомнения относительно сложности интерпретации находящегося в колонке 29 рисунка именно как квадратной усеченной пирамиды, но текст в колонках 27, 28 никак не уточняет эту интерпретацию, а использует подобный рисунок как идеограмму.

записи вычислений сами по себе не могли функционировать подобным образом (даже если они дополнялись рисунками), поскольку их интерпретация требовала специальных знаний.

4. Формулы в тексте: традиционная геометрическая нотация

Наш следующий пример относится к другой исторической эпохе (4-3 век до н.э.) и другому типу математики. Для определенности мы будем говорить о "Началах" Евклида [24], но большинство наших наблюдений в этом разделе применимо к древнегреческой математике классического периода в целом. У Евклида мы находим не только примеры решения задач и утверждения теорем, но и связанные с этими решениями и теоремами доказательства.

Как и анонимный автор Московского папируса, Евклид использует в "Началах" письменный вариант естественного языка и рисунки (чертежи).[11] При этом в отличие от рассмотренного нами выше случая Задачи 14 Московского папируса, в "Началах" Евклида нет внелингвистических символических процедур конструкций, которые полностью представляли бы математическое содержание этого источника (или хотя бы его фрагмента) и могли бы быть в принципе корректно интерпретированы без опоры на естественный язык. Хотя математическое доказательство нужно отличать от риторического убеждения, кажется очевидным, что практика доказывания в математике была связана в греческих полисах с аналогичной практикой в юридической и политической сферах общественной жизни, и в этом отношении существенно зависела от использования естественного языка. Идея о том, что доказательство может быть заменено вычислением или представлено в виде вычисление, имеет более позднее происхождение; мы вернемся к этому вопросу в разделе 5.

Традиционные буквенные обозначения, которые мы находим у Евклида и которые и сегодня используются в школьных учебниках геометрии[12] играют роль, аналогичную роли вычислительных формул в Московском папирусе или алгебраических формул в математике Нового Времени. Пример таких обозначений приведен на Рис. 6, на котором изображен треугольник, вершины которого обозначены заглавными латинскими буквами A, B, C.

Буквенные обозначения, подобно формулам, обеспечивают взаимодействие между рисунком и текстом: встретив в тексте указание на "треугольник ABC", читатель по этому имени может найти нужный треугольник на чертеже. Такое взаимодействие между текстом и чертежом имеет первостепенное значение, поскольку без сопровождающего текста чертеж не может быть адекватно интерпретирован: чтобы читатель

[11] Чертежи эпохи Евклида в оригинальном виде до нас не дошли . Однако они достаточно подробно описаны в доступных нам исторических источниках, чтобы их существование не вызывало никаких сомнений. [14].

[12] В более ранних и других независимых математических культурах буквенные обозначения на чертежах не использовались [14, p. 58]. Их нет, в частности, и в Московском папирусе

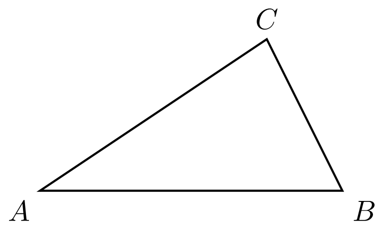


Рис. 6. Чертеж треугольника с традиционными буквенными обозначениями

мог понять, что Рис. 6 представляет именно математический треугольник, а не какое-то другое понятие. Понятие треугольника нужно сначала определить, а затем соотнести это определение с данным рисунком. Заметим еще, что, поскольку используемые в геометрических обозначениях буквы сохраняют свои обычные фонетические значения, математический текст, использующий такие обозначения, может быть озвучен (то есть прочитан вслух) без дополнительных усилий.

Буквенные геометрические обозначения – это не просто составленные из алфавитных знаков слова, которые произвольным образом даются тем или иным геометрическим объектам. Система таких обозначений содержит элементы формального синтаксиса, который отражает структуру обозначаемых объектов и конструкций (то есть соответствующую семантическую структуру). Отдельные буквы, такие как A, B, C, обычно (но не всегда) в традиционной геометрии используются для обозначения *точек*. Пара букв, например AB, по умолчанию обозначает отрезок с концами A, B; поскольку обычное понятие об отрезке не предполагает того или иного порядка его концов, отрезки AB и BA всегда тождественны. Слово ABC может обозначать изображенный на Рис. 6 треугольник, сообщая читателю информацию о его составных частях: вершинах A, B, C и сторонах AB, BC и AC. Если последовательность букв обозначает многоугольник, то любая последовательность, полученная в результате циклической (но не любой) перестановки данной последовательности, будет обозначать тот же самый многоугольник.

