Родин А.В. Аксиоматическая архитектура научных теорий. Москва. DirectMedia, 2025, 232 с.

Книга А.В. Родина касается широкого круга вопросов обоснования математики и логики: геометрия Евклида, геометрия Гильберта, формальная аксиоматика Гильберта и Бернайса, ограничительные результаты К.Геделя, обоснование математики в контексте «Элементы математики» Н.Бурбаки», секвенциональное исчисление Генцена, теоретико-категорные основания математики, аксиоматические теории в физике и вообще в естествознании.

Автор использует в названии книги неопределённый термин «архитектура», заменив им привычное слово «структура». Само слово «аксиоматическая теория» расплывается и эта расплывчатость - один из существенных результатов рецензируемой книги: в современной математике под название «аксиоматическая теория» подпадают весьма разные как в логическом, так и методологическом отношении концептуальные структуры.

В конце книги даётся широкое и аморфное определение того, что такое аксиоматическая теория. «Мы будем называть теорией фрагмент теоретического знания, представленный в виде системы теоретических объектов и правил (человеческих) манипуляций с этими объектами. Аксиоматической теорией мы называем теорию, которая задаётся с помощью небольшого числа элементарных объектов и элементарных правил, позволяющих порождать новые объекты из данных объектов, а также строить новые правила на основе данных правил. Будем называть эту порождающую процедуру выводом, не предполагая, что она имеет чисто синтаксический характер, но не приписывая ей в этом общем описании какой-то определённой, в частности логической семантики. В специальных семантических контекстах такие выводы называются дедукциями, продукциями, построениями и другими именами. Мы используем здесь термин объект в самом нейтральном и общем смысле этого слова и относим его не только к таким вещам, как точки, пространства, физические частицы и живые организмы, но и к символам, формулам, высказываниям и суждениям. Предполагается, что объекты данной теории являются стабильными (в том смысле, что они не изменяются и не исчезают, когда с их помощью порождаются новые объекты), а правила являются схематическими (в том смысле, что они могут применяться многократно к различным наборам объектов)» [с.188-189].

Можно ли считать это определение, демонстративно отказывающееся от чётких «технических» формулировок, доводом в пользу скептицизма, фаллибилизма, релятивизма и подобных философских течений, заявивших о себе во второй половине XX века (доводом в пользу Поппера, Лакатоса, Хэнсона, Куна, Фейерабенда и других философов науки, приобретших в двадцать первом веке статус классиков)? Можно ли рассматривать это определение как призыв к социальной эпистемологии, анализирующей (и ставящей во главу угла) не научное знание, а научные школы, дисциплины, исследовательские области, коллективы, сообщества, власть, финансирование, упорство, податливость, политику, нравы, национальные традиции и т.д. ? Можно. Однако содержание рецензируемой книги значительно богаче оппозиции «фундаментализм - скептицизм (и фаллибилизм, релятивизм)». В книге речь идёт об истории и методологии поиска оснований знания, о популярных и непопулярных трактовках самого понятия «обоснование», о новейших тенденциях в развитии математики, тенденциях либо ставящих во главу проблему аксиоматического построения теории, либо отодвигающих её на периферию научного исследования.

Книга начинается главой «От Евклида до Гильберта», развенчивающей некоторые популярные прочтения «Начал» Евклида. Впрочем, у автора здесь есть известные предшественники - В.А.Успенский, Я.Хинтикка, М.Фридман и др. (на Хинтикку и Фридмана автор ссылается). «Вопреки распространённому мнению, - пишет автор, - геометрия Евклида - это не набор высказываний, состоящий из аксиом и теорем, которые выводятся из аксиом по правилам вывода. Скорее эту теорию можно назвать «формой рационального рассуждения, в которой важную роль играют непропозициональные принципы» [с.12].

Гильбертовский этап изложен в основном традиционно. Теоремы К.Геделя (одного из участников Венского кружка, между прочим, т.е. с традиционной советской и постсоветской точек зрения неопозитивиста) «убедили большинство исследователей в том, что программа Гильберта в её первоначальной форме провалилась» [с.53]. Автор, правда, здесь справедливо отмечает, что «идея теории доказательства, как математической теории логических символических исчислений в стиле Гильберта выжила и получила дальнейшее развитие благодаря использованию более сложных математических методов» [с.54].

Дальше рассматриваются «Элементы математики» Н.Бурбаки (автор здесь вполне традиционен). В книге цитируются гимн аксиоматике в «Архитектуре математики» Бурбаки. «То что аксиоматика ставит перед собой в качестве основной цели уразумение существа математики, именно этого не может дать логический формализм, взятый сам по себе» [с.73].

