ДЕЛАТЬ И ПОКАЗЫВАТЬ

АНДРЕЙ РОДИН

[1]

1. Аксиоматический метод

В современной математике и философии математики общепринятым является так называемый *аксиоматический метод* построения математических теорий. В самых общих чертах этот метод построения теорий можно описать следующим образом. За основу теории берется некоторый набор утверждений, которым приписывается статус *аксиом*. Далее предполагается существование определенных *правил вывода*, которые позволяют выводить из аксиом новые утверждения; утверждения, выведенные из аксиом называют *теоремами*. Предполагается, что вывод теорем из аксиом сохраняет истинность в следующем смысле: если аксиомы теории являются истинными утверждениями, то выведенные из этих аксиом теоремы тоже истинны. Также предполагается, что пользуясь теми же правилами вывода можно выводить новые теоремы не только непосредственно из аксиом, но и из ранее выведенных теорем.

Правила вывода определяются логикой и поэтому называются правилами *логического* вывода. Считается, что такие правила не являются специфичными для той или иной математической теории, но могут (или должны) быть использованы для построения широких классов аксиоматических теорий (логический плюрализм) или вообще любой аксиоматической теории (логический монизм). Различие между логическим плюрализмом и логическим монизмом не играет существенной роли в данном контексте.

Вывод данной теоремы из аксиом данной теории (непосредственно или посредством промежуточных теорем) называют *доказательством* этой теоремы. Таким образом аксиоматическая теория представляет собой набор аксиом и теорем, выведенных из этих аксиом (непосредственно или опосредованно) согласно определенным правилам вывода. Аксиоматические теории, которые отличаются только выведенными теоремами, обычно отождествляют. Говоря другими словами, доказательство новой теоремы на основе аксиом и ранее доказанных теорем некоторой существующей теории не считается созданием новой теории.

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 13-03-00384

Такое общее описание понятия аксиоматической теории является заведомо недостаточным и оставляет большой простор для дальнейших уточнений и интерпретаций, многие из которых являются взаимоисключающими. Дискуссии по поводу дальнейших уточнений понятий аксиоматического метода и аксиоматической теории играли значительную роль в философии математики 20-го века и продолжают играть такую роль сегодня. Примером такого рода дискуссии является продолжающийся дискуссия о статусе аксиом в математике. Согласно традиционной точки зрения, которой придерживался Фреге, аксиомы представляют собой само-очевидные истины, которые не требуют доказательства, но могут и должны быть использованы для доказательства менее очевидных утверждений (теорем). С точки зрения Гильберта (к которой я вернусь в шестом разделе этой статьи, когда буду говорить о формальных теориях) математические аксиомы представляют собой своего рода *схемы* утверждений, которые становятся ложными или истинными утверждениями в зависимости от их *интерпретации*, то есть от того, какие значения приписываются примитивным терминам, входящим в состав аксиом. (При этом предположение, согласно которому вывод теорем из аксиом сохраняет истинность, остается в силе.) Очевидно, что подход Фреге и подход Гильберта ведут к разным понятиям аксиоматической теории [2]. Однако для целей данной работы мне важно указать не на различие, а на сходство этих двух подходов, которые при всех своих различиях исходят из одного и того же (неполного) понятия аксиоматической теории, которое я описал выше. То же самое я хочу заметить по поводу продолжающейся дискуссии о том, какие правила вывода (теорем из аксиом) приемлемы в математике, а какие нет. В частности большинство защитников *конструктивной точки зрения* на математику в 20м веке и большинство их оппонентов защищающих правомерность так называемого *классического* подхода объединяет то обстоятельство, что и те, и другие пользуются вышеописанным неполным понятием аксиоматической теории и предполагают, что математические теории являются (или по крайней мере должны быть) аксиоматическими теориями в соответствующем широком смысле.

Целью данной работы является критическое обсуждение этой фундаментальной предпосылки. На примере "Начал" Евклида я покажу, что не всякая систематически построенная математическая теория является аксиоматической в указанном выше смысле. Далее я покажу, что несмотря на то, что понятие аксиоматической теории является сегодня общепризнанным в математике, оно неадекватно описывает современные математические теории. Наконец я приведу некоторые критические аргументы оспаривающие идею о том, что аксиоматический метод (в описанном выше смысле) является хорошим методом построения математических теорий и намечу альтернативу.

2. Доказательство и "показательство" у Евклида

Все математические предложения "Начал" Евклида [1], [15] (с очень незначительными и легко объяснимыми исключениями) устроены по одной и той же схеме, описанной Проклом в его "Комментарии" [9]. В качестве примера я приведу Предложение 5

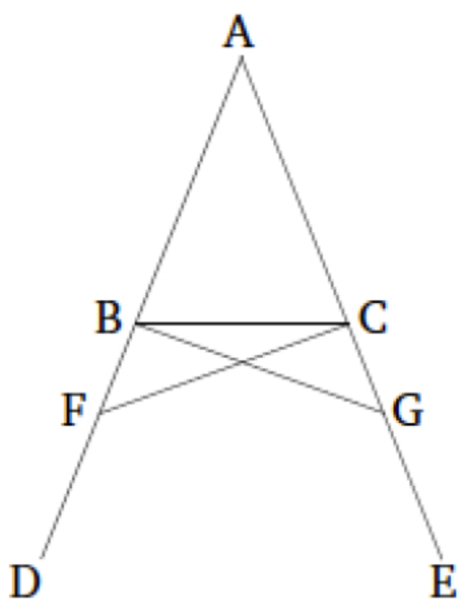
Первой Книги “Начал” (Теорема 1.5) - известную теорему о равенстве углов в равнобедренном треугольнике. Текст Евклида цитируется в переводе Модухая-Болтовского [15]. Приведенные в круглых скобках внутренние ссылки добавлены переводчиком, я скажу ниже об этих ссылках особо. Слова в угловых скобках отсутствуют в оригинальном тексте и добавлены переводчиком в целях лучшего соответствия перевода нормам русского языка. Цитаты из “Начал” Евклида, которые я привожу ниже в этой статье, заимствованы из того же источника.

<*предложение:*>.

> У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.

<*выставление* (*экспозиция*):>.

> Пусть ABC будет равнобедренный треугольник имеющий сторону равную стороне и пусть по прямым будут продолжены прямые BD, CE.



<*ограничение*:>.

> Я утверждаю, что угол ABC равен углу ACB, а угол CBD углу BCE.

<*построение*:>.

> Действительно, на BD возьмем произвольную точку F, от большей AE отнимем AG, равную меньшей AF (1.3), и соединим прямыми FC , GB.

<*доказательство*:>.

> Поскольку теперь AF равна AG, а AB равна AC, то вот две <прямые> FA, AC равны двум AG, AB каждая каждой; и они содержат общий угол FAG; значит, основание FC равно основанию GB, и треугольник AFC будет равен треугольнику AGB и оставльные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому, а именно, угол ACF углу ABG, а угол AFC углу AGB (1.4). И поскольку вся AF равна всей AG, и у них AB равна AC, то, значит, и остаток BF равен остатку CG (A3). Но доказано, что и FC равна GB; вот две прямые BF, FC равны двум прямым CG и GB каждая каждой; и угол BFC равен углу CGB, и основание у них общее BC. Значит и треугольник BFC равен треугольнику CGB и остальные углы стягиваемые равными сторонам равны каждый каждому (1.4); значит, угол BFC равен углу GCB, а угол BCF углу CBG. Поскольку теперь доказано что весь угол ABG равен всему углу ACF, и у них CBG равен BCF, то следовательно, и остаток ABC равен остатку ACB (A3), и они находятся при основании треугольника ABC. Доказано же, что и угол FBC равен GCB, и оба она под основанием.

<*заключение*:>.

> Значит, у равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой. Это и требовалось доказать.

Как мы видим, проклов анализ евклидовой теоремы о равнобедренном треугольнике отличается от современного. Для современного читателя доказательство теоремы о равнобедренном треугольнике начинается с прокловой *экспозиции* (*выставления*), включает в себя прокловы *ограничение*, *построение* и *доказательство* и заканчивается прокловым *заключением*. Можно подумать, что мы имеем здесь дело с чисто терминологическим различием связанным с трудностями перевода. Однако корень проблемы лежит не в терминологии. Как мы сейчас увидим, проклово *доказательство* подпадает под то связанное с аксиоматическим методом современное понятие доказательства, о котором мы говорили выше (доказательство как логический вывод данного утверждения из аксиом теории и ранее доказанных утверждений.) Однако связь *выставления*, *ограничения* и *построения* с этим современным понятием доказательства является куда менее очевидной. Чтобы различать современное понятие доказательства от проклова понятия *доказательства*, я буду в последнем случае всегда пользоваться курсивом. Такую же конвенцию я буду использовать и по отношению ко всем другим частям евклидовых теорем, которые выделяет Прокл.

В *доказательстве* цитированной выше теоремы 1.5 Евклид использует ряд предпосылок, имеющих форму $X = Y$, и посредством ряда промежуточных выводов приходит к заключительному утверждению "угол ABC равен углу ACB", которое имеет ту же форму. (Я оставляю в стороне вторую часть заключения этой теоремы, которое касается равенства углов под основанием.) Хотя в дошедших до нас рукописях "Начал" Евклида отсутствуют ссылки на аксиомы и ранее доказанные теоремы, такие ссылки обычно легко восстановить. В данном *доказательстве* Евклид использует ранее доказанную теорему 1.4 о равенстве треугольников по двум сторонам и углу между ними, а также две аксиомы: [2]

A2:

Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

A3:

Если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

(В данном контексте слова "прибавляются" и "отнимаются" нужно понимать в геометрическом, а не арифметическом смысле.)

Однако в *доказательстве* теоремы 1.5 Евклид также пользуется предпосылками другого рода. В частности, предпосылка $AB = AC$ не является ни аксиомой, ни доказанной ранее теоремой. Откуда берутся такие дополнительные предпосылки? Означает ли наличие таких дополнительных предпосылок в евклидовых геометрических доказательствах, что геометрия Евклида не является аксиоматической теорией в современном смысле?

Такой вывод был бы слишком поспешным. На данный вопрос в современной логике существует хорошо известный ответ. Хотя в данном выше описании аксиоматического метода речь не шла ни о каких дополнительных предпосылках (помимо аксиом и выведенных из этих аксиом теорем), этот метод допускает использование таких предпосылок. Дело в том, что евклидова теорема 1.5 как и любая другая математическая теорема содержит некоторое *условие.* Условие теоремы 1.5 состоит в том, что мы имеем в ней дело именно с равнобедренным треугольником, а не с чем-либо еще. С логической точки зрения евклидово доказательство теоремы 1.5 представляет собой не прямой вывод теоремы 1.5 из аксиом и ранее доказанных теорем, а *гипотетический* вывод утверждения о равенстве углов из аксиом теории, ранее доказанных теорем этой теории и условия данной теоремы. Тот факт, что это доказательство доказывает не только утверждение о равенстве некоторых углов, но и саму теорему - причем доказывает эту теорему на основе аксиом и ранее доказанных теорем без использования дополнительных условий - следует из известных логических принципов, которые я не буду формулировать здесь в явном виде.

[2]Полный список аксиом Евклид приводит в начале Первой Книги "Начал". Этот список содержит пять аксиом. Номера аксиом, которые я здесь цитирую, соответствуют нумерации аксиом в этом списке.

Это замечание оправдывает возможность использования дополнительных предпосылок в математических доказательствах. Однако оно не объясняет происхождение и роль всех тех дополнительных предпосылок, которыми Евклид пользуется в *доказательстве* теоремы 1.5. Следующие два вопроса касающиеся дополнительных продпосылок остаются пока открытыми:

Вопрос 1:

Говоря школьным языком, $AB = AC$ "по условию". Как мы только что показали, использование условия теоремы в качестве предпосылки доказательства этой теоремы является оправданным. Однако ни в *предложении*, ни в *заключении* теоремы 1.5 отрезки AB и AC не упоминаются: там идет речь только о равнобедренных треугольниках и их углах. Будем считать, что всякое упоминание треугольника влечет за собой (по определению) упоминание его сторон, которые является отрезками. Тем не менее *именно* об отрезках AB и AC в *предложении* теоремы речь все равно не идет. В каком смысле упоминание в *предложении* теоремы равных отрезков (сторон данного треугольника) можно рассматривать в качестве обоснования предпосылки $AB = AC$? Что именно означает, что $AB = AC$ "по условию"?

Заметим также, что евклидово *доказательство* завершается выводом о том, что угол ABC равен углу ACB. Однако утверждение теоремы состоит в другом, а именно в том, что углы при основании любого равнобедренного треугольника равны друг другу. Именно поэтому завершение *доказательства* у Евклида еще не завершает всю теорему: за *доказательством* следует *заключение*. Каким именно образом *доказательство* теоремы 1.5 приводит к ее *заключению*? В чем состоит заключительный шаг рассуждения, который позволяет считать, что утверждение о равенстве углов ABC и ACB доказывает утверждение теоремы, в котором углы ABC и ACB не упоминаются вовсе?

Вопрос 2:

Не все дополнительные предпосылки, которыми Евклид пользуется в *доказательстве* теоремы 1.5, принимаются "по условию". Некоторые из этих предпосылок (например, предпосылка $AF = AG$) принимаются "по построению". Каким образом можно оправдать использование в доказательстве предпосылок "по построению" с точки зрения аксиоматического метода? Какую роль в теореме 1.5 играет *построение* (которое в современной школьной геометрии принято называть "дополнительным" построением)? Каким образом *построение* связано с *доказательством*?

Прежде чем я попытаюсь ответить на эти вопросы, я позволю себе подвести предварительный итог. Как мы видели, современное понятие доказательства, связанное с современным аксиоматическим методом построения математических теорий, хорошо соответствует понятию *доказательства* в смысле Прокла. Однако этот аксиоматический метод не дает ясного ответа на вопрос о том, каким образом *доказательство* в узком прокловом смысле доказывает (в современном смысле слова) геометрические теоремы вроде теоремы 1.5. В частности, остается неясным вопрос о роли *выставления*, *ограничения* и *построения*, хотя совершенно очевидно, что эти части теоремы играют важную роль в рассуждении Евклида. Поскольку современный аксиоматический метод предполагает, что всякая математическая теория состоит из утверждений и доказательств утверждений (не считая вспомогательных элементов вроде определений) прокловы *выставление*, *ограничение* и *построение* естественно считать элементами доказательства. Однако, как мы скоро увидим, такого рода интерпретация оказывается проблематичной с логической точки зрения и явно ошибочной с исторической точки зрения.

В этой связи стоит заметить, что стандартная формула "что и требовалось доказать", которой Евклид завершает каждую теорему "Начал", и которой мы продолжаем пользоваться в математике сегодня, переведена на русский язык Мордухаем-Болтовским неточно. Более точный перевод этой риторической формулы - *что и требовалось показать*. Математическая теорема как целое *показывает* некоторый математический факт. *Доказательство* играет при этом важную роль, но для "показательства" теоремы в целом одного *доказательства* недостаточно. Употребление глаголов deiknumi (показывать) и apodeiknumi (доказывать) Евклидом и Проклом вполне согласуется с тем, как эти глаголы употребляет Аристотель [11]. Поэтому можно с уверенностью утверждать, что для Евклида и Прокла эти глаголы не являются синонимами. Стандартный английский перевод "Начал" Евклида [3] в отличие от стандартного русского перевода "Начал", которым мы здесь пользуемся, отражает этот важный нюанс.

3. Понятия, объекты и объективное содержание математических теорий

Чтобы ответить на поставленные вопросы о дополнительных предпосылках доказательства теоремы 1.5 необходимо предварительно прояснить роль других элементов этой теоремы. Роль *выставления* состоит в том, что условие теоремы, которое в *предложении* этой теоремы формулируется в общем виде (и затем в том же общем виде повторяется в *заключении*), преобразуется в конкретный математический объект удовлетворяющий данному условию. *Выставление* теоремы 1.5 преобразует общее условие о том, что в данной теореме рассматривается равнобедренный треугольник в конкретный треугольник ABC, где $AB = AC$. Таким образом, мы частично ответили на Вопрос 1: хотя предпосылка $AB = AC$ и не упоминается в явном виде ни в *предложении* , ни в *заключении* теоремы, она допускается на основе условия теоремы посредством *выставления.* Аналогичным образом *ограничение* позволяет перейти от *доказательства* к *заключению* теоремы. Действительно, *ограничение* теоремы 1.5 "конкретизирует" общее утверждение о равенстве углов (равнобедренного треугольника), которое делается в *предложении* (и потом повторяется в *заключении*), преобразуя это общее утверждение в утверждение о равенстве конкретных углов ABC и ACB. *Доказательство* (в узком прокловом смысле!) завершается выводом именно этого конкретного утверждения. Далее при переходе от *доказательства* к *заключению* теоремы выполняется обратная процедура обобщения, преобразующая конкретное утверждение о равенстве углов ABC и ACB в общее утверждение о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, которое и завершает теорему.

Однако у нас пока нет никакого определенного ответа на вопрос о том, в чем именно состоит загадочное "преобразование" общих условий в конкретные объекты и обратно. Оправданы ли такого рода преобразования с логической точки зрения? Попытка дать подробный ответ на этот последний вопрос завела бы нас сейчас слишком далеко. Поэтому я ограничусь только тем, что укажу на некоторые известные ответы и покажу их связь с современным аксиоматическим методом. Вслед за Кантом [16] я выделю здесь два аспекта проблемы. Один аспект проблемы, который Кант рассматривает в своей *трансцендентальной эстетике*, касается вопроса о том, каким образом конституция математических объектов связана с чувственным восприятием и чувственной интуицией. Другой аспект проблемы, который Кант рассматривает в своей *трансцендентальной логике*, касается вопроса о том, каким образом в математическом рассуждений понятия (вроде общего понятия равнобедренного треугольника) связаны с соответствующими объектами (вроде конкретного равнобедренного треугольника ABC).