Такого рода правила не являются жесткими. В “Началах” Евклида имя, составленное из трех букв, может обозначать не треугольник, а окружность (если эти буквы лежат на этой окружности, см. Предложение 1.1); отдельная буква может обозначать не точку, а многоугольник (Предложение 2.14). Тем не менее, систему таких буквенных обозначений можно рассматривать в качестве отдельной символической системы письма, которая в “Началах” Евклида и многих других математических текстах вплоть до современных учебников играет важную роль.

Существует также очевидная аналогия между буквенными обозначениями в геометрии и в алгебре. В алгебре буквы используются (кроме прочего) для обозначения *переменных величин*, которые позволяют описывать паттерны (алгоритмы) арифметических вычислений и некоторых геометрических построений с помощью удобных формул. Рассмотрим, например, следующую словесную инструкцию.

(1) Данные два числа нужно сложить, и полученный результат умножить на себя.

Это вычисление можно проиллюстрировать на примере, когда даны числа 2 и 3.

$$\begin{aligned} 2+3 &= 5 \\ 5\times 5 &= 25 \end{aligned} \tag{2}$$

или в более компактном виде (с использованием скобок и символа возведения в квадрат) с помощью единственной формулы

$$(2+3)^2 = 25 \tag{3}$$

Данную схему вычисления можно записать с помощью похожей формулы в *общем виде* 1) как

$$(a+b)^2 = c \tag{4}$$

уточнив, что a, b — это данные числа, а c — полученный результат.

Аналогичным образом, геометрическое построение правильного треугольника по данной стороне (то есть данному отрезку прямой, который играет роль стороны треугольника), описанное в Предложении 1.1 "Начал" Евклида, может быть осуществлено для *любого* данного отрезка, и в этом смысле тоже является вполне общим. Буквенное обозначение, которым пользуется Евклид, обозначая данный отрезок как AB, позволяет выразить эту общность, поскольку, как и в формуле 4, имя AB может обозначать любой данный отрезок. Хотя в каждом конкретном случае имя AB обозначает отрезок, изображенный на данной диаграмме, возможность многократно *воспроизводить* построение, описанное в Предложении 1.1 с разными данными отрезками, обеспечивает его общность. Предложение 1.1 "Начал" сформулировано с помощью буквенных обозначений так, что его воспроизведение с новыми исходными данными не требует никаких синтаксических изменений. Поэтому можно сказать, что "сторона AB" играет в Предложении 1.1 роль "геометрической переменной", вполне аналогичную роли числовых алгебраических переменных a, b в формуле 4. Хотя приписывать Евклиду современное (или относящееся к 17-18 векам) понятие переменной величины было бы очевидным анахронизмом, игнорировать эту аналогию было бы тоже неверно.[13]

[13]Подробнее этот вопрос разбирается в [14, p. 50]

5. Формулы без текста: "Формуляр" Пеано

Современные разработки, обеспечивающие представление математических рассуждений и доказательств в виде компьютерных программ, идейно восходят к проекту математика и философа Готфрида Лейбница, жившего на рубеже 17-го и 18-го веков (1646-1716). Лейбниц, в свою очередь, был вдохновлен успехами символической алгебры, аналитической геометрии и математического анализа, в создании которых он сам принимал непосредственное участие. По словам Лейбница:

"Если бы нам удалось найти некоторый точный язык [...] или что-то вроде истинно философского способа письма, основанного на алфавите человеческого мышления, то все логические следствия данных нам предпосылок можно было бы получить с помощью вычислений подобно тому, как это делается при решении арифметических и геометрических задач."[14]

На рубеже 19-го и 20-го веков эти идеи стали особенно популярны в научном сообществе, и привели к целому ряду исследовательских программ и научных достижений, включая, в частности, "Понятийное письмо" Готлоба Фреге (1879) [7], "Principia Mathematica" Бертрана Рассела и Альфреда Норта Уайтхеда [20] и *программу Гильберта*. Эта программа в значительной степени определила основные направления развития математической логики в 20м веке [21]. Попытки использовать на практике идеи, начатые Лейбницем, привели в 20-м веке к взрывному развитию вычислительной техники, которое принято называть сегодня компьютерной революцией.

В настоящей статье мы коротко рассмотрим только один эпизод этой продолжающейся истории, а именно проект итальянского математика и логика Джузеппе Пеано (1858-1932) по созданию постоянно обновляемой энциклопедии математических знаний, которую он называл *Формуляром* и в которой любое математическое содержание было представлено в виде набора формул, построенных с помощью специально созданного для этой цели формального символического языка. Идея Пеано состояла не только в том, чтобы известные математические результаты были выражены в такой форме, но и в том, чтобы они могли быть формально выведены, то есть доказаны, с помощью некоторого числа аксиом и правил вывода. Однако на практике Пеано не удалось далеко продвинуться в дедуктивной части его программы, и он в основном пользовался только выразительными возможностями создаваемых им символических исчислений.

