

# *Логическая компонента научных теорий*

Шалак В.И., д.ф.н.,  
зав. сектором логики ИФ РАН

# Секреты математики

*Галилей – «...книга природы написана на языке математики».*

*Юджин Вигнер – «Непостижимая эффективность математики в естественных науках».*

# Универсальное двухместное отношение

$Uxy$

$$Uxy \equiv_{def} Rxy \vee \neg Rxy$$

# ЛОГИЦИЗМ

*Math*  $\vdash$  A  $\Leftrightarrow$  *Def*  $\vdash$  A

# Нереализуемость логицизма

$$Ar \dashv\vdash 0 \neq 1$$

# Теорема

Конечно-аксиоматизируемая теория первого порядка редуцируема к логике посредством определений, если и только если она имеет одноэлементную модель.

# Симметричное отношение

$$Sxy \supset Syx$$

**Первый вариант:**  $(DS_1)$        $S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy$

$$DS_1 \text{ /- } S_1xy \supset S_1yx$$

$$\text{/- } (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy) \supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx)$$

**Второй вариант:**  $(DS_2)$        $S_2xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \& Bxy$

$$DS_2 \text{ /- } S_2xy \supset S_2yx$$

$$\text{/- } (\forall uv(Buv \supset Bvu) \& Bxy) \supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \& Byx)$$

# Сводимые к логике теории

## 1. *Теория отношения равенства*

- $x = x$

- $x = y \supset (A(x, x) \supset A(x, y))$

## 2. *Теория групп.*

## 3. *Комбинаторная логика.*

## 4. *Теория топосов.*

## 5. *...*



# Несводимые к логике теории

## 1. *Геометрия*

- Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

## 2. *Арифметика*

- $0 \neq s(x)$

## 3. *Теория множеств*

- $P(\emptyset)$

# Естественнонаучные теории

С логической точки зрения, постулаты физических теорий ничем не отличаются от аксиом математики.

Три закона Ньютона и закон тяготения не налагают никаких ограничений на размер предметной области. Они остаются тривиальным образом справедливыми даже в том случае, если модель содержит всего одну материальную точку. Если это так, то они тоже представляют из себя всего лишь логическую схему, которую мы проецируем на окружающий мир.

# Выводы

1. Нетривиальные несводимые к логике теории мы получаем, когда принимаем количественные допущения об универсуме моделей.
2. Теории математики могут быть разделены на две группы.
  - *Качественные* теории не зависят от размера универсума и сводимы к логике;
  - *Количественные* теории зависят от размера универсума.
3. Объектно-ориентированное программирование. Определения можно рассматривать как задание свойств объектов, которыми в нашем случае выступают предикатные символы.

Как это выглядит в случае с симметричным отношением?

$$(DS_1) \ S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy$$

$$DS_1 \ /- \ S_1xy \supset S_1yx$$

$$\ /- \ (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy) \supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx)$$

Доказанная теорема может рассматриваться как ограничительная. Она содержит критерии, объекты с какими свойствами могут быть определены, а какие – нет. Можно запрограммировать объект-симметричное отношение и объект-группу, но нельзя запрограммировать объект-поле. В последнем случае придется вводить в программу дополнительные объекты.