Теоретико-модельная и теоретико-доказательная семантика логического вывода:

онтологические и эпистемологические следствия

Андрей Родин

29 марта 2018 г.

Логическое (семантическое) следствие (Тарский 1936)

Формула ϕ логически следует из совокупности формул T, в символах $T \models \phi$,

если всякая модель T является также моделью ϕ (то есть ϕ истинна во всякой модели T)

Замечание 1

Семантическое отношение логического следования $T \models \phi$ нужно отличать от синтаксического отношения выводимости $T \vdash \phi$.

Теоретико-модельная семантика вывода классической логики предикатов и других стандартных логических исчислений *корректна* в том смысле, что $T \vdash \phi$ влечет за собой $T \models \phi$.

Замечание 1

Однако согласно 1й теореме Геделя о неполноте формальной арифметики, никакая конечная совокупность формул T содержащая аксиомы арифметики не может обеспечить $T \vdash \phi$ для любой формулы ϕ, для которой имеет место $T \models \phi$.

Таким образом отношение синтаксической выводимости $\vdash$ может давать *корректное*, но в большинстве интересных случаев *неполное* символьное представление отношения логического следствия $\models$.

Замечание 2

Предполагается, что в формулах T, ϕ различаются *логические константы* и экстра-логические константы и переменные. Модель формулы из ϕ - это такое приписывание значений экстра-логическим символам этой формулы, которое превращает ее в истинное высказывание. Значения логических констант при таком подходе предполагаются фиксированными заранее (формально и неформально).

Замечание 3

Wilfried Hodge считает выражение "теоретико-модельная семантика логического вывода" (которое широко используется критиками этого подхода, о которых пойдет речь дальше) некорректным или по крайней мере неточным, поскольку Альфред Тарский предложил его НЕ для объяснения значения логического вывода, а для только для описания истинностных условий вывода (сохранение истинности при выводе). Однако в широкой педагогической практике значение правил вывода обычно объясняется именно с помощью отношения семантического следствия.

Теория доказательств

Beweistheorie : Hilbert & Bernays 1939

Доказательство как синтаксический объект. Теория доказательств: изучение таких объектов математическими средствами (в частности для решения вопроса о непротиворечивости данной теории). В *этом* смысле теория доказательств - это теория синтаксиса.

Общая теория доказательств Правица

Dag Prawitz (since 1970s): Теория доказательств в смысле Гильберта-Бернайса заранее предполагает ответ на вопрос о том, что такое доказательство не пользуясь при этом никакой эпистемологической аргументацией. Формальные (синтаксические) выводы действительно могут при определенных условиях играть роль доказательств, но выяснить эти условия может только более общая теория.

Общая теория доказательств Правица

Будем считать вслед за Гильбертом и Бернайсом, что доказательство это последовательность формул, которая получается в результате применения правил из фиксированного списка. Тогда правила определяют элементарные шаги доказательства. Такие элементарные шаги должны быть эпистемически прозрачны. Но теоретико-модельная семантика вывода не позволяет различать эпистемически прозрачные и эпистемически темные правила. Поэтому правила вывода требует другой семантики, которая решает этот вопрос.

Теоретико-доказательная семантика (ТДС)

Peter Schroeder-Heister : 1991

contradictio in adjecto?

Исторические источники ТДС (20в.)

- Gentzen : введение логических констант как процедура, которая придает им значение
- BHK: Brouwer, Heyting, Колмогоров; объяснение значения: "что нужно знать, чтобы знать $A \to B$ и т.д."
- Wittgenstein: meaning as use, truth-makers

Математические реализации ВНК

- Heyting 1930-1934: формализация интуиционистской логики высказываний
- Колмогоров 1932: исчисление задач
- Семантика реализуемости Клини
- Исчисление конструкций Крайзеля и Гудмана
- Диалектическая интерпретация Геделя
- Конструктивная теория типов Мартина-Лефа
- ГТТ

MLTT: Syntax

- 4 basic forms of judgement:
  (i) $A : TYPE$;
  (ii) $A \equiv_{TYPE} B$;
  (iii) $a : A$;
  (iv) $a \equiv_A a'$
- Context : $\Gamma \vdash$ judgement (of one of the above forms)
- no axioms (!)
- rules for contextual judgements; Ex.: dependent product :
  If $\Gamma, x : X \vdash A(x) : TYPE$, then $\Gamma \vdash (\Pi x : X)A(x) : TYPE$

MLTT: Semantics of $t : T$ (Martin-Löf 1983)

- t is an element of set T
- t is a proof (construction) of proposition T ("propositions-as-types")
- t is a method of fulfilling (realizing) the intention (expectation) T
- t is a method of solving the problem (doing the task) T (BHK-style semantics)

HoTT: the Idea

Types in MLTT are (informally!) modeled by spaces (up to homotopy equivalence) in Homotopy theory, or equivalently, by higher-dimensional groupoids in Category theory (in which case one thinks of n-groupoids as higher homotopy groupoids of an appropriate topological space).

Обратите внимание на *внелогическую* интерпретацию логического понятия тождества! В аксиоматических теориях в стиле Гильберта различение логических и внелогических символов жестко фиксировано заранее и интерпретации подлежат *только* внелогические символы: ср. понятие сигнатуры у Бурбаки!

