

Генетический метод построения теории в геометрии Лобачевского

Andrei Rodin

Колмогоровские Чтения 2015

23 мая 2015 г.

Гильберт и Бернайс о генетическом методе

Исследования по проблеме параллельных 1840

Что такое геометрическая фигура?

Заключение

Hilbert&Bernays 1934

Термин “аксиоматический” употребляется иногда и более широко, а иногда и в более узком смысле слова. При самом широком понимании этого термина построение какой-либо теории мы называем аксиоматическим, если основные понятия и основные гипотезы этой теории ставятся как таковые во главу угла, а дальнейшее ее содержание выводится из них с помощью определений и доказательств. Аксиоматически именно в этом смысле слова были построены геометрия Евклида, механика Ньютона, термодинамика Клаузиуса.

Hilbert&Bernays 1934

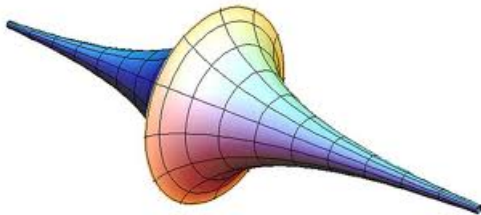
Когда аксиоматика начинает пониматься в наиболее узком смысле слова, в качестве очередного обстоятельства добавляется еще *экзистенциальность его вида*. Этим *аксиоматический* способ построения какой-либо теории отличается от *конструктивного*, или *генетического* способа. [..] Аксиоматику в такой усиленной форме, возникающую в результате отвлечения от конкретного предметного содержания и сформулированную в экзистенциальном виде, мы кратко будем называть *формальной аксиоматикой*.

Формальная аксиоматика:

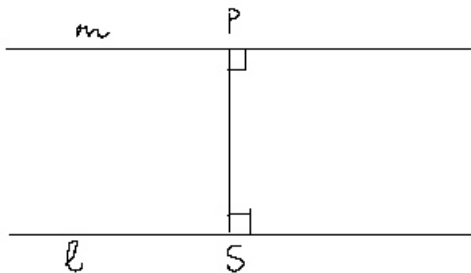
Формальная теория (синтаксис) и ее модели (семантика).

Пример: (частичная) модель гиперболической плоскости

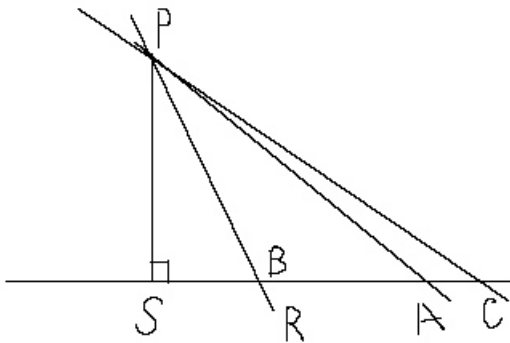
Лобачевского на (евклидовой) псевдосфере (Бельтрами 1867)



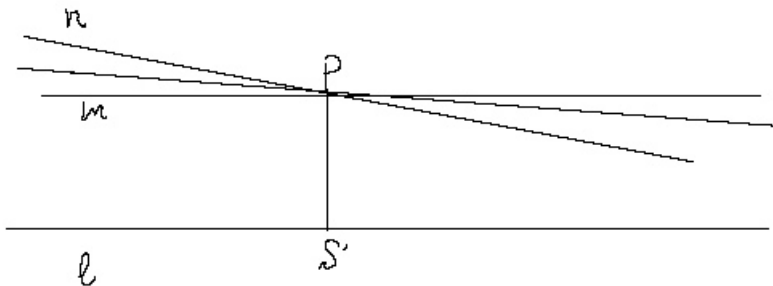
параллельные существуют



нет крайней секущей

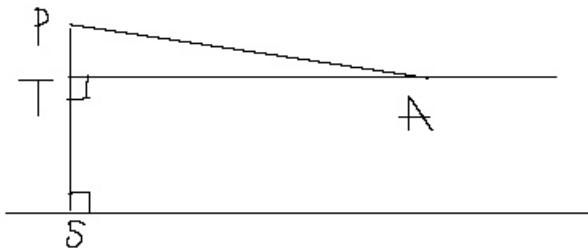


есть крайние параллельные



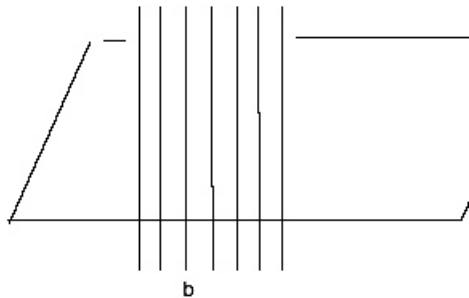
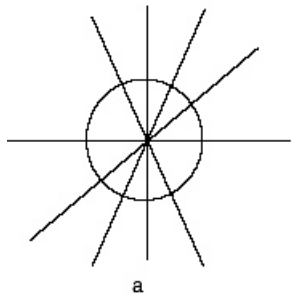
параллелизм в смысле \mathbb{L} - отношение эквивалентности

угол параллельности зависит от расстояния

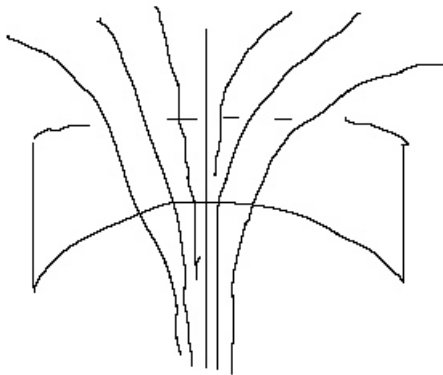


$$\tan(\alpha/2) = a^{-d} \quad (1)$$

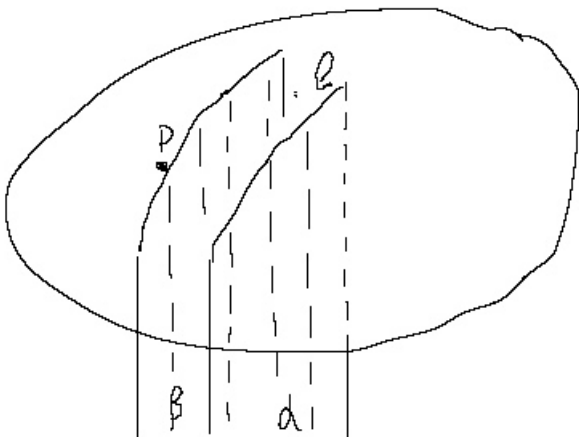
пучки прямых



орисфера



гиперболическая модель евклидовой плоскости



нет крайней секущей

$EPLANE \xrightarrow{eplane} ESPACE$

$CIRCLE \xrightarrow{circle} EPLANE$

$CIRCLE \xrightarrow{circle_1} EPLANE$
 $\downarrow \text{circle}_2$
 $ESPACE$
 $\swarrow \text{eplane}$

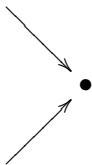
$TYPE \xrightarrow{\text{figure}} SPACE$

еплоскость и орисфера

$$EPLANE \xrightarrow{eplane} ESPACE$$
$$EPLANE \xrightarrow{horisphere} HSPACE$$

категория фигур

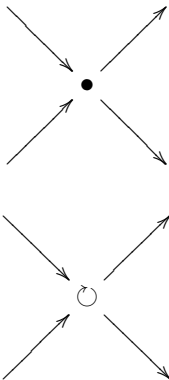
пространство



ТИП



композиция фигур



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новое это хорошо забытое старое. Аксиоматический метод Гильберта это не последнее слово в представлении математических теорий.

КОНЕЦ