Оставляя эстетический аспект проблемы в стороне, я рассмотрю сейчас только логический аспект. С чисто логической точки зрения *выставление* можно рассматривать как *инстанциацию* данного понятия неким абстрактным индивидом подпадающим под это понятие. При этом, разумеется, требуется, чтобы соответствующая система логики включала в себя подходящее понятие индивида и соответствующие правила инстанциации. Современные системы логики вроде классической первопорядковой логики (логики предикатов) удовлетворяют этим требованиям. Хотя интерепретация *выставления* с помощью современного логического понятия инстанциации и не позволяет ответить на все те вопросы, которые Кант ставит в своей трансцендентальной логике, такая интерпретация позволяет рассматривать *выставление* как чисто логическую оперецию и в этом смысле считать *выставление* элементом доказательства (в современном смысле слова). *Ограничение* может быть интерпретировано подобным образом.

Наибольшую трудность представляет собой логическая интерпретация геометрического *построения*. Дело в том, что *построение* не просто экземплифицирует понятия содержащиеся в условии данной теоремы, но вводит в расмотрение новые объекты (и соответствующие понятия), которые на первый взгляд не имеют прямого отношения к формулировке (то есть *предложению*) этой теоремы. Это делается по определенным правилам, логический смысл которых не очевиден. Обычный подход состоит в том, что принципы, на которые опирается процедура *построения* (и о которых я буду говорить в следующем разделе) интерпретируют в виде аксиом, которые гарантируют *существование* некоторых объектов при условии существования некоторых других объектов или вовсе без всяких условий. На основе подходящих аксиом такого рода и с помощью некоторых промежуточных выводов можно, например, из утверждения о существовании отрезков AB и AC вывести утверждение о существовании отрезков AF и AG (таких, что $AF = AG$). Это позволяет рассматривать *построение* как элемент доказательства наряду с *выставлением* и *ограничением*.

По словам Хинтикки и Ремеса [7], p. 270:

> Использование дополнительных построений не требует выхода за пределы аксиоматического подхода в геометрии. Дополнительные построения это ничто иное как античный аналог применения современных правил инстанциации.

Если верить Хинтикке и Ремесу, современное логическое понятие инстанциации позволяет ответить не только на наш Вопрос 1, но и на Вопрос 2. Впрочем техническая реализация подобного рода логической реконструкции традиционной геометрии оказывается весьма непростой (и поэтому особенно интересной) задачей. Различные авторы предлагают различные варианты такой реконструкции, используя различные логические средства и обращая внимание на различные аспекты традиционной геометрии (см, например, [6], [8]). При этом все известные мне реконструкции такого рода опираются на одно и то же современное понятие аксиоматического метода. Именно на эту общую предпосылку я сейчас хочу обратить внимание.

Как мне представляется, большинство авторов современных логических реконструкций традиционной геометрии исходят из неявной эпистемологической предпосылки, согласно которой реконструкция старых математических теорий (и в частности геометрии "Начал" Евклида) в виде аксиоматических теории в современном смысле слова дает ключ к пониманию объективного содержания этих теорий. Под объективным содержанием я имею здесь в виду то содержание, которое представляет ценность для сегоднешней науки. Я говорю сейчас не об исторической науке, а о логике и математике. Очевидно, что античные математики не имели в своем распоряжении тех новых логических средств, с помощью которых современные авторы реконструируют их математические теории и их способы рассуждений. Однако цель современной логической реконструкции старой математической теории состоит не в том, чтобы понять, каким образом и на основе каких предпосылок эта старая теория была построена ее авторами, а скорее в том, чтобы понять содержание старой теории с точки зрения сегоднешней математики и логики. По крайней мере это относится к тем логическим реконструкциям, на которые я ссылаюсь выше. Тот факт, что такой подход является заведомо анахронистическим вовсе не означает неправомерности этого подхода.

Тем не менее, данный подход мне представляется неудовлетворительным по следующей причине: он предполагает известным, что именно следует считать объективным содержанием математической теории, и в чем именно состоит "сегоднешняя точка зрения" в логике и математике. В данном случае я имею в виду предпосылку, согласно которой канонической формой представления математической теории является аксиоматическая форма (аксиоматическая теория в современном смысле слова). Из этой предпосылки следует, что чтобы выявить объективное содержание математической теории ее прежде всего необходимо представить в аксиоматической форме. Именно этой цели служат логические реконструкции традиционной геометрии, о которых здесь идет речь.

Однако на самом деле вопрос об объективном содержании научных теорий вообще, и об объективном содержании математических теорий в частности, является открытым. Я вообще не думаю, что такого рода общие вопросы можно надеяться решить раз и навсегда. Я считаю, что такие вопросы нужно ставить и решать постоянно, принимая во внимание новые контексты, новые научные (в том числе математические) результаты и новые проблемы. Современное понятие аксиоматической теории, о котором мы здесь говорим, на самом деле не такое уж современное. В основных чертах это понятие сложилось около века назад: в качестве принципиальных вех начального этапа этого развития можно указать на выход в 1899 году первого издания "Оснований геометрии" Гильберта [4] (см. русский перевод [14]) и выход в 1918 году статьи "Аксиоматическое мышление" [5] этого же автора. Сегодня, как мне представляется, эти основы аксиоматического подхода нуждаются в критической переоценке и в критическом пересмотре [10]. Мой интерес к Евклиду связан именно с этим. Идея о том, что все те аспекты математики Евклида, которые не укладываются в прокрустово ложе современного аксиоматического метода не имеют объективного математического значения и могут представлять только чисто исторический интерес, на мой взгляд не оправдана. Она создает иллюзию того, что в математике Евклида мы имеем дело только с несовершенной формой того же самого метода. На самом деле, как мы сейчас увидим, в "Началах" Евклида мы имеем с математической теорией, построенной на основании иных принципов.

В следующем разделе этой статьи я представлю анализ структуры математических рассуждений Евклида, который мне представляется более исторически более точным. Как я только что объяснил, такого рода анализ может иметь значение не только для истории предмета, но и для современной математики и философии математики. Сопоставление тех принципов построения теории, которые мы находим у Евклида, с современной идеей аксиоматического метода поможет нам понять аксиоматический метод в исторической перспективе и выдвинуть некоторые предложения, касающиеся будущего этого метода.

4. Геометрическая дедукция

Итак, вернемся к теореме 1.5 "Начал" Евклида и попробуем разобраться в ее структуре не пользуясь современным понятием аксиоматической теории. Про роль *выставления* и *ограничения* мы уже сказали достаточно. Рассмотрим теперь вопрос о *построении*. В "Началах" Евклида построения регулируются специальными принципами, которые Евклид называет *постулатами* (не путать с аксиомами!); построения осуществляемые на основе этих принципов на школьном жаргоне принято называть "построениями циркулем и линейкой". Соответствующие постулаты (первые три постулата из списка, состоящего из пяти постулатов), приведенного в начале Первой Книги "Начал" непосредственно перед аксиомами) в переводе Мордухая-Болтовского выглядят так:

> Допустим:
> P1: что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.
> P2: И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой.
> P3: И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.

Слова <можно> и <может быть> добавлены переводчиком. Вот более буквальный перевод:

> P1: допускается проводить прямую линию от всякой точки до всякой точки
> P2: и непрерывно продолжать по прямой ограниченную прямую
> P3: и описывать круг из всякого центра всяким раствором

Принципиальное различие между двумя версиями перевода (одна из которых является более точной, а вторая является по сути парафразой) состоит в следующем. Фраза "От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию" является *утверждением*, то есть лингвистическим выражением, которому может быть приписано определенное истинностное значение - "истинно" или "ложно". Однако выражение "проводить прямую линию от всякой точки до всякой точки" является только описанием действия (процедуры) и вовсе не является утверждением! Выражение "*допускается* проводить прямую линию от всякой точки до всякой точки" можно рассматривать как утверждение, однако нас сейчас интересует вопрос о том, *что* именно здесь допускает Евклид, то есть вопрос о *предмете* данного допущения, а не вопрос о том, допускает здесь что-то Евклид или нет (разумеется, что допускает). Чтобы прояснить этот важный момент я приведу еще две парафразы Первого постулата:

> (A) Евклид допускает, что от всякой точки до всякой точки можно проводить прямую линию.

> (B) Евклид разрешает проводить прямую линию от всякой точки до всякой точки.