Заслуживает внимания спор математического структурализма и теоретико-множественного субстанционализма, который фиксирует автор в связи с тем разбором статуса аксиоматического метода в «Элементах» Бурбаки, который он проводит. «Понятие «самодостаточной структуры», - указано в рецензируемой книге, - не нуждающейся в подлежащем множестве, не имеет в «Элементах» Бурбаки никакого строгого определения. Однако Бурбаки используют это понятие в практическом смысле, систематическим образом пренебрегая деталями их собственной теории множеств и связанного с этой теорией логического аппарата и игнорируя тот факт, что этот аппарат представляет собой официальное логическое основание всей их математики" [с.79-80].

В книге впервые в нашей философской и историко-научной литературе разбираются теоретико-категорные основания математики. Автор приводит слова крупнейшего отечественного математика Ю.Манина, который пишет, что «на следующем этапе исторического процесса [начало которому положил в конце XIX века Г.Кантор в своих работах по теории множеств - вставка автора] множества уступили свое место категориям» [с.103].

Объясняя этот концептуальный сдвиг автор возвращается к представлениям школы Бурбаки. «Стандартный аксиоматический подход к теории множеств, начало которому положил Э.Цермело в 1908 г., использует в качестве нелогического примитива понятие принадлежности (*x* является элементом *y*), а не понятие отображения в какой-то форме. Это имеет отношение и для стандартного аксиоматического подхода к математическим теориям вообще, в которых используется теория множеств, как это делается в семантической версии аксиоматического метода у Бурбаки. Разумеется, отображения математических структур, например групповые гомоморфизмы, могут быть представлены с помощью таких средств. Однако теоретико-множественные детали таких представлений многие математики воспринимают как совершенно нерелевантные по отношению к теоретическому предмету исследования... В этом контексте успех теории категорий как альтернативного языка, который позволяет описывать математические структуры в терминах их отображений и таким образом избавится от ненужных теоретико-множественных подробностей, казался многим математикам (включая некоторых членов группы Бурбаки, таких как А.Картан, С.Эйленберг, А.Гротендик) способным осуществить мечту Бурбаки об исчезновении множеств» [с.103-104].

А как ещё объяснить теоретико-категорный сдвиг в основаниях математики, случившийся во второй половине XX века? Никакой наглядной метаметаматематики (два раза «мета») у нас нету. Историко-научный поход, принятый автором, представляется здесь вполне уместным. Имена А.Картана, С.Эйленберга и А.Гротендика многое говорят не только профессиональным математикам, но и вообще образованной читающей публике.

В качестве примера теоретико-категорной аксиоматической системы в рецензируемой книге присутствует конструкция У.Ловера (Lawvere F.W.). Один из выводов здесь имеет общеметодолгическое значение: «Теоретико-категорные структуры, свойства которых инвариантны не только относительно изоморфизмов, но и относительно категорных эквивалентностей, определённо лежат за пределами математики в стиле Бурбаки... Теория категорий не могла быть интегрирована в состав «Элементов» Бурбаки в полном объёме» [с.111].

Приходится заметить, что обсуждение теории категорий составляет один из наиболее абстрактных и трудных для чтения разделов рецензируемой книги.

Возвращаясь к традиционной общеметодологической проблематике автор посвящает несколько страниц естественному выводу и исчислению секвенций Генцена. Он верно отмечает, что Генцен предложил альтернативный подход (альтернативный традиционному, т.е. подходу Гильберта) , «который предполагает использование более сложных правил вывода, но не предполагает логических тавтологий в качестве аксиом» [с.131]. При этом Генцен отметил, что правила введения логических символов представляют своего рода определения этих символов.

Объясняя нововведения Генцена автор возвращается к своему экскурсу в историю аксиоматического метода, возвращается к «Началам» Евклида. «Первые принципы Евклида - это правила, а не предложения, и, кроме теорем, которые являются предложениями, эта теория содержит проблемы, которые предложениями не являются... Теория Евклида - это теория генценовского, а не гильбертовского типов» [с.132].

И далее: “многочисленные современные примеры валидных нелогических выводов можно найти в компьютерной науке и в цифровых информационных технологиях. Компьютерные системы, имплементирующие нелогические правила вывода, называют экспертными системами, такие системы используются для автоматизации рассуждений в конкретных предметных областях, например, в области городских коммуникаций» [с.133].

В целом рецензируемая книга - не только компендиум современных проблем обоснования математики и вообще знания, претендующего на ясность и отчётливость, но и призыв к новой дискуссии о сути научного метода.

А.Печенкин

доктор философских наук, профессор

МГУ им. М.В.Ломоносова. Философский факультет. Профессор.

Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН