Логическая компонента научных теорий

Шалак В.И., дфн, зав. сектором логики ИФ РАН

Когда-то Галилей сказал, что *книга природы написана на языке математики.* В 1959 году Юджин Вигнер сделал доклад на тему «*Непостижимая эффективность математики в естественных науках*». С тех пор эта тема регулярно всплывает в дискуссиях об основаниях и философии математики.

Одно из возможных объяснений *непостижимой эффективности математики* могло бы заключаться в том, что она – это продолжение логики, что математические понятия производны от логических, и потому из универсальности логики, которая позволяет нам рассуждать о любых областях, следуют универсальность и эффективность математики. В этом случае нет ничего удивительного ни в словах Галилея, ни в словах Вигнера, поскольку математика оказывается просто проекцией законов логики.

Более ста лет назад в рамках программы логицизма была предпринята попытка редуцировать математику к логике. Предполагалось возможным определить основные понятия математики чисто логическими средствами, а не путем принятия тех или иных постулатов.

Пример, как можно определить средствами логики простейшее математическое понятие – универсальное двухместное отношение Uxy. Для этого берем любое двухместное отношение Rxy языка логики и с его помощью определяем универсальное:

$$Uxy \equiv_{def} Rxy \vee \neg Rxy$$

Если бы аналогичную операцию можно было проделать с базовыми понятиями математики, то в результате мы имели бы некоторый набор определений, относительно которого было бы справедливо утверждение, что A является теоремой математики, если и только если A выводимо из этих определений:

$$\boldsymbol{Math} \mid\!- A \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Def} \mid\!- A$$

Одним из главных сторонников программы логицизма был Рассел, который сначала похоронил надежды Фреге свести математику к логике, а потом сам попытался это сделать. В конце концов программа логицизма была признана неудачной, поскольку требовала принятия далеких от логической очевидности аксиом сводимости, мультипликативности и бесконечности.

Но программа логицизма не могла осуществиться и по более простым причинам, на которые почему-то никто не обращает внимания. По крайней мере, я не встречал этого в литературе.

После работ Гёделя и Тарского, когда было сформулировано понятие модели и доказана полнота логики предикатов первого порядка, стал понятен семантический смысл теорем логики. Это предложения, истинные во всех моделях и при любых интерпретациях.

Но, если взять арифметику, в ней есть теорема

$$0 \neq 1$$

как частный случай аксиомы, что ноль не равен ни одному последующему числу. Чтобы она могла быть истинной, предметная область должна содержать не менее двух элементов. Но теоремы логики истинны в любых областях независимо от того, сколько элементов они содержат, в том числе и в одноэлементной. Поэтому, как бы мы ни старались определить арифметические понятия, эта теорема арифметики никак не может стать теоремой логики.

Таким образом, программа логицизма оказалась несостоятельной не потому, что аксиомы сводимости, мультипликативности и бесконечности далеки от очевидности, а потому, что теоремы логики общезначимы во всех областях, а теоремы математики - нет.

Но даже если программа логицизма в полном объеме не верна, отсюда еще не следует, что она не может быть верна частично, и некоторые математические теории могут быть сведены к чистой логике. Это и стало целью моих исследований.

В результате была доказана теорема, одна из формулировок которой гласит, что ***«Конечно аксиоматизируемая теория первого порядка***

редуцируема к логике посредством определений, если и только если она имеет хотя бы одну одноэлементную модель».

В этой формулировке теоремы дан семантический критерий, но есть и достаточно простой синтаксический, который я не буду приводить. При желании можно ознакомиться с самим доказательством.

(О теориях первого порядка, которые могут быть представлены посредством определений. // Логич. исслед./Logical Investigations. 2016. № 22 (1). С. 125–135. URL - http://iphras.ru/uplfile/logic/shalack/li22-1-rus.pdf)

В математике такие модели часто называют вырожденными и потому малоинтересными. Оказывается, существование именно таких моделей и является критерием различения логического и нелогического.

Приведу несколько примеров теорий, сводимых к логике.

1). ***Самый простой*** пример - ***теория симметричного отношения*** с единственным постулатом

$$Sxy \supset Syx$$

В своем выступлении я не буду вдаваться в технические детали, но для симметричного отношения сделаю исключение и покажу, как можно его определить в логике. Это можно сделать двумя способами. Берем произвольный двухместный предикатный символ Bxy языка логики и с его помощью задаем определение нового предикатного символа S_1xy:

$$(DS_1) \qquad S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy$$

Легко показать, что из определения выводима формула $S_1xy \supset S_1yx$.

$$DS_1 \mid\!- S_1xy \supset S_1yx$$

Если заменить символ S_1 на определяющую часть, то, как и должно быть, получим теорему логики:

$$\mid\!- (\forall uv(Buv\supset Bvu)\supset Bxy) \supset (\forall uv(Buv\supset Bvu)\supset Byx)$$

И второй способ. Правая часть определения выглядит несколько иначе:

(DS_2) $$S_2xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \; \& \; Bxy$$

$$DS_2 \mid\!- S_2xy \supset S_2yx$$

$$\mid\!- (\forall uv(Buv \supset Bvu) \& Bxy) \supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \& Byx)$$

Почему эта теория интересна? Отношение симметричности считается фундаментальным, поскольку примеры его обнаруживают практически во всех областях естествознания. Вспомним некогда популярный лозунг *«Ищите симметрию!»*. Теперь можно было бы добавить «*...и вы ее обязательно найдете, потому что она является логическим отношением*». Этот лозунг по сути ничем не отличается от лозунга *«Ищите A или не-A»*, но призывов к нему не слышно.

Если вспомнить Юджина Вигнера, то в 1963 году он совместно с двумя другими учеными получил Нобелевскую премию по физике (цитирую по Википедии) «*за вклад в теорию атомного ядра и элементарных частиц, особенно с помощью открытия и приложения фундаментальных принципов симметрии*».

2). Теория **отношения равенства**. Теория содержит одну аксиому и одну схему аксиом.

- $x = x$
- $x = y \supset (A(x,x) \supset A(x,y))$

Если сигнатура содержит единственный предикатный символ равенства, то эта теория неотличима от теории отношения эквивалентности. Поэтому обычно предполагается, что, кроме равенства, сигнатура содержит и другие предикатные или функциональные символы. Если сигнатура конечна, то вторую схему аксиом можно заменить на конечный набор аксиом.

Известна теорема, что равенство нельзя определить в логике первого порядка. В то же время, очевидно, что все ее аксиомы истинны в одноэлементной области. Как это сочетается с доказанной теоремой?

Полезно вспомнить книгу Имре Лакатоса «*Доказательства и опровержения*», где он рассматривает теорему о соотношении вершин и сторон многоугольника и последовательно выявляет различные принимаемые по умолчанию допущения, учет которых видоизменяет саму теорему.

Так же и в случае с теорией равенства. Нас интересует не само определение равенства, а сведение к логике всей теории равенства. Поэтому достаточно одновременно с равенством принять определения и остальных предикатных символов конечной сигнатуры, чтобы теория равенства была редуцирована к логике предикатов первого порядка без равенства. В этом весь секрет.

3). Следующая теория – это ***теория групп***. Понятие группы одно из центральных в общей алгебре. Эта теория имеет вырожденную одноэлементную модель, и этого достаточно, чтобы она была определима в логике.

С другой стороны, алгебраическая теория поля уже не является сводимой к логике, так как ее модели содержат не менее двух элементов, в ней **0** сложения не равен **1** умножения.

4). Следующий пример – ***комбинАторная логика***. Если обратиться к ее аксиомам, то легко убедиться, что все они истинны в одноэлементной области, из чего автоматически следует сводимость к логике. Этот пример интересен тем, что в комбинаторной логике представимы все эффективно вычислимые функции. Следовательно, все эффективно вычислимые функции представимы в классической логике предикатов первого порядка без каких-либо дополнительных аксиом. А это уже довольно неожиданно.

5). Последний пример - элементарная ***теория топосов***. Как известно, одноэлементная категория с единственной единичной стрелкой является вырожденным топосом. Отсюда следует, что топосы не выводят нас за рамки логики предикатов. Лишь тогда, когда мы хотим развить в них арифметику или теорию множеств, и принимаем дополнительный постулат, что начальный и конечный объекты неизоморфны, мы выходим за границы логики. Иными словами, теория топосов - это не теория, а всего лишь язык, но с очень оригинальной онтологией.

Ну а теперь обратимся к теориям, которые нельзя свести к логике, – к геометрии, арифметике и теории множеств.

Геометрия

В качестве постулатов возьмем постулаты для геометрии на плоскости Тарского или Гильберта и Бернайса. Геометрия не имеет одноэлементных моделей. Препятствием к этому служит единственный постулат, что «*Существуют три точки, не лежащие на одной прямой*». Все остальные постулаты сводимы к логике. В том числе и постулат о параллельных прямых..

Еще одна проблема, которая возникает в связи с геометрией, заключается в том, что она не является конечно-аксиоматизируемой и потому не подпадает под доказанную теорему. В числе аксиом присутствует схема аксиом непрерывности. При этом каждый частный случай этой схемы сводим к логике.

Арифметика

Ситуация с арифметикой похожа на геометрию. Единственный постулат, который не позволяет свести ее к логике, - это постулат о том, что ноль не равен ни одному из последующих чисел.

$$0 \neq s(x)$$

Все остальные – сводимы к логике. В том числе и каждый частный случай схемы аксиом индукции.

Теория множеств

В теории множеств существование пустого множества и операции образования степени сразу выводят нас за рамки одноэлементных моделей и, следовательно, логики.

Естественнонаучные теории

А теперь посмотрим на естественнонаучные теории. С точки зрения логики, их постулаты формально ничем не отличаются от аксиом математики. Поэтому ничто не мешает применить критерии теоремы к аксиомам, например, классической механики. Три закона Ньютона и закон тяготения не налагают никаких ограничений на размер предметной области. Они остаются тривиальным образом справедливыми даже в том случае, если она содержит всего одну материальную точку. Если это так, то они тоже представляют собой всего лишь логическую схему, которую мы проецируем на окружающий мир.

Какие выводы отсюда следуют?

Выводы

1. Логицизм в полном объеме невозможен, но частично он имеет место. Нетривиальные несводимые к логике теории мы получаем лишь тогда, когда принимаем количественные допущения об универсумах моделей. Именно в этом пункте мы выходим за пределы чистой логики и именно здесь возможно приобретение новых знаний.

2. Теории математики могут быть разделены на две группы. К первой группе относятся теории, которые не зависят от количественных характеристик предметной области и потому могут быть названы ***качественными***, а ко второй – теории, которые зависят от таких характеристик и потому могут быть названы ***количественными***. Качественная математика является частью логики, а математика, отличная от логики, – это учение о количестве.

3. Последнее касается задач теории объектно-ориентированного программирования. Определения можно рассматривать как задание свойств объектов, которыми в нашем случае выступают предикатные символы.

   Посмотрим еще раз, как это выглядит в случае с симметричным отношением.

$$(DS_1) \qquad S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy$$

$$DS_1 \mid\!- S_1xy \supset S_1yx$$

$$|\!- (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy) \supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx)$$

Каждое вхождение определяемого предикатного символа в характеристическую аксиому автономно, т.е. содержит всю информацию о его свойствах, так как *тащит* за собой определяющую правую часть определения. Но так же автономно ведут себя и объекты. В любом месте программы мы можем обратиться к их свойствам независимо от существования и свойств других объектов.

Поэтому доказанная теорема может рассматриваться как ограничительная. Она содержит критерий, объекты с какими свойствами могут быть заданы, а какие – нет. Можно запрограммировать/определить объект-симметричное отношение и объект-группу, но нельзя запрограммировать объект-поле. В последнем случае придется вводить в программу дополнительные объекты.

Хочу высказать гипотезу, что нечто подобное может встретиться и в теории категорий. Какими свойствами могут обладать объекты сами по себе, а какими – лишь благодаря существованию других объектов с особыми свойствами. Чтобы развить в арифметику в топосах, мы вводим натурально-числовой объект, но одного его еще недостаточно. Дополнительно мы должны постулировать, что начальный и конечный объекты, которые существуют в каждом топосе независимо и до введения натурально-числового объекта, неизоморфны.