Хотя фразы (A) и (B) кажутся синонимичными, они имеют различную логическую структуру. Чтобы в этом убедиться, оставим Евклида за скобками и сосредоточимся на том, что именно он допускает или разрешает. В случае (A) мы получаем следующее утверждение:

> (A') от всякой точки до всякой точки можно проводить прямую линию

В случае (B) мы получаем выражение, которое является описанием процедуры, а не утверждением:

> (B') проводить прямую линию от всякой точки до всякой точки

Поскольку (A') является утверждением, оно может быть использовано в качестве предпосылки доказательства. [3]

(B') отличие от (A') не может быть использовано в качестве предпосылки доказательства. При этом в оргинальной версии Первого постулата мы имеем дело именно с (B'), а не с (A'). В случае Второго и Третьего постулатов дело обстоит аналогичным образом. Таким образом, вопрос состоит в том, как обяснить роль евклидовых Постулатов, не перефразируя их в виде модальных или экзистенциальных утверждений. (Я сейчас оставляю в стороне вопрос об интерпретации Четвертого и Пятого постулатов и говоря об евклидовых постулатах имею в виду только первые три постулата.)

Ответ, как мне представляется, состоит в следующем. С помощью своих постулатов Евклид вводит некоторые *элементарные процедуры*, а не элементарные недоказываемые утверждения. В этом отношении евклидовы постулаты можно сравнить с правилами логического вывода, которые также являются описаниями процедур, а не утверждениями. Однако в отличие от правил вывода евклидовы постулаты описывают *геометрические*, а не логические процедуры. Хотя наличие такого рода нелогических процедур не предусмотрено современным понятием аксиоматической теории, как я сейчас покажу, они играют важную роль в математике Евклида. В последующих разделах этой статьи я постараюсь показать, что такого рода процедуры продолжают играть существенную роль и в современной математике.

Как я уже сказал, первые три постулата "Начал" определяют допустимые геометрические построения. Однако приведенный выше пример предложения 1.5 не дает полного представления о роли построений в геометрической теории Евклида. Дело в том, что это предложение является *теоремой*, то есть доказанным утверждением. В этом контексте построение естественно считать вспомогательным средством, которое позволяет провести требуемое доказательство (независимо о того, считаем ли мы построение частью доказательства или нет). Поэтому в школьной геометрии такие построения принято называть "дополнительными". Однако далеко не все предложения "Начал" являются теоремами. Многие из них являются *проблемами*. В качестве примера геометрической проблемы я приведу хорошо известное предложение 1.1.

<*предложение:*>.

---

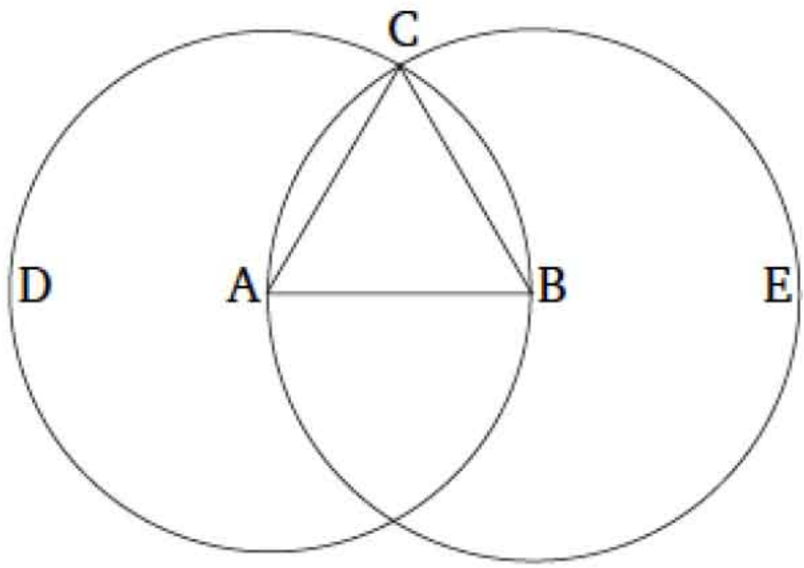
[3]Поскольку в (A') речь идет о *возможности* некоторого действия, всякое доказательство, использующее (A') в качестве предпосылки, должно опираться на принципы *модальной* логики. Поэтому для целей логической реконструкции обычно используют другую парафразу Первого постулата, которая позволяет использовать обычную логику предикатов:

> (C') для любой пары точек существует прямая линия, соединиющая эти точки

На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник.

<*выставление* (*экспозиция*):>.

Пусть данная ограниченная прямая будет AB.



<*ограничение*:>.

Требуется вот на прямой AB построить равносторонний треугольник.

<*построение*:>.

Из центра A раствором AB опишем круг BCD, и далее из центра B раствором BA опишем круг ACE, и из точки C, в которой круги пересекают друг друга, проведем к точкам A и B соединяющие прямые CA, CB.

<*доказательство*:>.

И поскольку точка A есть центр круга CDB, то AC равна AB, далее поскольку точка B - центр круга CAE, то BC равна BA. Но уже было показано, что и CA равна AB; значит каждая из CA, CB равна AB; но равные одному и тому же равны и между собой; значит и CA равна CB. Значит три прямые CA, AB, BC равны между собой.

<*заключение*:>.

> Значит треугольник ABC равносторонний и построен на данной ограниченной прямой AB, что и требовалось сделать.

В отличие от теорем, которые завершаются формулой "что и требовалось показать", проблемы у Евклида завершаются словами "что и требовалось сделать". Таким образом, целью проблемы является некоторое действие, а не "показательство". Попробуем разобраться в том, что представляют собой евклидовы проблемы, и как они связаны с теоремами. Это поможет нам прояснить роль *построений* в геометрии Евклида.

Современный школьный аналог евклидовых проблем это так называемые "задачи на построение". Однако эта аналогия не является точной. Евклидовы проблемы являются "задачами на построение" не в большей степени, чем евклидовы теоремы являются "задачами на доказательство". Здесь снова уместно сделать замечание по поводу русского перевода греческого текста "Начал". Хотя фраза "На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник" переводит греческий оригинал буквально, особенности русского языка придают ее другой смысл. Дело в том, что в русском языке неопределенная форма глагола может иметь императивное значение, как это имеет место в приказах (Стоять! и т.п.). В греческом языке (как и во многих современных языках, например в английском) такая функция неопределенной формы глагола отсутствует. Поэтому интерпретация *предложения* проблемы 1.1 как просьбы, требования или приказа произвести требуемое построение является ошибочной. Как и в случае постулатов (которые также выражаются глаголами в неопределенной форме) в проблемах речь идет о процедурах вне всяких модальных контекстов. Модальность долженствования в *предложении* проблемы так же неуместна, как и в *предложении* теоремы. (То же самое относится и к модальности возможности.) В обоих случаях модальность долженствования вступает в игру на более поздней стадии рассуждения: так же как всякая теорема *требует* доказательства, всякая проблема требует "решения", то есть *выполнения* соответствующего построения. Однако ни *предложение* теоремы (то есть формулировка утверждения теоремы), ни *предложение* проблемы не содержат этих требований в явном виде. Различие между двумя случаями состоит не в модальностях, а в том, что *предложения* теорем являются утверждениями, а *предложения* проблем являются описаниями процедур. В этом смысле различие между теоремами и проблемами полностью аналогично различию между аксиомами и постулатами, о котором мы подробно говорили выше.

Однако если в постулатах речь идет о базовых процедурах, которые просто допускаются ("использование циркуля и линейки"), в проблемах речь идет о более сложных процедурах, которые выполняются с помощью этих базовых процедур и ранее решенных (то есть ранее выполненных) проблем. Поэтому аналогия между аксиомами и теоремами, с одной стороны, и постулатами и проблемами, с другой строны, может быть продолжена следующим образом. Аксиомы и теоремы (точнее, *предложения* теорем) это утверждения, которые в первом случае принимаются в качестве исходных предпосылок, а во втором случае требуют доказательства. Постулаты и проблемы (точнее, *предложения* проблем) это процедуры, которые в первом случае допускаются в качестве исходных, а во втором случае требуют решения (выполнения). Аналогично тому как доказательство теорем основывается на аксиомах, выполнение проблем основывается на постулатах. Аналогично тому как новые теоремы доказываются с помощью ранее доказанных теорем, новые проблемы выполняются с помощью ранее выполненных проблем.