При жизни Пеано было издано пять различных редакций "Формуляра". Первое издание [15], 1895-го года, помимо небольшого предисловия и примечаний, полностью состоит из пронумерованных формул (не упорядоченных дедуктивным образом). Во втором расширенном (двухтомном) издании *Формуляра* 1897-1898 годов лингвистическая

[14] Оригинал цитаты "Si daretur vel lingu a quaedam exacta [...] vel saltem genus Scripturae vere philosophicae, qua notiones revocarentur ad Alphabet um quoddam cogitatio num humanarum, omnia quae ex datis ratione assequi licet, inveniri possent, quodam genere calculi, perinde ac resolvuntur problemata Arithmeticae aut Geometriae.", см, [11] перевод с латинского А. Родина

поддержка используемого Пеано формализма уже намного более полная и систематическая. В частности, "аксиомы Пеано" здесь сформулированы не только в виде логических формул, но и с помощью предложений на естественном языке, которые теперь непосредственно следуют за формулами [16, p.1]. В последующих изданиях *Формуляра* качество лингвистической поддержки постоянно улучшается. Последнее издание 1908-го года [17] интересно, кроме прочего, тем, что здесь лингвистическая поддержка реализована с помощью языка, который не является в полном смысле слова естественным, поскольку представляет собой специально сконструированный на основе латыни искусственный язык (*latino sine flexione*) предназначенный, по замыслу Пеано, для международного общения и сотрудничества ученых[15]. Обзор пяти изданий *Формуляра* показывает, что Пеано отказался от своей первоначальной идеи использовать для записи математического содержания исключительно формальные символические средства и стал сопровождать формулы подробными комментариями на естественном или естественно-подобном языке.

6. Рисунки без текста и текст без формул: Евклид по Бирну

В середине 19-го века оригинальную попытку избавиться от естественного языка в математическом тексте предпринял Оливер Бирн (Oliver Byrne) [1]. Главная инновация Бирна – это использование цветной печати для математических целей. Среди безусловных преимуществ использования цвета – возможность более убедительно проиллюстрировать понятие точки как границы линии и понятие линии как границы поверхности. Центр изображенного на Рис. 7 круга представлен не обычным пятном пренебрежимо малого размера, а пересечением линий, которые делят этот круг на три сектора: красный, синий и желтый. Эти линии, в свою очередь, изображены не с помощью следов мела или грифеля карандаша, которые имеют малую, но всегда конечную ширину, а границами между секторами разного цвета. Это позволяет увидеть "точку, не имеющую частей" и "линию без ширины" непосредственно, не прибегая к "предельному переходу", то есть рассказу о том, что пятно пренебрежимо малого размера может быть "в принципе" вовсе безразмерным, не исчезая при этом совсем. Чтобы убедиться в том, что центр круга на Рис. 7 не имеет частей, достаточно спросить, какого он цвета. В этой точке сходятся три разноцветных сектора, но при этом сама эта точка не имеет никакого определенного цвета; то же можно сказать о линии, разделяющей синюю и красную часть прямоугольника на нижнем рисунке.

[15] Подробнее о Пеано и его *Формуляре* можно прочитать в монографии [9]

Рис. 7. Не имеющая частей точка и линия без ширины

Впрочем, Бирн не пользуется этим способом изображения точек и линий систематически: когда дело доходит до проблем и теорем, линии приобретают цвет (на обычном белом фоне). Бирн отказывается от буквенных обозначений и вместо них пользуется оригинальными цветными пиктограммами, которые по форме и по цвету совпадают с теми элементами чертежа, на которые эти пиктограммы указывают. Использование таких пиктограмм вместо буквенных обозначений позволяет Бирну значительно сократить объем сопроводительного текста на естественном языке. Предложение 1.1 “Начал” Евклида выглядит в редакции Бирна следующим образом (Рис. 8)

Цель Бирна состояла в том, чтобы упростить обучение геометрии; он мечтал о том, что его метод позволит “с легкостью обучить геометрии и другим математическим дисциплинам миллионы” [1, p. 4]. С тем, что его метод делает геометрические построения и доказательства более наглядными и обозримыми, можно согласиться. Однако совершенно очевидно, что такое изложение евклидовой геометрии менее строго, чем изложение Евклида. Постулат 1, на который ссылается Бирн, позволяет по двум данным точкам A, C построить отрезок AC, для которого эти точки служат концами. При стандартном способе изложения эти точки указаны в явном виде. Хотя на Рис. 8 их тоже можно найти, в изложении Бирна эти точки вообще не выделены в качестве отдельных объектов, что затрудняет проверку правомочности применения Постулата 1 в

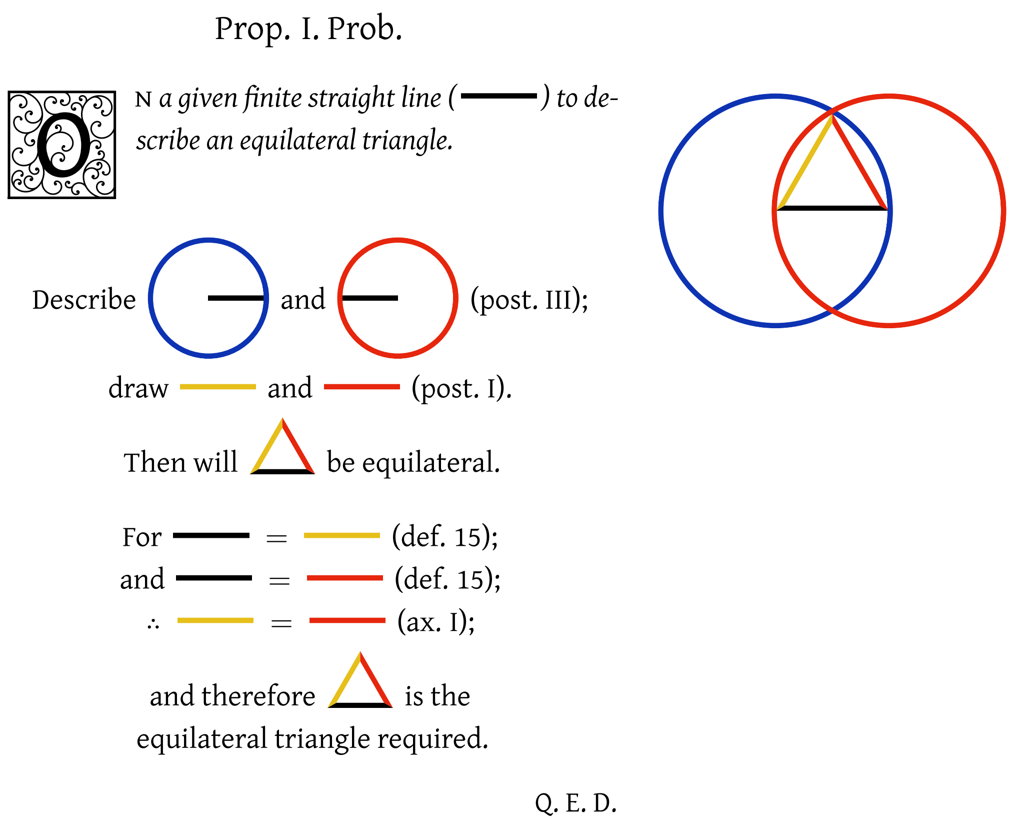


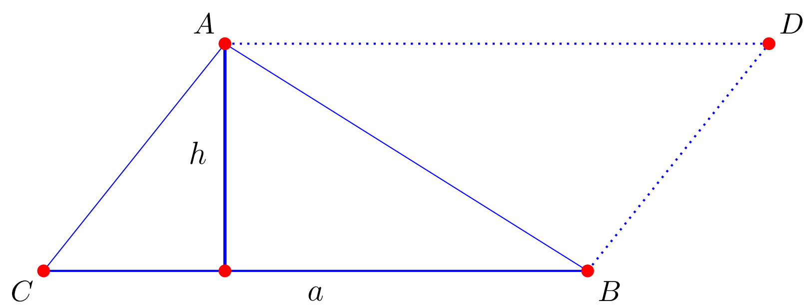
Рис. 8. Предложение 1.1 “Начал” Евклида в редакции Бирна

данном случае. Вопрос о существовании точки пересечения окружностей при изложении по методу Бирна труднее поставить, чем при стандартном изложении, поскольку у Бирна эта точка не имеет собственного имени. Таким образом, на метод Бирна можно смотреть как на интересный педагогический эксперимент и как на безусловное художественное достижение, но не как на “царскую дорогу” в геометрии, которая могла бы позволялить вникнуть во все тонкости геометрического рассуждения Евклида с меньшей затратой умственных усилий.

7. Формула Герона

Наш следующий пример, хотя и восходит к античному источнику[16], относится к современной школьной математике.

Традиционные школьные формулы для площади треугольника наглядны и допускают формулировку на естественном языке: площадь треугольника равна *полу-произведению основания на* (опущенную на него) *высоту* (Рис.9)



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah \qquad (1)$$

Рис. 9. Первый способ вычисления площади треугольника

или *полу-произведению двух сторон на синус угла между ними* (Рис.10)

Если учесть, что площадь треугольника не зависит от названий его сторон, то из формулы (2) с помощью элементарного тождественного преобразования (деление обеих частей равенства на произведение abc) можно вывести *теорему синусов*