Homotopical interpretation of Intensional MLTT

- $x, y : A$
  x, y are points in space A
- $x', y' : x =_A y$
  x', y' are paths between points x, y; $x =_A y$ is the space of all such paths
- $x'', y'' : x' =_{x =_A y} y'$
  x'', y'' are homotopies between paths x', y'; $x' =_{x =_A y} y'$ is the space of all such homotopies
- $\ldots$

Point

Definition

Space S is called contractible or space of h-level (-2) when there is point $p : S$ connected by a path with each point $x : A$ in such a way that all these paths are homotopic (i.e., there exists a homotopy between any two such paths).

Homotopy Levels

Definition

We say that S is a space of h-level $n+1$ if for all its points x, y path spaces $x =_S y$ are of h-level n.

Cummulative Hierarchy of Homotopy Types

- -2-type: single point pt;
- -1-type: the empty space $\emptyset$ and the point pt: truth-values aka (mere) propositions
- 0-type: sets: points in space with no (non-trivial) paths
- 1-type: flat groupoids: points and paths in space with no (non-trivial) homotopies
- 2-type: 2-groupoids: points and paths and homotopies of paths in space with no (non-trivial) 2-homotopies
- ...

Propositions-as-**Some**-Types !

Which types are propositions?

Def.: Type P is a *mere proposition* if $x, y : P$ implies $x = y$ (definitionally).

Truncation

Each type is transformed into a (mere) proposition when one ceases to distinguish between its terms, i.e., *truncates* its higher-order homotopical structure.

Interpretation: Truncation reduces the higher-order structure to a single element, which is **truth-value**: for any non-empty type this value is **true** and for an empty type it is **false**.
The reduced structure is the structure of **proofs** of the corresponding proposition.
To treat a type as a proposition is to ask whether or not this type is instantiated without asking for more.

- Thus in HoTT "merely logical" rules (i.e. rules for handling propositions) are instances of more general formal rules, which equally apply to non-propositional types.
- These general rules work as rules of building models of the given theory from certain basic elements which interpret primitive terms (= basic types) of this given theory.
- Thus HoTT qualify as *constructive* theory in the sense that besides of propositions it comprises non-propositional objects (on equal footing with propositions rather than "packed into" propositions as usual!) and formal rules for managing such objects (in particular, for constructing new objects from given ones). In fact, HoTT comprises rules with apply *both* to propositional and non-propositional types.

Интерпретация правил: ТМС или ТДС?

We shall say that interpretation m is a model of rule R

$$\frac{A_1^m, \ldots, A_n^m}{B^m} \tag{1}$$

when the following holds: whenever $A_1^m, \ldots, A_n^m$ are true statements B^m is also true statement.

проблемы

- модель и/или объяснение значения?
- экстра-логические применения правил;
- интерпретация логических констант

Models of HoTT after Voevodsky

(1) Construct a general model of given type theory **T** (MLTT or its variant) as a category $\mathcal{C}$ with additional structures which model **T**-rules. For that purpose the authors use the notion of *contextual category* due to Cartmell 1978; in later works Voevodsky uses a modified version of this concept named by the author a *C-system*.

Models of HoTT after Voevodsky

(2) Construct a particular contextual category (variant: a C-system) $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ of syntactic character, which is called *term model*. Objects of $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ are MLTT-contexts, i.e., expressions of form

$$[x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n]$$

taken up to the definitional equality and the renaming of free variables and its morphisms are substitutions (of the contexts into $\mathbf{T}$-rule schemata) also identified up to the definitional equality and the renaming of variables). More precisely, morphisms of $\mathcal{C}(T)$ are of form

Models of HoTT after Voevodsky

$$f : [x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n] \rightarrow [y_1 : B_1, \ldots, y_m : B_m]$$

where f is represented by a sequent of terms $f_1, \ldots, f_m$ such that
$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash f_1 : B_1$
$\vdots$
$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash f_m : B_m(f_1, \ldots, f_m)$
Thus morphisms of $\mathcal{C}(T)$ represent derivations in **T**.

Models of HoTT after Voevodsky

- Define an appropriate notion of morphism between contextual categories (C-systems) and form category $CTXT$ of such categories.
- Show that $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ is initial in $CTXT$, that is, that for any object $\mathcal{C}$ of $CTXT$ there is precisely one morphism (functor) of form $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \to \mathcal{C}$.

The last item is the **Initiality Conjecture** that presently stands open.

классическая vs. конструктивная логика: реализм и анти-реализм

- истина как соответствие положению вещей (Т-схема) vs. истина как существование доказательства
- доказательство как формальный вывод из аксиом vs. доказательство как эффективно предъявляемое свидетельство
- эпистемологическая рефлексия $\Box P \to P$ vs. ко-рефлексия $P \to \Box P$

Возможна ли реалистическая интерпретация ТДС?

Да, если

- понимать истину конструктивно как существование доказательства
- но при этом думать о существовании доказательств реалистически как о существовании факторов истины.

Возможный вариант формата для факторов истины: положение вещей (Витгенштейн)

В таком формате конструктивное понятие истины как существования доказательства совместимо с понятием истины как соответствия положению вещей: конструктивный (эпистемически нагруженный) реализм.

Теория значения остается полностью конструктивной (значение как использование). Знание значения предложения требует знания условий его истинности, но не требует проверки этих условий.

Вывод

Онтологии и эпистемологии стоят или падают вместе.

Традиционный взгляд на эпистемологию как на надстройку над онтологией (Аристотель, Фреге) ошибочен.

СПАСИБО!