Казалось бы, подобное устройство теории разбивает ее на две самостоятельные части, одна из которых состоит из аксиом и теорем, а другая из постулатов и проблем. Однако этого на самом деле не происходит. Как мы видели на примерах теоремы 1.5 и проблемы 1.1, проблемы и теоремы имеют одинаковую структуру. Теоремы включают в себя *построения*, которые в этом контексте принято называть “дополнительными”. Поэтому теоремы так же как и проблемы зависят от постулатов, а не только от аксиом теории. Проблемы в свою очередь включают в себя *доказательства* и поэтому зависят не только от постулатов, но и от аксиом. О роли *построений* в теоремах мы уже говорили. Но зачем нужны *доказательства* в проблемах? Как видно из примера проблемы 1.1 ответ состоит в следующем: *построение* требует *доказательства* того факта, что построенный объект подпадает под понятие, указанное в *предложении* данной проблемы. Иными словами, *доказательство* проблемы доказывает, что соответствующее *построение* делает именно то, что “требуется сделать”. Как и в случае доказательства теоремы речь здесь идет об эпистемологическом требовании, а не просто о требовании, которое учитель предъявляет ученику. Чтобы построить равносторонний треугольник, недостаточно просто описать некоторую последовательность действий. Нужно еще доказать, что результом этих действий оказывается именно равносторонний треугольник. Таким образом, если в теоремах *доказательства* играют главную роль, а *построения* играют вспомогательную роль, то в проблемах роли доказательства и построений меняются местами. Впрочем, различие между главными и вспомогательными процедурами, на мой взгляд, не является существенным в данном контексте. Ведь совершенно очевидно, что и *построения* и *доказательства* играют важную роль как в теоремах (не считая самых простых теорем, которые не требуют дополнительных построений), так и в проблемах (во всех без исключения). “Дополнительные” *построения* в теоремах, как и *построения* в проблемах, вообще говоря, зависят от ранее решенных проблем. *Доказательства* теорем, как и “дополнительные” *доказательства* в проблемах, вообще говоря, зависят от ранее доказанных теорем. Таким образом проблемы и теоремы в геометрической теории евклидовых “Начал” оказываются плотно связанными в единую теорию. [4]

Эта теория имеет дедуктивную структуру, то есть она построена на основании первых принципов (двоякого рода). Однако в отличие от дедуктивной структуры современной аксиоматической теории дедуктивная структура геометрии Евклида не является

[4] В качестве примера того, как доказательства теорем могут зависить от решения проблем, можно указать на цитированную выше теорему 1.5 “Начал”. В *построении* этой теоремы Евклид пользуется (как ранее полученным результатом) проблемой 1.3 для построения пары равных отрезков. Я вернусь к этому примеру ниже в основном тексте.

чисто логической. Другими словами, современное понятие дедукции как логического вывода одних утверждений из других утверждений не позволяет адекватно описать архитектуру геометрии Евклида. Логическая дедукция в чистом виде работает у Евклида только в *доказательствах* - в узком прокловом смысле этого термина. В *построениях* имеет место дедукция иного рода, которая состоит в том, что на основе известных процедур построения осуществляются другие аналогичние процедуры. Этот последний род дедукции я предлагаю называть *геометрической* дедукцией (хотя, как мы увидим в дальнейшем, она имеет отношение не только к геометрии). В чистом виде геометрическая дедукция работает у Евклида только в *построениях* (снова в узком прокловом смысле термина). Однако почти все теоремы и все без исключения проблемы содержат оба рода дедукции - логическую и геометрическую. Поэтому, чтобы говорить о геометрии Евклида как о дедуктивной теории, необходимо принять во внимание как логический, так и геометрический аспект дедукции. Как эти два типа дедукции связаны между собой?

Я попытаюсь дать ответит на этот вопрос с помощью только что рассмотренных примеров. Как мы видели, результатом евклидового *построения* является не только сам геометрический объект (что бы ни понимать под "самим объектом" в этом контексте), но и некоторые утверждения об этом объекте. Например, в *построении* цитированной выше теоремы 1.5 Евклид строит равные отрезки AF и AG и затем использует утверждение $AF = AG$ в качестве предпосылки следующего за этим *построением доказательства.* Данный элемент *построения* выполняется с помощью ранее выполненной проблемы 1.3, которая позволяет откладывать на данной прямой от данной точки отрезок равный данному отрезку (точку F Евклид выбирает на BD произвольно и после этого считает отрезок AF данным). Означает ли это, что предпосылка $AF = AG$ выводится из проблемы 1.3 (точнее, из *предложения* этой проблемы) с помощью особого рода геометрической дедукции? Попробуем разобраться в этом вопросе.

Чтобы не вникать более в содержательные детали геометрии Евклида, а сконцентрироваться на вопросе о геометрической и логической дедукции, я не буду подробно анализировать проблему 1.3, а использую следующую искусственную проблему (если следовать евклидовому стандарту, то ее нельзя считать корректно сформулированной, но в данном контексте это не имеет значения):

(Q): построить отрезок равный данному отрезку

Вопрос состоит в том, каким образом *предложение* (Q), которое является описанием процедуры, а не утверждением, может помочь обосновать утверждение:

(S): $a = b$

где a и b это некоторые отрезки, на которые для упрощения дела я не накладываю никаких дополнительных условий.

Решение проблемы (Q) состоит из нескольких этапов. *Выставление* и *ограничение* приводят (Q) к следующему виду:

(P): построить отрезок a равный данному отрезку b

Очевидно, что (P) в некотором смысле содержит в себе утверждение (S). Однако поскольку (P) как и (Q) не является утверждением, (S) не может быть логическим следствием (P). (Во всяком случае если говоря о следствии, иметь здесь ввиду обычное понятие логического вывода.) Если проблема (Q) уже выполнена и используется в качестве элемента другого построения, то на связь между (P) и (S) можно указать словами " $a = b$ по построению". Однако для нашего анализа полезно использовать другую терминологию, которая применима к более общему случаю. За неимением лучшего термина я буду говорить в этом случае, что (S) *ассоциировано* с (P)..

Следующий этап выполнения проблемы это *построение* (R), которое так же как *предложение* (Q) и *ограничение* (P) представляет собой описание процедуры построения равных отрезков. Однако если (Q) и (P) просто указывают нам на то, о какой именно процедуре идет речь, (R) представляет собой описание построения равных отрезков, которое соответствует правилам геометрической дедукции, и которое таким образом сводит проблему построения равных отрезков к последовательности ряда базовых процедур и ранее выполненных проблем. Я не буду сейчас пытаться описать это построение более подробно и скажу только, что оно должно включать в себя построение отрезка a.

Наконец, необходимо представить *доказательство* (T) утверждения (S), имея при этом в виду, что отрезок b задан посредством *выставления* в (P), а отрезок a построен посредством *построения* (R). Доказательство (T) должно, разумеется, выполняться по правилам логической дедукции. Оно может опираться на аксиомы, ранее доказанные теоремы, а также на утверждения, ассоциированные с постулатами и с ранее выполненными проблемами, то есть на предпосылки, допускаемые "по построению". Пример проблемы 1.1 хорошо показывает как это все работает на практике.

Таким образом, мы видим, что (S), как и любое другое доказанное утверждение геометрии Евклида, в конечном счете выводится из других утверждений исключительно с помощью логической дедукции. Это, конечно, относится и к предпосылке $AF = AG$, которую Евклид использует в *доказательстве* теоремы 1.5. Говорить о том, что эта предпосылка выводится с помощью геометрической дедукции, неверно. Но в чем тогда состоит роль геометрической дедукции? Если в геометрии Евклида всякое утверждение логически выводится из соответствующих предпосылок, чем тогда теория Евклида отличается от современной аксиоматической теории?

Все дело в том, что в геометрии Евклида геометрическая дедукция обуславливает логическую дедукцию. Другими словами, в этой теории логическая дедукция не работает без геометрической за исключением самых простых случаев. Говоря более точно, геометрия Евклида предполагает следующий фундаментальный принцип, который не имеет аналога в современном понятии аксиоматической теории: ассоциированные утверждения допускаются в качестве предпосылок доказательства только при том условии, что те процедуры, с которыми эти утверждения ассоциированны, заранее выполнены в соответствии с правилами геометрической дедукции. Проще говоря, предпосылка "по построению" может быть использована в доказательстве только в том случае, если соответствующее построение выполнено. А выполнение построений подчиняется правилам геометрической, а не логической дедукции. [5]

Часто говорят, что чтобы в геометрии Евклида нечто утверждать о геометрическом объекте, этот объект надо заранее построить. Однако это неверно, поскольку условия евклидовых теорем не подпадают под действия правила использования предпосылок "по построению". В частности, теореме 1.5, в которой речь идет о равнобедренном треугольнике, не предшествет, как этого можно было бы ожидать, проблема построения треугольников такого рода. Это указывает на неадекватность идеи о том, что евклидовы постулаты по сути являются утверждениями о существовании геометрических объьктов, которые якобы нужны Евклиду для того, чтобы сначала доказывать утверждения о существовании геометрических объектов, а уже затем интересоваться свойствами этих объектов [21].

Сказанное выше относится к постулатам точно так же как и к проблемами. Хотя постулаты и не требуют решения в том же смысле, что и проблемы, можно говорить о выполнении постулатов в более слабом смысле. Рассмотрим для примера Первый постулат "Начал", который гарантирует построение отрезка по данным концам. Чтобы ассоциировать с этим постулатом какие-то утверждения, необходимо взять две произвольные точки A, B и, пользуясь данным постулатом, соединить эти точки отрезком AB. Эту процедуру я называю выполнением постулата. Только после такой процедуры можно утверждать, например, что точка A является концом отрезка AB, и использовать это утверждение в дальнейших доказательствах, имея при этом ввиду, что данная предпосылка допускается "по построению".

Тот факт, что в геометрии Евклида геометрическая дедукция обуславливает логическую дедукцию, не означает, что геометрическая дедукция в рамках этой теории может осуществляться независимо от логической дедукции. Ведь как мы видели даже самые элементарные проблемы вроде проблемы 1.1 требуют *доказательства* и, следовательно, требуют логической дедукции. Таким образом в геометрии Евклида логическая дедукция не работает без геометрической, а геометрическая дедукция не работает без логической. При этом различие между этими двумя родами дедукции у Евклида всегда остается четким (как и различие между проблемами и теоремами), поскольку геометрическая дедукция относится только к процедурам, а логическая дедукция - только к утверждениям.

[5]Поскольку и постулаты, и проблемы (точнее, *предложения* проблем) являются описаниями процедур, я для краткости говорю, что утверждения, ассоциированные с постулатами и проблемами, ассоциированы и с соответствующими процедурами.

Совсем другой вопрос состоит в том, является ли геометрическая дедукция (или какая-то аналогичная процедура) необходимой для построения математических теорий. Несмотря на то, что современное понятие аксиоматической теории предполагает положительный ответ на этот вопрос, я постараюсь показать, что на самом деле на этот вопрос следует скорее ответить отрицательно.

5. Евклид и современная математика

Сказанное в предыдущем разделе может заставить читателя подумать, что в "Началах" Евклида мы имеем дело с архаическим способом математического мышления, который не имеет никакого отношения к современной математике. Однако это не так. На самом деле евклидова структура проблем и теорем по крайней мере в общих чертах сохраняется и в теоремах современной математики. Это можно видеть на следующем взятом наугад примере [20], стр. 100):

Теорема 3:

> Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

Доказательство:

> Пусть F замкнутое подмножество компактного пространства T и $\{F_\alpha\}$ - произвольная центрированная система замкнутых подмножеств подпространства $F \subset T$. Тогда каждое F_α замкнуто и в T, то есть $\{F_\alpha\}$ - центрированная система замкнутых множеств в T. Следовательно $\cap F_\alpha \neq \emptyset$. В силу Теоремы 1 отсюда следует компактность F.

Хотя эта теорема представлена в обычной для современной математики бинарной форме утверждение-доказательство, которая предполагается аксиоматическим подходом, ее евклидова структура восстанавливается без труда и без необходимости прибегать к парафразам и интерпретациям:

<*предложение:*>.

> Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

<*выставление* (*экспозиция*):>.

> Пусть F замкнутое подмножество компактного пространства T

<*ограничение*: отсутствует>.

<*построение*:>.

> и <пусть> $\{F_\alpha\}$ - произвольная центрированная система замкнутых подмножеств подпространства $F \subset T$.

<*доказательство*:>.

> Тогда каждое F_α замкнуто и в T, то есть $\{F_\alpha\}$ - центрированная система замкнутых множеств в T. Следовательно $\cap F_\alpha \neq \emptyset$. В силу Теоремы 1 отсюда следует компактность F.

<*заключение*: отсутствует>.

Отсутствующее *ограничение* может быть сформулировано так:

> Я говорю, что F - компактное пространство

тогда как *заключение* должно представлять собой буквальный повтор *предложения* теоремы. Ясно, что эти элементы в данном контексте не имеют важного значения и могут быть опущены из соображений экономии. Чтобы разграничить в данном случае *построение* и *доказательство* более точно, следовало бы сначала "построить" множество $\cap F_\alpha$ в *построении*, а затем уже утверждать что это множество непусто в *доказательстве*. Однако это нарушение евклидовой структуры также не представляется мне существенным. Я предлагаю читателю убедиться на других современных примерах в том, что евклидова схема рассуждений продолжает работать в современной математике. Означает ли это, что наш вывод о том, что теория "Начал" Евклида не является в обычном смысле аксиоматической, следует распространить и на современные математические теории?

В этой связи следует заметить, что понятие аксиоматической теории, описанное в начале этой статьи, используется в современной математической практике двояким образом.

Во-первых, оно действительно используется в качестве *метода* построения теорий. Однако в большинстве случаев она используется в этом качестве, как принято говорить, неформально. Это означает, что полный список аксиом и правила вывода теорем из аксиом не записываются в явном виде. Как правило такие теории строятся не "с нуля", а используют некоторые другие теории (например, арифметику), которые предполагаются известными. В этом случае понятие аксиоматической теории играет роль методологической идеи, которая помогает наметить общую структуру теории, но которая не имеет прямого отношения к деталям (в том числе - к деталям доказательств). О попытках воплотить идею аксиоматической теории в точном смысле я скажу чуть ниже.

Во-вторых, описанное выше понятие аксиоматической теории широко используется для математического анализа структуры математических теорий и математических доказательств (а также для математического анализа нематематических теорий). Именно такого рода анализ является основной задачей той области исследований, которую принято называть исследованиями в области *оснований математики*. Эта область исследований также включает в себя вопросы, которые традиционно принято считать философскими. В качестве примеров применения математики к вопросам оснований математики можно указать на современную теорию доказательств, начало которой было положено фундаментальной работой Гильберта и Бернайса [13]. При том, что эта теория имеет важное философское значение, она представляет собой математическую теорию. Чтобы различить математические теории как объекты математического исследования и математические теории, в которых представлены результаты такого исследования, Гильберт предложил называть эти последние теории *метаматематическими*. Метаматематика в смысле Гильберта представляет собой особую область "обычной" математики или, как любят говорить специалисты в области оснований математики, - "неформальной" математики. Необычным является только *предмет* этой специальной области математики - строго формализованные аксиоматические математические теории. О смысле понятия формализации и о связи между формализацией и аксиоматическим методом я скажу более подробно в следующем разделе этой статьи. Пока я буду предполагать, что читатель хотя бы в общих чертах представляет, о чем идет речь.

Попытки построить аксиоматические теории "в чистом виде" предпринимались и продолжают предприниматься именно в рамках исследований по основаниям математики. Каноническим примером такой теории является аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) [12]. Теория Колмогорова и Фомина, развитая в их учебнике [20] , из которого я взял цитированную выше теорему о компактных пространствах, конечно, не является такого рода теорией. Однако обычно предполагается, что данная теория как и любая другая "неформальная" математическая теория может быть в принципе представлена в виде строгой аксиоматической теории посредством формализации. Тот факт, что теоремы современной "неформальной" математики и теоремы "Начал" Евклида имеюют сходную структуру, которая отличается от структуры строго аксиоматической теории, можно тогда объяснить исторической инерцией и не придавать этому факту особого значения.

Действительно, чтобы показать значимость евклидовой структуры теории для современной математики недостаточно простого указания на присутствие этой структуры в современных теориях. Нужно еще показать, что в современных теориях роль евклидовой структуры по-прежнему является существенной. Чтобы это сделать, я буду в дальнейшем говорить только о полностью формализованных строго аксиоматических теориях и попытаюсь показать, что даже такие теории не могут работать без евклидовой структуры (или по крайней мере без ключевых элементов евклидовой структуры). Это будет означать, что те средства, которые с точки зрения сторонников аксиоматизации позволяют представить любую полноценную математическую теорию в виде строго аксиоматизированной теории и таким образом заменить традиционную евклидову структуру теории на структуру аксиоматической теории в современном смысле слова, на самом деле являются негодными.

6. Формализация

В то время как понятие формализации не является строгим математическим понятием, можно с математической точностью определить то, что является результатом формализации, а именно понятие *формальной математической теории.* Нижеследующее определение формальной теории не является самым точным и самым общим из всех возможных и даже, строго говоря, не является математическим. Во-первых, я ограничиваюсь специальным случаем *дедуктивной* теории, который имеет отношение к аксиоматическому методу. Во-вторых, уровень строгости этого определения определяется моими целями, и поскольку эти цели являются в данном случае скорее философскими чем математическими, я не пользуюсь в этом определении математическими средствами. Строгие матеметические определения формальной теории можно найти в стандартных учебниках математической логики, например в [17], [19]. (Не стоит удивляться тому, что точные определения этого понятия разнятся от учебника к учебнику - такое разнообразие является неизбежной платой за математическую точность!)

Итак, (дедуктивная) формальная теория включает в себя следующие базовые элементы:

- (a) формальный *язык*, включающий в себя *алфавит* символов и правила построения *формул* из символов этого алфавита;
- (b) список *аксиом* теории, который представляет собой выделенное множество правильно построенных формул теории (формальные теории могут также включать *схемы* аксиом, но я сейчас не буду на этом специально останавливаться);
- (c) *правила вывода* формул из других формул; как я уже говорил в начале этой статьи, обычно предполагается, что правила вывода не являются специфичными для теории, но могут быть также использованы в других теориях.