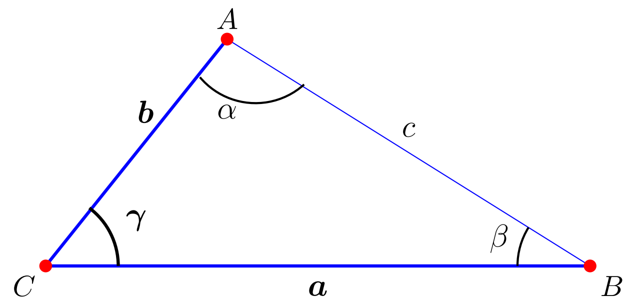
$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

откуда

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Формула Герона обладает тем преимуществом перед формулами (1) и (2), что она симметрична и инвариантна относительно переобозначений сторон:

[16] а именно к “Метрике” александрийского математика Герона жившего между 2м и 3м веком новой эры, см. [5]



$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad (2)$$

Рис. 10. Второй способ вычисления площади треугольника

$$\mathrm{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Можно ли “прочитать” эту формулу, то есть выразить ее содержание на естественном языке? На первый взгляд это сделать затруднительно. Но введение подходящих терминов решает эту проблему. Будем называть p *полупериметром*, а разности $p-a$, $p-b$, $p-c$ *избытками* каждой из соответствующих сторон. Тогда формулу Герона можно прочитать так:

Площадь треугольника равна квадратному корню из произведения полупериметра на три его избытка.

Однако такой же геометрической ясности, как в случае формул (1),(2), в случае формулы Герона добиться невозможно, поскольку четырехмерные “объемы” не подвластны нашей интуиции. Тем не менее, геометрический смысл этой формулы очевиден в ряде частных случаев. В случае равностороннего треугольника мы имеем $a = b = c$, все избытки равны a, и формула Герона дает известное значение площади: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, которое можно геометрически интерпретировать по формулам (1),(2). В случае прямоугольного треугольника мы по теореме Пифагора имеем $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Тогда в выражении

$$\frac{1}{16}(a+b+\sqrt{a^2+b^2})(-a+b+\sqrt{a^2+b^2})(a-b+\sqrt{a^2+b^2})(a+b-\sqrt{a^2+b^2})$$

можно трижды применить формулу для разность квадратов, чтобы получить $\frac{a^2b^2}{4}$ и придти к выражению для площади $\frac{ab}{2}$ соответствующему формуле (1). Хотя эти случаи и не дают полного понимания формулы Герона, они углубляют его.

Наконец, рассмотрим вопрос о доказательстве формулы Герона. Логически безупречное доказательство базируется на подстановке из теоремы косинусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

в выражение Герона, что дает:

$$\frac{a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)}{4}$$

и с использованием основного тригонометрического тождества доказывает формулу. Это доказательство корректно, но не геометрично. Более интуитивное доказательство, которое мы оставляем читателю, использует вписанную окружность. Заметим, что точки касания сторон треугольника вписанной окружности делят стороны на половины избытков [26, p.206]

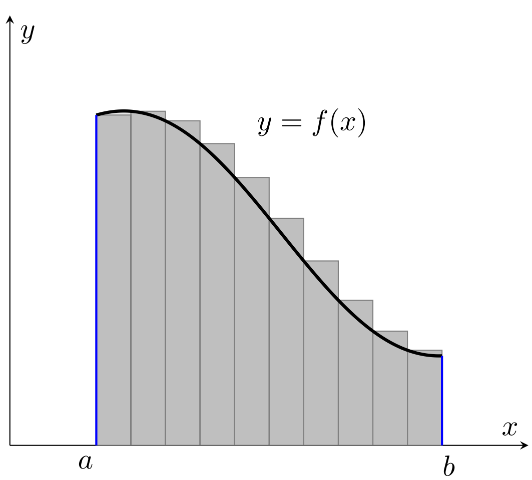
Выражение формулы Герона на естественном языке стимулирует поиск обобщений. Можно ли обобщить эту формулу на случай тетраэдра? Подходы к решению этой проблемы из [28] и [8] дают сложные выражения, геометрический смысл которых неочевиден. Таким образом, вопрос о возможности геометрически прозрачного обобщения формулы Герона остается открытым.

8. Формула Ньютона-Лейбница

Обычно формула Ньютона–Лейбница преподается в виде

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x) \text{ и штрих означает взятие производной.} \quad (8)$$

Достоинством этой формулировки является возможность сопроводить ее наглядным изображением левой части:



Это изображение позволяет "определить" рассматриваемый интеграл как площадь под графиком функции f, определенной на отрезке $[a, b]$ и принимающей всюду на этом отрезке положительные значения. При этом преподаватель может уклониться от обсуждения (действительно сложного) понятия *дифференциала* и предложить интерпретировать значок d просто как разделитель (то есть, как "знак препинания"), справа от которого стоит имя переменной величины, изменяющейся от значения a до значения b.

Связанные с математическим анализом слова и понятия проникли в разговорный язык вместе с интуитивно приемлемыми концепциями бесконечно малых величин и их сумм. Как писал Лев Николаевич Толстой в "Войне и мире",

"Только допустив бесконечно-малую единицу для наблюдения – дифференциал истории, то есть однородные влечения людей, и достигнув искусства интегрировать (брать суммы этих бесконечно-малых), мы можем надеяться на постижение законов истории. " [29, том 11, стр. 264-266]

Такая популярность идей математического анализа, с одной стороны, способствует применению этого инструмента в самых разных областях науки и техники (включая экономику и социологию, но вряд ли собственно историю), но, с другой стороны, может создавать трудности при обучении. Переход от конечных сумм к интегралам вовсе не является простым и прямолинейным. Отсутствие необходимой строгости в этом вопросе может легко привести к фундаментальным ошибкам и, если речь идет о приложениях математического анализа в технике — к технологическим катастрофам. Без использования в математическом анализе языка формул нужный уровень строгости, очевидно, не может быть достигнут [10]. Однако этот формульный язык сам по себе недостаточен для человеческой коммуникации, идет ли речь при этом о преподавании, об исследовательской работе или о технических приложениях математики. По меньшей мере, так обстоит дело в доступном для нашего знания прошлом и в настоящем. В заключительной части статьи мы приведем некоторые аргументы в пользу тезиса о том, что использование рисунков и естественного языка в математике не должно потерять свою роль и в будущем.

9. Заключение

Приведенные выше примеры указывают на удивительное постоянство, с которой в математических текстах используются формулы, рисунки (изображения) и записи на естественном языке: то, как эти три инструмента используются в Московском папирусе, написанном около 4 тысяч лет тому назад, по-видимости, мало отличаются от того, как эти средства используются в любом современном математическом учебнике или в статье, содержащей новые математические результаты. Мы специально включили в наш исторический обзор исключения из этого общего правила, а именно примеры математических текстов, в которых использование одного из трех из рассматриваемых нами инструментов либо вовсе исключено, либо сведено к минимуму (см. разделы 2, 5, 6). Но эти исключения, на наш взгляд, скорее подтверждают правило. В артефактах палеолитической и неолитической математики (то есть счетной практики) мы не находим следов письменного (естественного) языка, поскольку они относятся к дописьменной эпохе (см. раздел 2). Эти артефакты нельзя считать свидетельствами того, что естественный язык вовсе не играл никакой роли в счетных практиках эпохи неолита. Тем не менее, на наш взгляд, очень поучительно сравнить их с проектами "полностью формализованной" математики, подобному тому, который мы находим в "Формуляре" Пеано (раздел 5), а также с современными попытками представлять математические знания в виде программного кода. Пример "Формуляра" указывает на то, что развитие новых формальных средств в математике, включая современные программные средства, не заменяет использование естественного языка и не должно идти ему в ущерб. То же самое можно сказать по поводу использования в математике изображений новых типов (раздел 6).[17]

Разобранные выше примеры позволяют приблизительно описать эпистемические роли формул, рисунков и естественного языка в математике следующим образом.

9.1. **Формульный язык.** Это выразительное средство обеспечивает в математике воспроизводимую последовательность ментальных *операций*, которая может быть поддержана письмом, манипуляциями со счетным устройством вроде абака (или русских счет) — и таким образом обеспечивает стабильность математических понятий при их передаче от одного человека другому (включая долговременную передачу через поколения учителей и учеников). В этом отношении формулы[18] функционируют подобно компьютерным программам, несмотря на то, что они, строго говоря, не всегда задают точную последовательность действий. Например формула $1+2+3$, если читать ее как руководство к действию, может быть исполнена как в виде $(1+2)+3$, так и в виде $1+(2+3)$.

Эта функция формульного языка особенно ярко проявляет себя в до-теоретической вычислительной математике, основное содержание которой сводится к вычислительным инструкциям вроде инструкции для вычисления объема усеченной пирамиды в Московском папирусе (см. 3). Однако эта функция формульного письма сохраняется и в более сложных ситуациях. Формула Ньютона-Лейбница выражает утверждение о равенстве определенного интеграла разности значений первообразной интегрируемой функции на концах интервала, на котором данная функция интегрируется. Это утверждение представляет собой нетривиальную теорему, имеющую далеко идущие

[17] Включая динамические изображения и трехмерные модели, которые мы в этой статье не рассматриваем.

[18] Под формулами здесь и далее мы понимаем любые символические выражения, имеющие математическую (в широком смысле слова) интерпретацию, включая символические записи чисел, арифметических или алгебраический операций и т.д. В этом смысле широком смысле "формулами" являются выражения вроде "2", "2+1", "2+1=3", "$a+b$", "$a+b=c$" и "$\sqrt{a}$". Во многих конкретных случаях различие между символом (символической конструкцией) и рисунком не является очевидным, но мы сейчас не будем останавливаться на этой трудности.

последствия и обобщения (такие как теорема Стокса). Но если обратить внимание на символическую форму записи данного утверждения, то есть собственно на *формулу* Ньютона-Лейбница (8), то не будет натяжкой сказать, что основное назначение этой формулы — это решение задачи *вычисления* определенных интегралов. Хотя формула Ньютона-Лейбница сама по себе не представляет собой вычислительную инструкцию, она помогает создавать такие инструкции для широкого класса интегрируемых функций.

Если рассматривать записи математических рассуждений с помощью программного кода как современную версию формульного языка, то можно сказать, что в этом новом контексте вычисление (в расширительном смысле слова), или точнее говоря, описание инвариантной воспроизводимой *схемы* или алгоритма вычисления, остается главной и единственной функцией использования формульного языка в математике. Здесь возникает важный вопрос о том, идет ли речь о воспроизведении когнитивных процессов в человеческом мозге или физических процессов в комьютерных процессорах. Оставляя подробное обсуждение этой темы для другого случая, заметим только, что эта технологическая ситуация не является принципиально новой, поскольку аналогичный вопрос можно задать и по поводу воспроизведения рукописных или печатных математических текстов.

9.2. **Изображения (рисунки).** Как отмечал Иммануил Кант, "[м]атематика представляет все свои понятия *in concreto*, а именно в созерцании" [25, 433]. Другими словами, математическое рассуждение всегда имеет дело с конкретным *предметом* (например, конкретным треугольником), даже если это рассуждение применимо к *любому* предмету данного класса (например, к любому треугольнику). Несмотря на существенные изменения контекста, это замечание Канта остается в целом релевантным и современной математике. Формульный язык позволяет фиксировать и коммуницировать общие математические рассуждения *in concreto* за счет того, что одни и те же используемые символы могут иметь различные интерпретации. Например, группа из трех штрихов или трех счетных токенов может быть истолкована как группа трех людей, трех коров или как любая другая тройка предметов. Однако, в более сложных случаях фиксация "конкретного" предмета данного математического рассуждения требует изображения, подобному тому, которое мы находим в Московском папирусе 3, в старых и новых учебниках по элементарной геометрии 4, 7 или в учебниках по математическому анализу 8.

В отличие от пошагового формального построения (вычисления), изображение позволяет охватить предмет "единым взглядом", то есть целиком. В современных математических текстах речь при этом обычно идет только о самых простых частных случаях используемых математических понятий, например, о случаях малой размерности в гомологической алгебре, которые допускают визуальное представление. Тем не менее, возможность такого одномоментного "схватывания" предмета математического рассуждения, которую обеспечивают чертежи и другие математические изображения, по всей видимости, играет фундаментальную роль в математическом мышлении. Каким именно образом использование математических изображений может совмещаться с компьютерной математикой, остается на сегодняшний день открытым вопросом.

9.3. **Естественный язык.** Так называемый "естественный" язык — который, разумеется, распадается на множество используемых в настоящее время языков, включая современный русский язык — представляет собой универсальный медиум, связывающий в единое коммуникативное поле самые разные аспекты деятельности данного лингвистического сообщества. Даже самые архаические счетные практики дописьменной эпохи 2 уже находились в поле устной лингвистической коммуникации, которая связывала эти практики с теми практическими задачами, на решение которых эти практики были направлены. То же самое можно сказать о современной математике и вообще о математике любой исторической эпохи или культурного ареала: именно благодаря естественному языку математика тем или иным образом вписывается в социальную фабрику человеческих отношений, говорим ли мы при этом об образовании, о научных исследованиях, о применениях математики в экономике, в государственном управлении и любых других формах человеческой деятельности. Об этом нужно помнить и в том случае, когда мы говорим об использовании естественного языка *внутри* математики.

Вне контекста естественного языка трудно или вовсе невозможно говорить о таких важных для современной математики базовых логических понятиях как утверждение и доказательство. Хотя мечту Лейбница о том, чтобы заменить словесные аргументы вычислениями, сегодня можно считать уже реализованной по крайней мере в некоторых областях математики 5, нужно иметь в виду, что никакое вычисление, какими бы техническими средствами оно не реализовалось, само по себе ничего не утверждает и не доказывает. Можно сложить 7 и 5 в уме или воспользоваться для этого тем или иным техническим устройством. Для этого не нужно ничего утверждать и тем более доказывать. Однако результат этого вычисления можно использовать для того, чтобы сделать утверждение "$7 + 5 = 12$", а подробное описание этой процедуры может служить доказательством данного утверждения.

В более сложных случаях, включая формализованные компьютерные доказательства сложных теорем, дело обстоит аналогичным образом. Даже если базовые логические понятия, такие как понятие утверждения (суждения) и доказательства, имеют более глубокую внелингвистическую природу (как считал основатель математического интуиционизма Бертус Брауэр), то в реальной истории логическая форма математических рассуждений (в различных вариантах) фиксировалась и стабилизировалась именно за счет использования письменного естественного языка в математических текстах таких как "Начала" Евклида [24]. Тот факт, что эту логическую форму можно успешно изучать и конструировать математическими средствами, не должен скрывать от нас ее очевидные лингвистические аспекты. Поэтому, несмотря на прогресс формальных методов в математике, роль естественного языка в математическом образовании и математических исследованиях вряд ли в обозримом будущем станет менее существенной. Возможно, что роль неформальных рассуждений и интерпретаций с использованием естественного языка даже усилится ввиду того, что навыки точных символических вычислений и формальных преобразований "вручную" станут в математике будущего ненужными, поскольку такого рода задачи будут решаться с помощью компьютеров.

Список литературы

[1] Oliver Byrne. *The First Six Books of the Elements of Euclid*. London: William Pickering, 1847.

[2] M. Clagett. *Ancient Egyptian Science: A Source Book, vol.1.* Philadelphia: American Philosophical Society, 1989.

[3] M. Clagett. *Ancient Egyptian Science, vol.3.* Philadelphia: American Philosophical Society, 1999.

[4] P.T. Daniels and W. Bright. *World's Writing Systems.* Oxford Universtiy Press, 1996.

[5] Heron de Alexandrie. *Metrica: Introduction, texte critique, traduction fran?aise et notes de commentaire. Edited by Fabio Acerbi and Bernard Vitrac. (Mathematica Graeca Antiqua, 4.).* Pisa/Rome: Fabrizio Serra Editore, 2014.

[6] Francesco d'Errico et al. From number sense to number symbols. an archaeological perspective. *Philosophical Transactions of Royal Society B*, 373:20160518, 2017.

[7] G. Frege. *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle, 1879.

[8] W. Kahan. *What has the Volume of a Tetrahedron to do with Computer Programming Languages?* Preprint, Mathematics Dept., and Elect. Eng. & Computer Science Dept., University of California at Berkeley, 2001.

[9] Hubert C. Kennedy. *Peano: Life and Works of Giuseppe PEano*. Harvard University Press, 1980.

[10] G. Kreidlin and G. Shabat. Mathematical theorems in natural languages. *Advances in mathematics research*, 28:181–194, 2020.

[11] G.W. Leibniz. De arte characteristica ad perficiendas scientias ratione nitentes. *Sämtliche Schriften und Briefe*, 6:269, 1999.

[12] MathLib Community. The lean mathematical library. `https://arxiv.org/pdf/1910.09336`, 2019. Accessed: 2025-8-20.

[13] Shigeru Miyagawa. Linguistic capacity was present in the *Homo sapiens* population 135 thousand years ago. *Frontiers in Psychology*, 16, 2025.

[14] Reviel Netz. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge University Press, 1999.

[15] Giuseppe Peano. *Formulaire de mathématiques*. Turin: Bocca, 1895.

[16] Giuseppe Peano. Arithmétique. *Formulaire de mathématiques, Turin: Bocca*, 2, 1898.

[17] Giuseppe Peano. *Formulario mathematico*. Turin: Bocca, 1908.

[18] Denise Schmandt-Besserat. The envelopes that bear the first writing. *Technology and Culture*, 21(3):357–385, 1980.

[19] B.A. Struve, W.W. und Turajeff. *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*. Berlin: Springer, 1930.

[20] A.N. Whitehead and B. Russell. *Principia Mathematica, vol. 1-3.* Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.

[21] R. Zach. Hilbert program then and now. *Philosophy of Logic*, 5:411–447, 2006.

[22] Н.Я. Виленкин. О вычислении объема усеченной пирамиды в Древнем Египте. *Математические исследования*, 28:123–125, 1985.

[23] М.Я. Выгодский. *Арифметика и алгебра в древнем мире*. Москва: Наука, 1967.

[24] Евклид. *Начала Евклида, книги 1-6, перевод и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского*. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва-Ленинград, 1948.

[25] Иммануил Кант. *Критика чистого разума (перевод Н.О. Лосского)*. Москва: Мысль, 1994.

[26] А.П. Киселев. *Геометрия по Киселеву (под ред. Н.А. Ершова, А.М. Петрунина и С.Л. Табачникова)*. lulu, 2025.

[27] Летичевский А.А. Лялецкий А.В. и Мороховец М.К. Алгоритм Очевидности Глушкова. *Кибернетика и системный анализ*, 49(4):3–16, 2013.

[28] С.В. Маркелов. Формула для объема тетраедра. *Математическое просвещение*, 6:132, 2002.

[29] Л.Н. Толстой. *Полное собрание сочинений*. Москва: Гослитиздат, 1928-1958.

[30] Борис Алексеевич Фролов. *Числа в графике палеолита*. Новосибирск: Наука, 1974.