Обычно также предполагается, что формальная теория может быть *интерпретирована*, причем, вообще говоря, многими различными способами. При интерпретации формулы теории получают определенные истинностные значения. Интерпретации, при которых аксиомы теории оказываются истинными называют *моделями* этой теории. Дальнейшие подробности можно опять-таки найти в любых стандартных учебниках по математической логике и теории моделей.

Каноническим примером формальной теории является уже упомянутая аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля с выбором ZFC. Я напомню здесь только самые общие принципы этой теории, чтобы показать каким образом элементы (a - c) могут выглядеть в конкретном примере. Языком ZFC является классическая логика предикатов с равенством, расширенная единственным дополнительным символом (нелогической константой) для обозначения отношения принадлежности одного множества другому. Правила вывода используемые в ZFC являются составной частью базовой логики предикатов, которая не является специфической для данной теории.

Для интерпретации ZFC обычно используется классическая теоретико-множественная семантика Тарского. Это создает своего рода круг в рассуждении (при построении моделей аксиоматической теорий множеств приходится пользоваться понятием множества), который, однако, с формальной точки зрения не является порочным. ZFC включает в себя восемь аксиом и две схемы аксиом.

Правила вывода (c) позволяют выводить (дедуцировать) новые формулы из аксиом (b) и ранее выведенных формул. Это позволяет на формальном уровне реализовать идею аксиоматического построения теории, которую мы неформально описали в начале этой работы. Пример теории ZFC показывает, как это делается на практике. Однако я хочу обратить внимание читателя на тот факт, что ZFC, как и любая другая формальная аксиоматическая теория, пользуется синтаксическими правилами (a), которые касаются построения формул. Правила (a), как и правила вывода (c), разумеется, не являются утверждениями (в логическом смысле слова). Это видно из того, что ни в каком контексте вопрос о том, истинны эти правила или ложны, не является осмысленным. Заметим, что наличие правил (c) предусмотрено, а наличие правил (a) не предусмотрено неформальным понятием аксиоматической теории описанным в первом разделе этой статьи. [6]

Обычно правила построения формул рассматривают в качестве чисто технического момента не имеющего никакого эпистемилогического значения и не считают, что такие правила входят в состав *первых принципов* теории. Однако на мой взгляд правила построения формул следует по аналогии с евклидовыми *постулатами* рассматривать в качестве первых принципов - наряду с аксиомами и правилами вывода. Заметим, что традиционное понятие о первых принципах является, разумеется, неформальным. Понятие формальной теории само по себе не дает никаких оснований считать правила построения формул менее важными, чем правила вывода. Подобное замечание можно сделать и по поводу правил интерпретации, но для упрощения моей аргументации я не буду здесь касаться этой темы.

Можно возразить, что аналогия между синтаксическими правилами построения формул в формальных аксиоматических теориях и евклидовыми постулатами является неуместной, поскольку евклидовы постулаты имеют отношение к конструированию *объектов* теории (геометрических фигур), тогда как синтаксические правила касаются только выразительных средств теории (формул), но не имеют прямого отношения к ее объектам (то есть к множествам в случае ZFC). Чтобы ответить на это важное возражение и одновременно усилить мой тезис, я должен предварительно сделать по поводу формальных математических теорий несколько общих замечаний и ответить

[6] При этом вопросы о том, являются ли эти правила удачными, уместными в данном контексте, подходящими для данного случая, и т. д., могут быть осмысленными. Напомню, что вопрос об истинности аксиом и теорем формальной теории является осмысленным только тогда, когда указана определенная интерпретация этой теории.

на вопрос о том, в чем состоит процедура формализации. Усиление тезиса будет состоять в том, что аналогия между правилами вывода (с) и евклидовыми постулатами в контексте формальной теории является также уместной.

Как мне представляется, главным условием впечатляющего прогресса логики в 20м веке и главной особенностью развития логики в этот исторический период является применение к логике математических методов. Это позволило, в частности, описывать логический вывод с помощью символических конструкций. Термин "формальная логика" имеет долгую историю, на которой я не буду здесь останавливаться. Важно только иметь в виду, что смысл этого термина многократно менялся, хотя и не вполне произвольным образом. То, что мы называем формальной логикой сегодня и то, как мы отличаем сегодня формальную логику от неформальной, заметно отличается, например от того, что называл формальной логикой Кант, отличая формальную логику от трансцендентальной логики. Сегодня мы называем формальной логикой *символическую* логику, которая пользуется математическими методами. В начале 20го века такую логику было принято называть *логистикой*. Я не думаю, что есть смысл отличать символическую логику от *математической* логики - по-моему различие здесь может состоять только в сложности используемых математических методов и, возможно, также в области применения логики (математическая логика используется в первую очередь внутри математики). Таким образом *формализация* логики в современном смысле это ни что иное, как *математизация* логики, которая, в частности, предполагает представление утверждений и выводов в виде символических конструкций и процедудур над символами, которые могут исследоваться математическими методами.

Хотя по своему характеру символические конструкции, используемые в математической логике, и отличаются от традиционных геометрических построений (в этом смысле символическая логика связана с алгеброй более тесно, чем с геометрией), это отличие не имеет в данном контексте решающего значения. Для меня сейчас важно подчеркнуть тот факт, что математическая логика, как и любая другая область математики, предполагает не только некоторые базовые утверждения, но и некоторые базовые *процедуры*, с помощью которых конструируются *объекты* теории. Я говорю сейчас об объектах формальной логики как математической теории, то есть о формулах, цепочках формул и других символических конструкциях.

С понятием о формализации *математических теорий* дело обстоит похожим образом - несмотря на то, что выражение "формальная математическая теория" имеет отдельную и гораздо более короткую историю. В начале 20го века этот термин использовался для обозначения идеи математической теории, развитой Гильбертом в "Основаниях Геометрии" [4], а именно идеи о том, что данная (формальная) теория может иметь различные интерпретации. Хотя такой подход и является в настоящее время общепринятым, мне представляется, что современное значение термина "формальная" (в выражении "формальная математическая теория") более не связывается именно с этой идеей специальным образом. Формальная математическая теория в современном смысле слова эта такая теория, логическая структура которой эксплицирована детально. Причем, как и в случае формальной логики, речь здесь идет именно о *математической* экспликации, то есть о представлении структуры теории (и структуры каждого элемента этой теории) в виде математического объекта, который можно исследовать и описывать математическими средствами. Вслед за Гильбертом такого рода математическое исследование я буду называть *метаматематическим*, а получаемые в результате такого исследования теории я буду называть *метатеориями*. Однако использование этой специальной терминологии не должно затушевывать тот факт, что метаматематика является частью “обычной” (то есть неформальной) математики, а любая метатеория является “обычной” математической теорей.

Пример ZFC хорошо показывает, как такой подход реализуется на практике. Как мы видели, эта формальная теория строится на основе (формальной) классической логики предикатов с помощью незначительного расширения языка этой логики и добавления списка аксиом. При этом объектами математического исследования оказываются не множества сами по себе, а сама формализованная теория множеств или фрагменты этой теории, то есть формулы и последовательности формул (а также соответствующие модели, которые я оставляю в стороне). В этом контексте не только синтаксические правила (a), но и правила вывода (c) описывают фундаментальные процедуры, с помощью которых из данных математических объектов (символов данного алфавита и уже построенных из этих символов формул) строятся новые объекты такого же рода (новые формулы). Постольку, поскольку формулы ZFC оказываются объектами математического рассмотрения, используемые в ZFC правила вывода оказываются правилами конструирования новых объектов из некоторых данных объектов. В этом смысле аналогия между правилами вывода (c) и евклидовыми постулатами так же уместна, как и аналогия между евклидовыми постулатами и правилами (a) построения формул теории из символов алфавита этой теории.

Можно возразить, что такая аналогия может быть уместна только по отношению к метатеории, но не по отношению к самой теории множеств ZFC. Я согласен с тем, что предложенная аналогия работает только в том случае, если метатеория принимается во внимание. Однако я также считаю, что о “самой” теории ZFC вообще не имеет смысла говорить вне контекста соответствующей метатеории. Действительно, важным уроком исследований в области аксиоматизации теорий является тот общепризнанный сегодня факт, что об объектах данной математической теории бессмысленно говорить вне контекста этой теории. Евклидовы треугольники не существуют вне евклидовой геометрии. Однако, как мне представляется, одно важное следствие этого урока часто остается незамеченным. Постольку, поскольку формальные математические теории являются объектами математического исследования, они так же становятся объектами математических теорий (метатеорий), которые, вообще говоря, не являются формальными. Постольку, поскольку формальные теории являются объектами “обычных” неформальных теорий, они не могут жить вне своих метатеорий точно так же, как и евклидовы треугольники не могут жить вне евклидовой геометрии! Поэтому формальные математические теории вовсе не являются самостоятельными математическими теориями, то есть не являются математическими теориями в полном смысле слова.

Как легко убедиться, именно так дело обстоит на практике. Все без исключения нетривиальные результаты касающиеся теории ZFC (например доказанное Коэном с помощью метода форсинга утверждение о независимости гипотезы континуума от аксиом этой теории [18]) получены методами "обычной", то есть неформальной математики, которая, как мы видели на примере теоремы о компактных пространствах, продолжает пользоваться евклидовой схемой рассуждения.

На мой взгляд формальные математические теории можно охарактеризовать как *математические модели* математических теорий (я сейчас использую термин "модель" в общенаучном, а не специальном логическом смысле). Тогда уместно задать вопрос о том, являются ли такие модели адекватными. Впрочем, необходимо уточнить о какого рода адекватности здесь может идти речь. Как мы уже сказали, речь здесь не может идти только об адекватном описании существующей математической практики. Ведь такая практика всегда можеть быть - и более того, всегда должна быть - поставлена под вопрос. Поэтому всегда можно сказать, что существующая математическая практика является несовершенной, и настаивать на том, что формальные математические теории имеют эпистемологические приемущества перед обычными теориями. (Эта точка зрения допускает разнообразные нюансы, оговорки и компромиссы, которые я не буду здесь обсуждать.) Поэтому я хочу предложить другой критерий адекватности, согласно которому формальная математическая теория считается адекватной только в том случае, когда она адекватно моделирует собственную метатеорию. В этом случае тот факт, что всякая формальная теория требует метатеории, уже не имеет особого значения, поскольку метатеорию можно тогда рассматривать в качестве предварительного неформального этапа математического рассуждения, которое при переходе к формальному рассмотрению становится более строгим.

Сторонники формализации математики часто отвечают на вопрос о метатеории похожим образом. Однако поскольку известные формальные теории вроде ZFC принципиально отличаются от своих метатеорий, то есть не отвечают только что указанному критерию адекватности, такой ответ не является удовлетворительным. Отличие, о котором я здесь говорю, состоит в том, что в то время как метатеории (как и любые другие "обычные" математические теории) пользуются (нелогическими) конструктивными процедурами, такого рода процедуры не предусматриваются внутри самих формальных теорий. Другими словами, эти нелогические процедуры остаются неформализованными. Формальные теории зависят от таких конструктивных процедур как объекты своих метатеорий, но при этом не обладают внутренними ресурсами для того, чтобы моделировать (то есть "интерьеризировать") эти процедуры. Указание на возможность формализации метатеории обычными средствами не решает, а только отодвигает проблему, поскольку в этом случае решающей оказывается роль неформальной мета-метатеории.

Данное рассуждение позволяет также понять, в чем состоит корень проблемы. Как мне представляется, дело здесь не в формализации как таковой. Идея формализации математики как математической рефлексии, то есть идея исследования общих принципов построения математических теорий математическими же методами, на мой взгляд является продуктивной. Возможность применения результатов такого рода рефлексии для построения математических теорий менее очевидна, однако я не буду сейчас ее ставить под вопрос. Вместо этого я укажу на тот очевидный факт, что проект формализации математики использует также некоторые нематематические предпосылки общего эпистемологического характера. В данном случае я имею в виду предпосылку о том, что любая правильно построенная математическая теория (и вообще любая правильно построенная теория) представляет собой некоторую систему утверждений, связанных друг с другом отношением логического следования. Как мы видели, эта предпосылка является частью современного понятия аксиоматической теории. Современные формальные математические теории строятся с использованием этой фундаментальной предпосылки. Однако, как я попытался показать в этой статье сначала на примере античной геометрии, а затем и на современных примерах, эта предпосылка является неадекватной, поскольку она не принимает во внимание тот футндаментальный факт, что в задачу математической теории также входит построение своих объектов.

В истории логики 20го века понятия аксиоматизации и формализации оказались очень тесно связанными. Поэтому мне представляется особенно важным различить эти два понятия. Как я уже говорил выше, аксиоматический метод часто используется в современной математике неформально. При этом обычно имеют в виду, что для строгой аксиоматизации необходимы формальные средства. Я согласен с таким подходом, но я считаю, что именно примеры строгой аксиоматизации с использованием формальных средств ясно указывают на неадекватность приятого за основу (неформального) понятия аксиоматической теории. Очевидные успехи неформального использования аксиоматического метода в математике, на мой взгляд, объясняются тем, что в таких случаях об аксиоматизации в строгом смысле речь не идет.

Хотя я не готов сейчас предложить систематическое описание альтернативного способа построения математических теорий пригодного для современной математики, я думаю, что такой способ должен предполагать использование современного аналога евклидовых *постулатов*, то есть некоторого набора базовых процедур отличных от процедур логического вывода. В отличие от процедур логического вывода, которые не являются специфическими для данной теории, список таких нелогических процедур может быть специфическим для данной теории (так же как и список аксиом этой теории). В этом смысле архитектура “Начал” Евклида может представлять интерес и для современной математики. Тот факт, что евклидова структура математического рассуждения продолжает использоваться в современной математике является, на мой взгляд, не просто рудиментом прошлого, а свидетельством значимости этой структуры для современного математического мышления.

В заключение я хочу вернуться к вопросу о математическогом доказательстве. Современное неформальное употребление этого термина в математике согласуется с идеей о том, что математическая теория представляет собой систему утверждений, некоторые из которых принимаются без доказательства (аксиомы), а остальные дедуцируются из этих аксиом. Как я попытался показать в этой статье, такой взгляд на математическую теорию является неадекватным. В этой связи по поводу математического доказательства можно сказать следующее. Либо математическое доказательство не следует отождествлять с логическим выводом из аксиом и ранее доказанных теорем, либо следует вслед за Проклом употреблять термин "доказательство" в более узком смысле, чем это обычно делается, и выделять *построение* как особый элемент математического рассуждения, который не является частью доказательства. Хотя данный вопрос является скорее терминологическим чем теоретическим, второй вариант мне представляется предпочтительным, поскольку он может помочь признанию фундаментального значения конструктивных процедур в математике.

Тезис о фундаментальном значении конструктивных процедур в математике не является новым. Однако, как я уже упоминал в начале этой статьи, в математике и философии математики 20го века этот тезис в основном разрабатывался в рамках идеи аксиоматической теории с помощью подходящих уточнений правил логического вывода (конструктивная логика). Как я постарался показать в данной статье, такой подход в принципе не позволяет полностью принять в расчет конструктивный аспект математики. Поэтому важная задача состоит в том, чтобы найти подходящую замену обычному понятию аксиоматической теории. Для этого стоит лучше присмотреться к тому, как аксиоматический метод используется в неформальной математической практике, и попытаться построить более адекватные формальные модели современных математических теорий. Формализация евклидовой геометрической дедукции могла бы быть также хорошим подспорьем для такого рода исследований.

Список литературы

[1] Euclides. *Opera omnia*. Lipsiae, 1883-1886.

[2] G. Frege. *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*. Yale University Press, 1971.

[3] Thomas L. Heath. *The Thirteen Books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*. Cambridge University Press, 1926.

[4] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig, 1899.

[5] David Hilbert. Axiomatisches denken. *Mathematische Annalen*, 78:405–415, 1918.

[6] J. Hintikka and U. Remes. *The Method of Analysis. Its Geometrical Origin and Its General Significance*. Dordrecht- Boston, D. Reidel, 1974.

[7] J. Hintikka and U. Remes. Ancient geometrical analysis and modern logic. *R.S. Cohen, P.K. Feyerabend, Marx W. Wartofsky (eds.), Essays in Memory of Imre Lakatos (Boston Studies in the Philosophy of Science, vol. 39)*, 1976.

[8] E. Dean J. Avigad and J. Mumma. Sur quelques points d'algebre homologique. *Review of Symbolic Logic*, 2(4):700–768, 2009.

[9] Proclus. *A commentary on the first book of Euclid's elements. Translated by G. R. Morrow*. Princeton Univ Press, 1970.

[10] A. Rodin. Categories without structures. *Philosophia Mathematica*, 19(1):20–46, 2011.
[11] Родин А.В. *Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля.* Наука, 2003.
[12] А. Френкель и И. Бар-Хиллел. *Основания теории множеств.* Мир, 1966.
[13] Д. Гильберт и П. Бернайс. *Математическая логика и основания математики.* Наука, 1979.
[14] Давид Гильберт. *Основания геометрии.* Спб, Сеятель, 1923.
[15] Евклид. *Начала Евклида, книги 1-6 (перевод и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского).* ОГИЗ, Москва-Ленинград, 1948.
[16] И. Кант. *Критика чистого разума, перевод О. Лосского.* Спб, 1907.
[17] С. Клини. *Ведение в метаматематику.* Издательство иностранной литературы, 1957.
[18] П.Дж. Коэн. *Теория множеств и континуум-гипотеза.* Мир, 1969.
[19] Э. Мендельсон. *Ведение в математическую логику.* Наука, 1971.
[20] А.Н. Колмогоров и С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Наука, 1976.
[21] Г.Г. Цейтен. *История математики в древности и в средние века.* Москва, 1932.